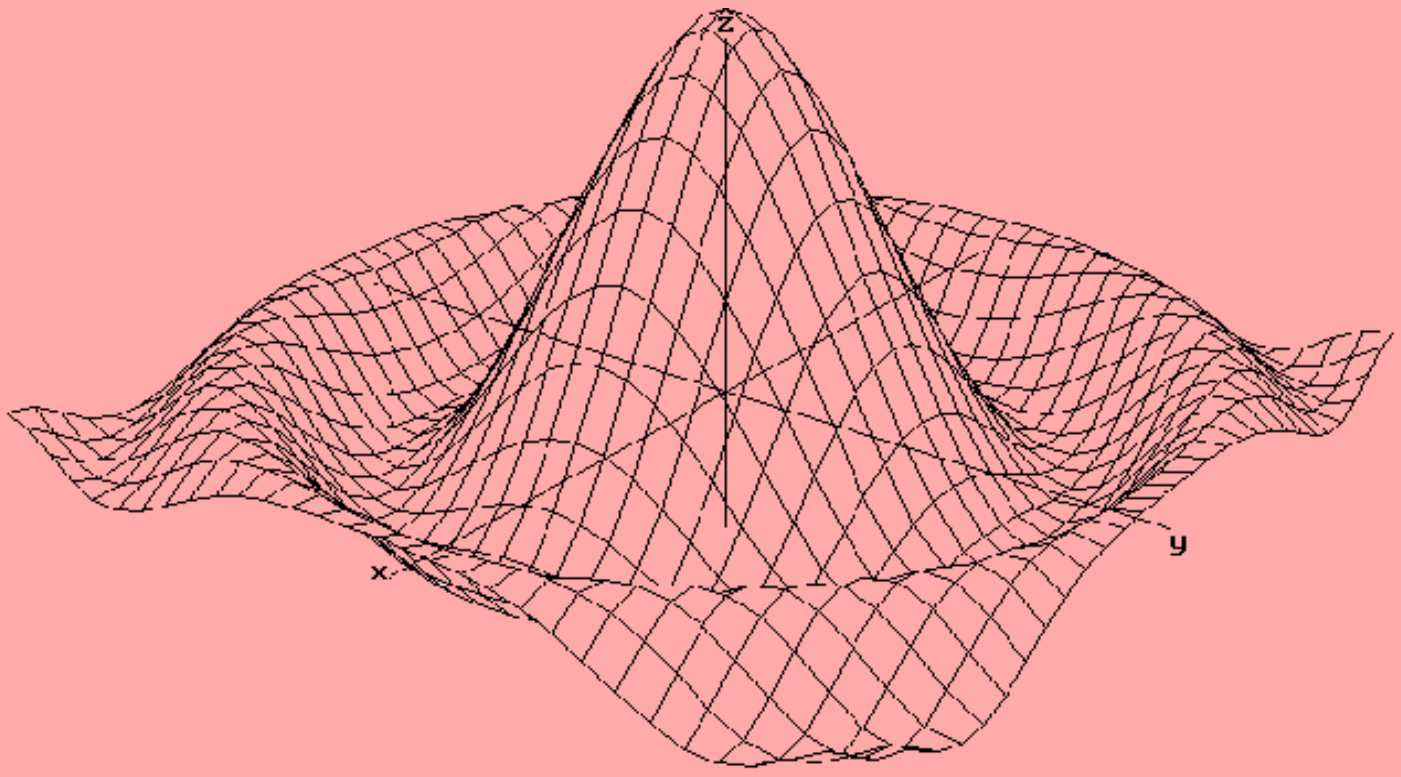
IOAN NAFORNIŢĂ CORNELIA GORDAN
ALEXANDRU ISAR

SEMNALE CIRCUITE ÔI SISTEME



PARTEA I

- Pentru uzul studenÛilor -

UNIVERSITATEA “POLITEHNICA” TIMIŞOARA
FACULTATEA DE ELECTRONIC{ ÔI TELECOMUNICAÚII
1995

CUPRINS

1. SEMNALE ŞI SISTEME. CONCEPTE ŞI CLASIFICĂRI 1
1.1 Semnale 1
1.1.1 Modelul matematic al semnalelor 5
1.1.2 Exemple de semnale definite în timp continuu 6
1.1.3 Exemple de semnale definite în timp discret 14
1.1.4 Transformări liniare ale variabilei timp 23
1.1.5 Componenta pară şi componenta impară a unui semnal . . . 28
1.1.6 Energia şi puterea semnalelor 30
1.1.7 O clasificare posibila a semnalelor 34
1.1.8 Distribuţii 35
1.1.9 Definiţia generală a semnalelor deterministe 54
1.2 Sisteme 54
1.2.1 Modelul matematic al sistemelor 55
1.2.2 Sisteme liniare 56
1.2.3 Sisteme invariante la translaţia în timp 58
1.2.4 Stabilitatea sistemelor 59
1.2.5 Cauzalitatea sistemelor 61
1.3 Sisteme caracterizate de ecuaţii diferenţiale sau cu diferenţe finite liniare şi cu coeficienţi constanţi 63
1.3.1 Sisteme continue caracterizate de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi 64
1.3.2 Sisteme discrete caracterizate de ecuaţii cu diferenţe finite liniare şi cu coeficienţi constanţi 65

1. SEMNALE ŞI SISTEME. CONCEPTE ŞI CLASIFICĂRI

Acest capitol încearcă să familiarizeze studentul cu noţiunile de semnal şi sistem, atît din punct de vedere practic cât şi al modelelor matematice cele mai adecvate pentru a le reprezenta. Sunt prezentate câteva tipuri de semnale uzuale în practica inginerului electronist şi se clasifică aceste semnale, după mai multe criterii. Unul dintre ele, criteriul energetic, conduce la separarea semnalelor în două clase, semnale de energie finită respectiv de putere finită, extrem de importante în teorie şi practică. Se disting de asemenea semnalele utile de cele ce "perturbă" recepţia sau prelucrarea lor.

În ceeace priveşte sistemele se introduce noţiunea de operator liniar (aditiv şi omogen) ca model pentru un sistem liniar. Se discută de asemenea noţiuni importante legate de conceptul de sistem şi anume stabilitatea, cauzalitatea şi invarianţa la translaţia (deplasarea) în timp.

Se acordă un spaţiu corespunzător distribuţiilor, în special celor neregulate, insistându-se asupra derivării modelelor de semnale sau mai pe scurt al semnalelor ce prezintă discontinuităţi.

1.1 Semnale

Un semnal este o cantitate sau o calitate fizică ce poartă o anumită informaţie. Pentru a exemplifica noţiunea, vă puteţi imagina un vapor ce navighează pe o ceaţă extrem de densă, vizibilitatea redusă creând un real pericol de coliziune cu un alt vapor. Pentru a evita ciocnirea, el va emite la intervale de timp convenabil alese, semnale sonore de avertizare (se presupune că vaporul nu dispune de instalaţie de RADAR). Aceste semnale, recepţionate de un alt vapor îi "aduc" acestuia informaţia că în vecinătatea sa se află un vapor.

Semnalele pot fi generate de surse de cele mai diverse tipuri: biologice, acustice, mecanice, electrice, chimice ş.a. O altă caracteristică a semnalelor, pe lânga aceea că aduc informaţii este că ele au o anumită evoluţie în timp.

Dacă ne imaginăm o înregistrare fotografică alb negru, caracterizată în fiecare punct de o anumită nuanţă de gri, această nuanţă constituie "valoarea" semnalului. Ea nu depinde însă de timp ci de poziţia punctului investigat, în cadrul imaginii. Avem de-a face cu un semnal care nu evoluează în timp ci se modifică în funcţie de coordonatele carteziene ale punctului din imagine. Evident putem să ne imaginăm o succesiune de fotograme, cum este cazul peliculei cinematografice, caz în care nuanţa de gri într-un punct dat se modifică de la fotogramă la fotogramă. Acum, semnalul este funcţie atât de coordonatele carteziene cât şi de timp.

În electronica uzuală, variabila după care se produce modificarea valorii semnalului este de obicei timpul, motiv pentru care vom lua în considerare acest caz

uzual, marcând în mod explicit excepţiile. În vederea prelucrării semnalului, cu scopul de a obţine informaţia utilă care o poartă, de a-i transfera o informaţie pe care urmează să o poarte sau pur şi simplu pentru a-i evidenţia anumite caracteristici, se utilizează circuite electronice, anlogice sau digitale. În consecinţă un semnal chimic, cum ar fi pH-ul unei soluţii, trebuie mai întâi "tradus" într-un semnal electric. Acesta trebuie să reflecte cât mai fidel, printr-o transformare inversabilă, toate caracteristicile interesante ale semnalului chimic. Pentru a realiza această operaţiune se utilizează aşa numitele "traductoare". Ele convertesc semnalul de altă natură în semnal electric, constituind, aşa cum se va vedea în continuare "sisteme". Evident va apărea şi problema inversă. Imaginaţi-vă că doriţi să orientaţi o antenă pe o anumită direcţie (azimut). Semnalul electric de comandă trebuie să fie tradus în poziţia unghiulară cerută antenei, prin intermediul unui "sistem" care admite o comandă electrică (tensiune sau curent) şi furnizează ca răspuns o mişcare mecanică de unghi determinat. Vom mai insista puţin asupra noţiunii de semnal pentru a introduce categoriile de semnal în timp continuu şi în timp discret, şi pentru a discuta pe scurt reprezentarea mărimii semnalului sub formă continuă sau discretizată. În figura 1.1 se arată o înregistrare automată a temperaturii în decursul unei zile. Semnalul ce este reprezentat de valoarea temperaturii θ, este funcţie de variabila timp t, care ia orice valoare în intervalul [0,24]. Se spune că un astfel de semnal este definit în timp continuu. În figura 1.2 se poate vedea un semnal definit în timp continuu t, fără însă ca el însuşi să satisfacă definiţia matematică a unei funcţii continue la momente de timp cum ar fi 0,3,7 etc. Există si semnale definite în timp discret. Pentru a putea prelucra un semnal cu ajutorul calculatorului numeric, este necesară discretizarea în timp a semnalului.

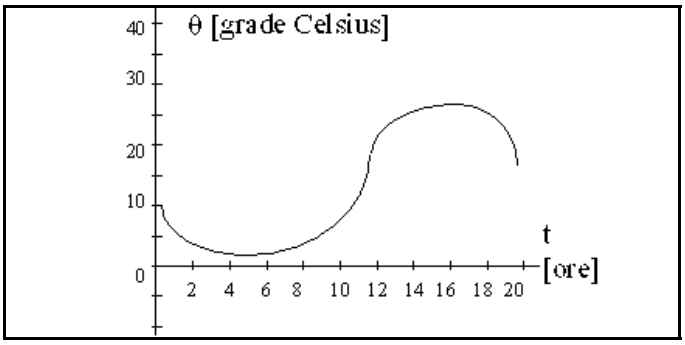


Fig. 1.1. Semnal definit în timp continuu.

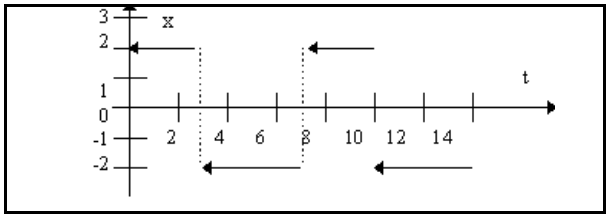


Fig. 1.2 Semnal discontinuu definit în timp continuu.

definit în timp continuu şi prelucrarea unor "eşantioane" din semnal; aceste "eşantioane" sunt valorile pe care le ia semnalul la anumite momente de timp $t_n = nT_e$, $n \in Z$, T_e fiind pasul de "eşantionare". Se poate norma timpul t_n , prin împărţire cu T_e astfel încât timpul (normat) este n, o variabilă evident discretă. În figura 1.3. se arată un semnal x ce evoluează în timp continuu, t. Din el se prelevează eşantioane la momentele nT_e rezultând semnalul x_d în timp discret, $n \in Z$. Semnalul x_d nu este definit decât la valori întregi ale timpului discret n, obţinut prin normare cu pasul de eşantionare T_e. În mod asemănător ne putem imagina că cele două coordonate x şi y ale unei înregistrări fotografice se discretizează cu paşii Δx respectiv Δy , obţinându-se coordonatele punctelor de eşantionare sub forma unei grile, ($m\Delta x$, $n\Delta y$) unde $m \in Z$ şi $n \in Z$. Rezultă după normare în plan, coordonatele discrete (m,n). În practică există şi semnale intrisec definite în timp discret, cum ar fi spre exemplu indicele săptămânal "Dow Jones" ce se calculează la bursa din New-York. Ne putem imagina, spre exemplu, la o populaţie dată, numărul relativ de cupluri ce au 0 copii, 1 copil, 2 copii ş.a.m.d. (fig.1.4.). "Semnalul" ce arată numărul relativ de cupluri ce au n copii este un "semnal" dependent intrisec de o variabilă discretă (numărul de copii nu poate fi decât un întreg). Dacă un semnal electric (tensiune sau curent) trebuie pre-

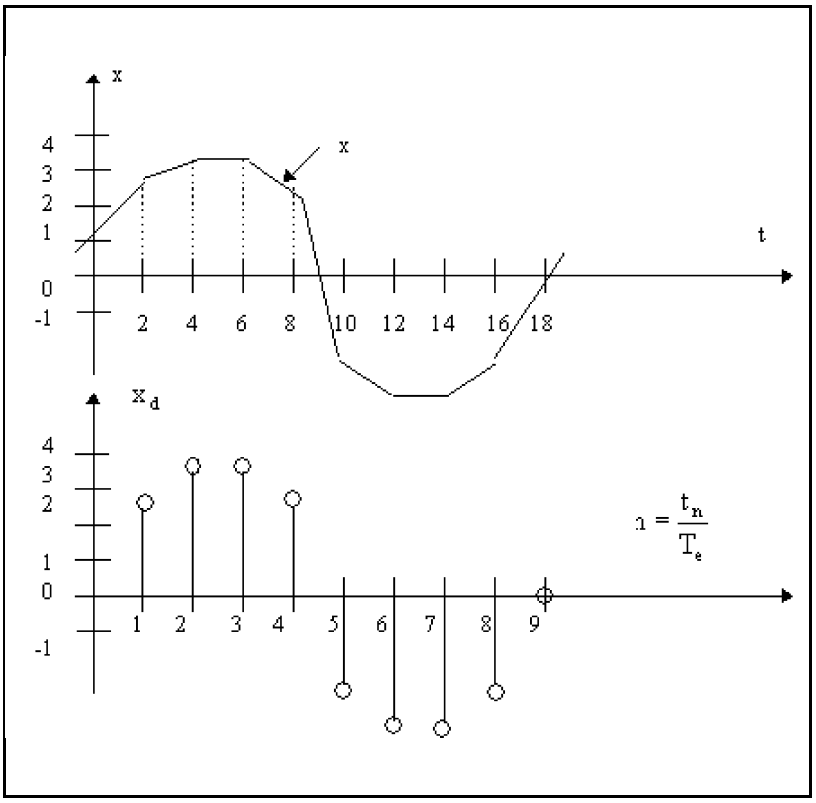


Fig. 1.3 Semnal în timp discret x_d, obţinut prin eşantionarea unui semnal în timp continuu, x.

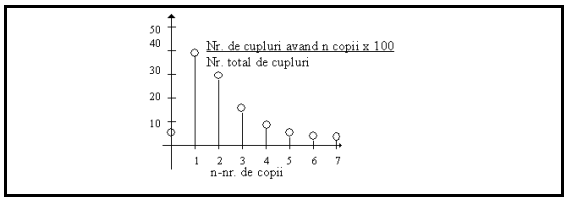


Fig. 1.4 Exemplu de semnal definit în funcţie de o variabilă discretă.

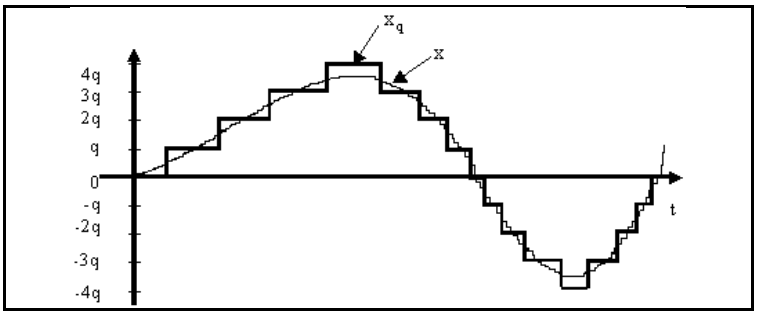


Fig. 1.5 Semnalul x este cuantizat cu cuanta q dând semnalul x_q .

lucrat cu ajutorul unui calculator numeric, nu este suficientă discretizarea sa în timp, proces numit eşantionare. Deoarece un calculator numeric acceptă la intrare numere cu un număr dat de cifre binare (lungime binară), este necesară şi o discretizare a valorii eşantioanelor numită şi cuantizare. În principiu o mărime cuantizată poate lua numai anumite valori, ce diferă între ele prin multipli întregi ai cuantei q, aşa cum se arată în figura 1.5. Tranziţia de la o cuantă la alta are loc atunci când se depăşeşte jumătatea intervalului dintre două niveluri de cuantizare. Prin urmare, dacă: $(k-1/2)q<x\leq(k+1/2)q$ atunci: $x_q = kq$. Semnalul din figura 1.5, este un semnal definit în timp continuu dar cuantizat. Trebuie specificat faptul că, pentru prelucrarea cu calculatorul numeric, operaţia de cuantizare trebuie urmată de o operaţie de codificare rezultând un semnal în timp discret de forma unei secvenţe numerice $\{x_n\}$. Dispozitivul care converteşte o tensiune într-un cod numeric poartă denumirea de convertor analog-numeric (CAN). Dispozitivul care efectuează operaţia inversă şi anume primind un cod numeric furnizează o tensiune cuantizată, se numeşte convertor numeric-analogic (CNA). În figura 1.6. se prezintă structura unui sistem de prelucrare cu calculatorul numeric a unui semnal x (o tensiune) definit în timp continuu. Comutatorul K se închide la momentele nT_e pentru intervale de timp foarte scurte, încărcând capacitorul de memorare C_M la valoarea corespunzătoare eşantioanelor prelevate din semnal. Tensiunea memorată în intervalele de timp în care comutatorul K este deschis se converteşte numeric prin CAN rezultând secvenţa $\{x_n\}$ ce se prelucrează cu calculatorul numeric, CN. Acesta generează ca rezultat al prelucrării secvenţa

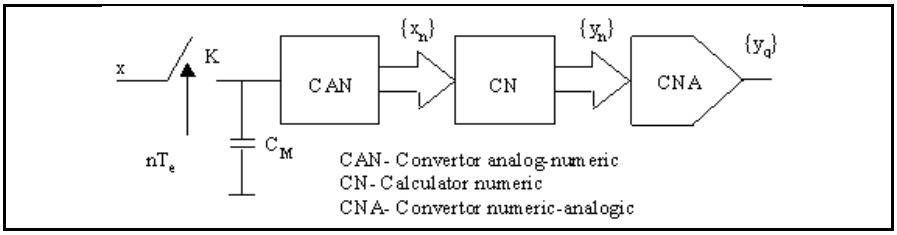


Fig. 1.6. Structura unui sistem de prelucrare numerică a semnalelor în timp continuu.

numerică $\{y_n\}$, convertită în eşantioane cuantizate de tensiune y_q , de către CNA. Semnalele în timp discret se mai numesc şi semnale discrete.

1.1.1 Modelul matematic al semnalelor

Din cele prezentate anterior modelul matematic cel mai potrivit pentru un semnal definit în timp continuu pare a fi o funcţie, având ca variabilă un element t aparţinând unei mulţimi T şi luând valori în M, o mulţime fixată, corespunzătoare valorilor posibile ale semnalului:

$$x : T \longrightarrow M \quad , \quad t \longrightarrow x(t) \quad , \quad \forall\, t \in T \;\; si \;\; x(t) \in M \quad . \qquad \textbf{(1.1)}$$

În mod normal mulţimea T este un interval al axei reale, $\mathbb{R}$, neavând în mod necesar semnificaţia de mulţime de valori de momente de timp (vezi exemplul imaginii statice). În cazul semnalelor definite în timp discret mulţimea T este o submulţime a mulţimii numerelor întregi Z. Se scrie:

$$x : T \longrightarrow M \quad , \quad t \longrightarrow x[n] \quad , \quad \forall\, n \in T \;\; si \;\; x[n] \in M \quad . \qquad \textbf{(1.2)}$$

După cum se va vedea în cele ce urmează, noţiunea de semnal în timp continuu nu poate fi modelată numai prin funcţii, fiind necesară şi utilizarea distribuţiilor. Semnalele ce pot fi modelate prin funcţii (distribuţii) se numesc semnale deterministe. Cunoscând funcţia ce modelează semnalul putem, în principiu, cunoaşte valoarea semnalului în orice moment de timp, orice nedeterminare fiind astfel înlăturată. Categoria de semnale deterministe nu este singura cu care se confruntă electronistul. Mai există o categorie de semnale, numite semnale aleatoare, pentru care nu se poate scrie o lege de variaţie temporală de tip funcţie, ca urmare a variaţiei lor haotice (aleatoare, întâmplătoare). Cunoscând o valoare a semnalului aleator la un moment de timp t dat, se poate spune, cu o anumită probabilitate, în ce interval de valori va fi cuprinsă valoarea semnalului la un moment de timp ulterior $t + t_0$. De această categorie de semnale ne vom ocupa mai târziu. Modelele matematice descriu realităţile fizice cu o anumită eroare. Cele simple permit un calcul mai expeditiv şi pot releva principalele influenţe. Cele mai rafinate descriu realităţile fizice cu abateri mai reduse. Alegerea modelului nu este unică şi trebuie să fie adecvată scopului. Atunci când spunem că tensiunea la bornele unui generator este $u(t)=10\sin(2\pi 1000t)$, tensiunea fiind măsurată în volţi iar timpul în secunde, înţelegem că, alegând corespunzător originea timpului , tensiunea la borne poate fi

calculată cu relaţia dată. Ea constituie modelul semnalului. Se poate constata imediat că modelul nu este corect deoarece generatorul este pornit la un moment dat şi oprit după un timp. Efectul semnalului limitat în timp asupra unui circuit nu este acelaşi cu cel al unei sinusoide de durată nelimitată. Diferenţele între efecte, după cum se va vedea, sunt însă neglijabile dacă generatorul rămâne conectat un timp foarte mare în raport cu perioada sinusoidei generate. În consecinţă modelul de semnal periodic poate fi utilizat chiar dacă semnalul real, modelat, are suportul finit.

1.1.2 Exemple de semnale definite în timp continuu

i) **Semnalul exponenţial**

După cum se va vedea ulterior, în studiul sistemelor liniare un loc aparte îl ocupă semnalele exponenţiale de forma:

$$x(t) = Ae^{st} \qquad s = \sigma + j\omega \quad , \tag{1.3}$$

sau aplicând relaţia lui Euler :

$$x(t) = Ae^{\sigma t}\cos\omega t + jAe^{\sigma t}\sin\omega t \quad . \tag{1.4}$$

Semnalul x(t) este complex. Pentru $\sigma = 0$ obţinem din (1.3) şi (1.4) :

$$x(t) = Ae^{j\omega t} = A\cos\omega t + jA\sin\omega t \quad , \tag{1.5}$$

semnalul fiind periodic, de perioadă T=(2π)/ω. Se verifică uşor că:

$$x(t+T) = Ae^{j\omega\left(t+2\frac{\pi}{\omega}\right)} = Ae^{j\omega t}e^{j2\pi} = Ae^{j\omega t} = x(t) \quad , \tag{1.6}$$

deoarece $e^{j2\pi} = 1$, ceea ce confirmă periodicitatea ($\sigma = 0$) . Din (1.5) rezultă :

$$A\cos(\omega t) = Re\{Ae^{j\omega t}\} \;\; ; \;\; A\sin(\omega t) = Im\{Ae^{j\omega t}\} \quad . \tag{1.7.a-b}$$

Prin urmare semnalele reale de tip sinusoidal sau cosinusoidal pot fi exprimate ca părţile reală respectiv imaginară ale exponentialei neatenuate ($\sigma = 0$) . Relaţiile (1.7) sunt dificil de utilizat, motiv pentru care se introduce ca o ficţiune de calcul "**frecvenţa negativă**". Utilizând relaţiile lui Euler se scrie:

$$A\cos(\omega t) = \frac{A}{2}e^{j\omega t} + \frac{A}{2}e^{-j\omega t} \quad ; \quad A\sin(\omega t) = \frac{A}{2j}e^{j\omega t} - \frac{A}{2j}e^{-j\omega t} \quad . \quad \textbf{(1.8. a-b)}$$

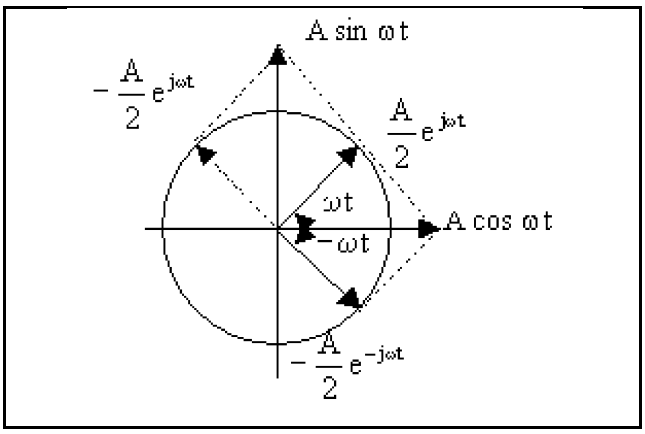


Fig. 1.7. Reprezentarea semnalelor Acos(ωt) şi Asin(ωt) ca vectori rotitori

Relaţia (1.8.a) poate fi interpretată ca reprezentând sSemnalul $x_R(t)$ este reprezentat în figura 1.8.a pentru $\sigma < 0$ şi în figura 1.8.buma a doi vectori, de modul A/2, ce se rotesc uniform, cu vitezele unghiulare ω respectiv -ω, aşa cum se arată în figura 1.7. Mărimea ω numită pulsaţie are unitatea de măsură rad/sec. Ea este legată de frecvenţa f şi perioada T prin :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad . \quad \textbf{(1.9)}$$

Vectorul rotitor în sens antitrigonometric, $(A/2)\ e^{-j\omega t}$ din figura 1.7. se spune că are "frecvenţa" negativă. Introducerea termenului al doilea din relaţiile (1.8) s-a făcut datorită comodităţii de calcul pe care o oferă exponenţialele, a căror formă se reproduce prin integrare sau derivare, spre deosebire de funcţiile trigonometrice care îşi schimbă numele în urma operaţii lor amintite. Vom reaminti că frecvenţa f, măsurată în $[s^{-1}]$ sau [Hz] reprezintă numărul de cicluri complete în unitatea de timp pe care le efectuează un semnal periodic în perioada T.

$$f = \frac{1}{T} \quad \textbf{(1.10)}$$

Pentru **ω = 0** relaţia (1.4) devine:

$$x(t) = Ae^{\sigma t} \quad , \quad \textbf{(1.11)}$$

un semnal real. Dacă **ω ≠ 0** şi **σ ≠ 0** , din (1.4) se obţin părţile reală şi imaginară:

$$x_R(t) = Ae^{\sigma t}\cos(\omega t) \quad , \quad x_I(t) = Ae^{\sigma t}\sin(\omega t) \quad . \quad \textbf{(1.12.a-b)}$$

Semnalul $x_R(t)$ este reprezentat în figura 1.8.a pentru $\sigma < 0$ şi în figura 1.8.b

pentru $\sigma > 0$. În ambele cazuri avem o oscilaţie neperiodicã, ($x_R(t) \neq x_R(t+T)$) cu amplitudinea variabilă. Evident, semnalul nu este periodic deoarece . Numai dacă $\sigma = 0$ oscilaţia este de amplitudine constantă şi satisface condiţia de periodicitate.

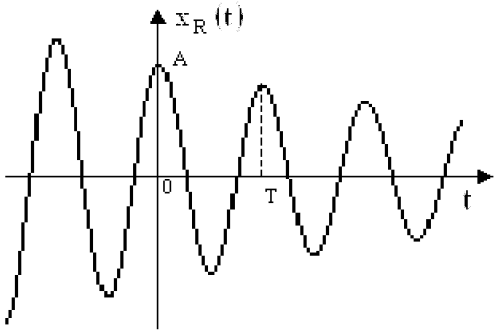


Fig. 1.8 a Semnalul $x_R(t)$ pentru $\sigma<0$, cosinusul atenuat exponenţial.

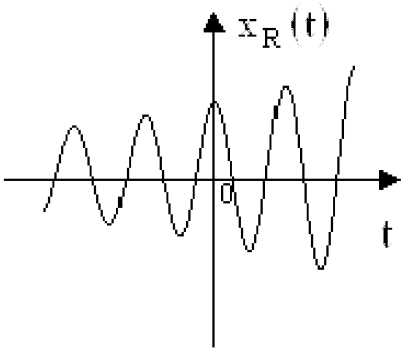


Fig. 1.8 b Semnalul $x_R(t)$ pentru $\sigma>0$, cosinusul crescător exponenţial.

ii) **<u>Semnale exponenţiale cu exponent complex şi frecvenţe în relaţie armonică</u>**

Un caz interesant îl reprezintă exponenţialele de forma :

$$x_k(t) = A_k e^{jk\omega_o t} \quad , \quad k \in Z-\{0\} \quad , \tag{1.13}$$

perioadele şi frecvenţele lor fiind:

$$T_k = \frac{1}{|k|} \cdot \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{T_o}{|k|} \quad ; \quad T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} \tag{1.14}$$

$$\omega_k = k\omega_o \quad . \tag{1.15}$$

Pentru **<u>k = 0</u>** s-ar fi obţinut un semnal constant (de perioadă infinită). Rapoartele a două frecvenţe oarecare sunt:

$$\frac{\omega_n}{\omega_m} = \frac{n\,\omega_o}{m\,\omega_o} = \frac{n}{m} \in Q \quad . \tag{1.16}$$

Perioada comună tuturor acestor exponenţiale este T_o. Frecvenţa ω_o se numeşte "fundamentală", iar frecvenţele $\omega_k = k\,\omega_o$ armonice.

Dacă luăm **k = 0** , $x_0(t) = A_0$. Se spune că semnalul de frecvenţă nulă este componenta continuă.Se poate observa uşor că exponenţialele :

$$\{ x_k(t) = e^{jk\omega_o t} \mid k \in Z \} \quad ,$$

de perioadă T_o satisfac condiţia:

$$\int_0^{T_o} x_k(t) x_l^*(t)\, dt = \int_0^{T_o} e^{j(k-l)\omega_o t} dt = \frac{e^{j(k-l)2\pi}}{j(k-l)\omega_o}\Big|_0^{\infty} = \frac{e^{j(k-l)2\pi} - 1}{(k-l)\omega_o} = 0 \quad ,$$

dacă **k ≠ l**. Dacă însă **k=l** rezultă:

$$\int_0^{T_o} x_k(t) x_k^*(t) dt = \int_0^{T_o} |x_k(t)|^2 dt = \int_0^{T_o} dt = T_o \quad .$$

Ambele cazuri se sintetizează în :

$$\int_0^{T_o} x_k(t) x_l^*(t)\, dt = \begin{cases} 0 & , \ k \neq l \\ T_o & , \ k = l \end{cases} \quad , \qquad \textbf{(1.17)}$$

care este tocmai condiţia de ortogonalitate a elementelor mulţimii de exponenţiale. Suma unor exponenţiale complexe având frecvenţele în relaţie armonică:

$$y(t) = \sum_k A_k\, e^{jk\omega_o t} \qquad \textbf{(1.18)}$$

este un semnal periodic de perioadă T_o .

iii) **Semnale exponenţiale cu exponent complex şi frecvenţe ce nu sunt în relaţie armonică**

Şi astfel de semnale se întâlnesc în practică. Fie semnalele :

$$x_k(t) = A_k\, e^{j\omega_k t} \qquad \textbf{(1.19)}$$

cu observaţia că $\omega_n/\omega_m \notin Q$. Perioadele exponenţialelor sunt $T_k = (2\pi)/\omega_k$. Însumând astfel de exponenţiale se obţin aşa numitele semnale cvasiperiodice. Ele nu au o perioadă, dar fiecare componentă în parte este periodică. Semnalul

cvasiperiodic:

$$y(t) = \sum_k A_k \, e^{j\omega_k t} \qquad \textbf{(1.20)}$$

are o comportare ce seamănă mai curând cu cea a unui semnal aleator. În figura 1.9. se arată coeficientul părţii imaginare a sumei a trei exponenţiale complexe de tip (1.19) având $A_1 = A_2 = A_3$ şi $\omega_2=\omega_1/\sqrt{3}$, $\omega_3 = \omega_1/\sqrt{5}$.

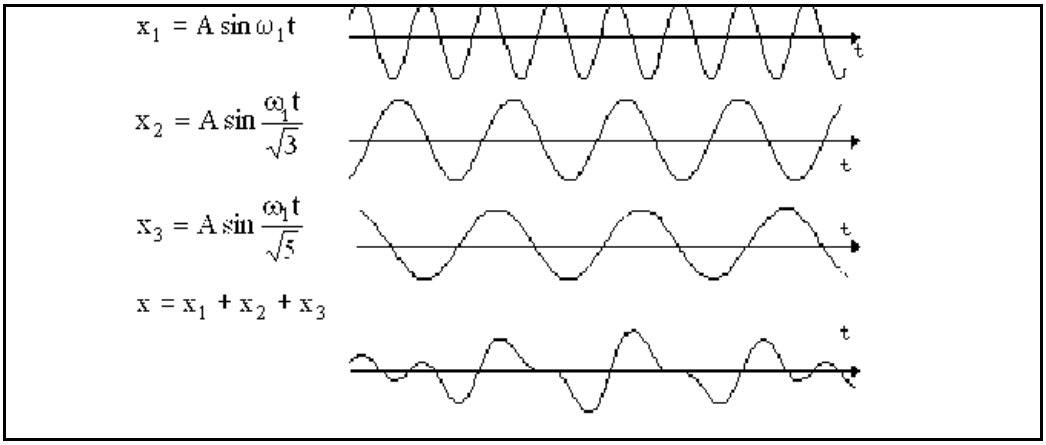


Fig. 1.9 Rezultatul însumării a trei sinusoide ce nu au frecvenţele în relaţie armonică. Suma are o variaţie în timp aparent aleatoare.

iv) **Semnalul treaptă unitară.**

Este unul dintre semnalele cele mai importante. Formele de semnal fizic ce pot fi practic generate se apropie mult de modelul matematic al treptei unitare, a cărei definiţie este:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 \;, & t \geq 0 \\ 0 \;, & t < 0 \end{cases} \;. \qquad \textbf{(1.21)}$$

Semnalul treaptă unitate se notează uneori şi cu u(t). Semnalul treaptă unitară este prezentat în figura 1.10. Valoarea sa la t = 0 nu este de obicei specificată dar, după cum se va vedea, din punct de vedere practic aceasta nu are importanţă. În cele ce urmează vom considera că $\sigma(0) = 1$. Semnalul treaptă unitară poate fi generat în practică utilizând fie circuite de comutaţie cu tranzistoare fie un comutator cu mercur. În acest caz, timpul de tranziţie de la o stare la alta este de ordinul picosecundelor (10^{-12} sec). Acesta este motivul pentru care semnalul treaptă unitară este unul dintre semnalele folosite pentru testare în practica

inginerească. În mod evident semnalul nu poate rămâne de valoare 1 un timp infinit lung, dar acest lucru are o importanţă practică redusă deoarece poate fi făcut suficient de lung pentru a diminua corespunzător erorile pe care durata sa finită le-ar introduce.

v) **Semnalul rampă**

Integrând semnalul σ(t) se obţine semnalul rampă cu graficul din figura 1.11. Expresia sa este :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\, d\tau \quad . \qquad \textbf{(1.22)}$$

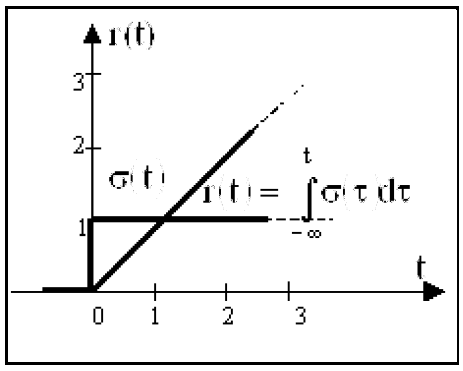


Fig. 1.11 Semnalul rampă.

Punând în (1.22) t < 0 , integrandul σ(t) este nul şi deci r(t) = 0 . Punând t ≥ 0 avem:

$$r(t) = \int_{0}^{t} 1\, d\tau = t \quad ,$$

şi în final :

$$r(t) = \begin{cases} t \ , & t \geq 0 \\ 0 \ , & t < 0 \end{cases} \quad . \qquad \textbf{(1.22')}$$

Ţinând seama de expresia (1.21) a lui σ(t), semnalul rampă mai poate fi pus şi sub forma :

$$r(t) = t\,\sigma(t) \quad . \qquad \textbf{(1.23)}$$

Şi semnalul rampă poate fi generat uşor, cel puţin până la limita superioară a tensiunilor şi curenţilor ce sunt admişi de circuitele generatoare. Acest semnal este utilizat în testări, ca şi semnalul treaptă unitară.

vi) **Impulsul unitar (tratarea euristică)**

Se pune întrebarea dacă semnalul treaptă poate fi sau nu derivat ? Definim şirul de funcţii :

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 \ , \ t \geq \dfrac{\Delta}{n} \\ \dfrac{nt}{\Delta} \ , \ 0 < t < \dfrac{\Delta}{n} \\ 0 \ , \ t \leq 0 \end{cases} \ , \qquad \textbf{(1.24)}$$

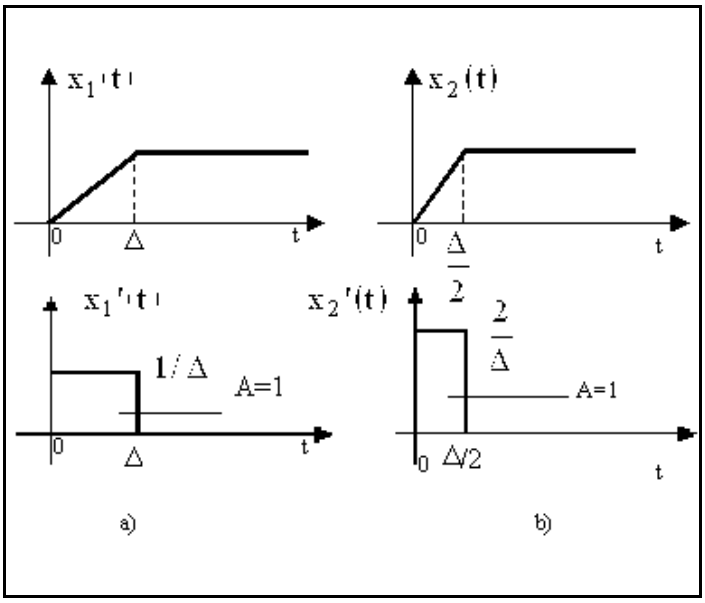


Fig. 1.12 Derivarea funcţiilor $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ conduce la impulsurile de arie unitară A = 1 şi durată Δ respectiv Δ/2 .

indexat după $n \in \mathbb{N}^*$. În figura 1.12 sunt arătate două din funcţiile şirului, $x_1(t)$ şi $x_2(t)$. După cum se poate vedea, pe măsură ce n creşte, Δ/n tinde spre zero şi se poate admite că şirul de funcţii tinde ca formă spre treapta unitară, adică :

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = \sigma(t) \ . \qquad \textbf{(1.25)}$$

Dar funcţiile $x_n(t)$ sunt derivabile, cu excepţia punctelor t = 0 şi t = Δ/n . Avem:

$$x_n'(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{\Delta} \ , \ 0 < t < \dfrac{\Delta}{n} \\ 0 \ , \ t \in (-\infty, 0) \cup (\dfrac{\Delta}{n}, \infty) \end{cases} \qquad \textbf{(1.26)}$$

unde $x_n'(t)$ sunt impulsuri de arie unitară, după cum rezultă şi din figura 1.12:

$$A = \int_{-\infty} x_n'(t)\,dt = \frac{n}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{n} = 1 \ , \ \forall \ n \in N^* \ . \qquad \textbf{(1.27)}$$

Trecând la limită pentru şirul derivatelor $x_n'(t)$ obţinem impulsuri cu baza tot mai redusă şi înălţimea tot mai mare, dar care îşi conservă aria unitară. La limită, suportul lui lim $x_n'(t)$ se reduce la punctul t = 0 , şi ea devine infinită ca "mărime", păstrându-şi însă, conform relaţiei (1.27), aria unitară. Vom scrie simbolic :

$$\delta(t) = \lim_{n \to \infty} x_n'(t) \quad , \tag{1.28}$$

şi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \quad . \tag{1.29}$$

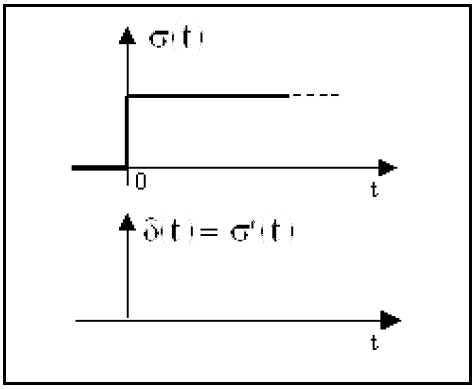


Fig. 1.13. Distribuţia Dirac ca derivată a treptei unitare.

Evident δ(t), numită în mod abuziv "**<u>funcţia lui Dirac</u>**", nu satisface definiţia funcţiei şi deci nu este o funcţie. Nici integrala (1.29) nu are sens. Deşi greşită, utilizarea relaţiei (1.29) conduce în general la rezultate corecte. Numai teoria distribuţiilor permite definirea corectă a lui δ(t), noţiune denumită "**<u>distribuţia Dirac</u>**" sau "**<u>impulsul Dirac</u>**" sau chiar "**<u>impulsul unitar</u>**". În mod formal vom accepta să spunem că derivata treptei unitare este impulsul unitar (vezi figura 1.13):

$$\sigma'(t) = \delta(t) \tag{1.30}$$

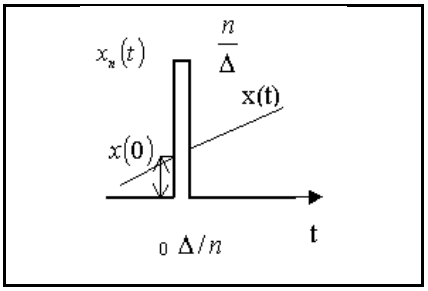


Fig. 1.14 Evidenţierea proprietăţii de "filtrare" a distribuţiei δ(t).

Formal δ(t) , definit anterior, poate fi integrat:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \quad . \tag{1.31}$$

Pentru t < 0 integrala este evident nulă. Pentru t>0 integrala (1.31) devine egală cu unu, conform relaţiei (1.29). Se poate spune, deci, că x(t) = σ(t) , sau că:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \sigma(t) \quad , \tag{1.32}$$

relaţie valabilă numai formal, integrala neavând de fapt sens. Distribuţia Dirac satisface relaţia formală :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x(t)\,dt = x(0) \quad . \qquad \textbf{(1.33)}$$

Conform cu figura 1.14 se poate scrie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x_n'(t)\,dt = \int_{0}^{\frac{\Delta}{n}} x(t)\cdot\frac{n}{\Delta}\,dt \quad ,$$

$x_n'(t)$ fiind şirul (1.26). Deoarece Δ/n tinde spre zero, $x(t) \cong x_0(t)$, în intervalul de integrare $(0 , \Delta/n)$, astfel că:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x_n'(t)\,dt \cong \frac{n}{\Delta}x(0)\int_{0}^{\frac{\Delta}{n}} dt = x(0) \quad .$$

Trecând la limită pentru $n \longrightarrow \infty$, şi ţinând seama de relaţia (1.28) obţinem formal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\lim_{n\to\infty} x_n'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0) \quad .$$

Restrângând intervalul de integrare la $(-\varepsilon , \varepsilon)$, relaţia se păstrează în mod evident, astfel că (1.33), cunoscută şi sub denumirea de "proprietatea de filtrare" a distribuţiei Dirac, este în mod formal demonstrată.

1.1.3 Exemple de semnale definite în timp discret

Semnalele definite în timp discret se notează în mod uzual cu x[n], x(n), x_n sau chiar $x(nT_e)$. Vom prefera notaţia cu paranteze drepte pentru argument, deoarece ea subliniază caracterul discret al timpului.

i) **Semnalul exponenţial**

Fie semnalul din relaţia (1.3) definit în timp continuu de forma $x(t) = Ae^{st}$, din care se prelevează eşantioane la momentele de timp $t = nT_e$. Rezultă:

$$x(nT_e) = Ae^{\sigma T_e n}e^{j\omega T_e n} \quad , \qquad \textbf{(1.34)}$$

adică un semnal definit în timp discret x[n] cu valorile $x[n] = x(nT_e)$. Avem :

$$x[n] = Ae^{\sigma T_e n}\cos(\omega T_e n) + jAe^{\sigma T_e n}\sin(\omega T_e n) \quad ; \quad x[n] \in \mathbb{C} \quad . \qquad \textbf{(1.35)}$$

$$x[n] = Ae^{\sigma T_e n}\cos(\omega T_e n) + jAe^{\sigma T_e n}\sin(\omega T_e n) \;\; ; \;\; x[n] \in \mathbb{C} \;\; . \qquad \textbf{(1.35)}$$

În cazul $\underline{\sigma = 0}$ semnalul definit în timp discret devine:

$$x[n] = Ae^{j\omega T_e n} \;\; . \qquad \textbf{(1.36)}$$

Se notează:

$$\Omega = \omega T_e \;\; , \qquad \textbf{(1.37)}$$

Ω având dimensiunea de radiani, este un unghi. Se obişnuieşte ca Ω să fie denumită "frecvenţă în timp discret". Semnalul (1.36) devine:

$$x[n] = Ae^{j\Omega n} \;\; . \qquad \textbf{(1.38)}$$

El este periodic după Ω, având perioada 2π. Evident :

$$Ae^{j(\Omega+2\pi)n} = Ae^{j\Omega n}\, e^{j2\pi n} = Ae^{j\Omega n} \;\; ,$$

ceea ce demonstrează afirmaţia de mai înainte. În consecinţă, în studiul semnalului (1.38) este suficient să se considere $\Omega \in [0 , 2\pi)$ sau $\Omega \in [-\pi , \pi)$. Proprietatea de periodicitate după Ω deosebeşte esenţial exponenţiala complexă neatenuată definită în timp discret de exponenţiala complexă neatenuată definită în timp continuu care nu este periodică după ω. Nu există $\omega_1 , \omega_2 \in R$, $\omega_1 \neq \omega_2$, astfel încât $e^{j\omega_1 t} \equiv e^{j\omega_2 t}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ dar $e^{j(\Omega+2k\pi)n} \equiv e^{j\Omega n}$, $\forall\, \Omega \in \mathbb{R}$; $\forall\, n, k \in Z$. Revenind la exponenţiala complexă (1.38), pentru ca x[n] să fie periodică de perioadă N este necesar ca x[n+N] = x[n] , $\forall$ n ∈ Z sau, considerând $\Omega = \Omega_o$ fixat:

$$Ae^{j\Omega_o(n+N)} = Ae^{j\Omega_o n}\cdot e^{j\Omega_o N} = Ae^{j\Omega_o n} \;\; ,$$

ceea ce impune $\Omega_o N = 2\pi m$, m ∈ Z sau :

$$\frac{\Omega_o}{2\pi} = \frac{m}{N} \in Q \;\; . \qquad \textbf{(1.39)}$$

Deoarece $\pi \neq Q$ rezultă că numai frecvenţe Ω_o iraţionale pot conduce la periodicităţi după variabila independentă n. Perioada după n este, prin urmare:

$$N = m\frac{2\pi}{\Omega_o} \quad , \quad n \in Z \quad , \tag{1.40}$$

şi asemănător cu $\omega = 2\pi/T$ se defineşte frecvenţa prin:

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega_o}{m} \quad . \tag{1.41}$$

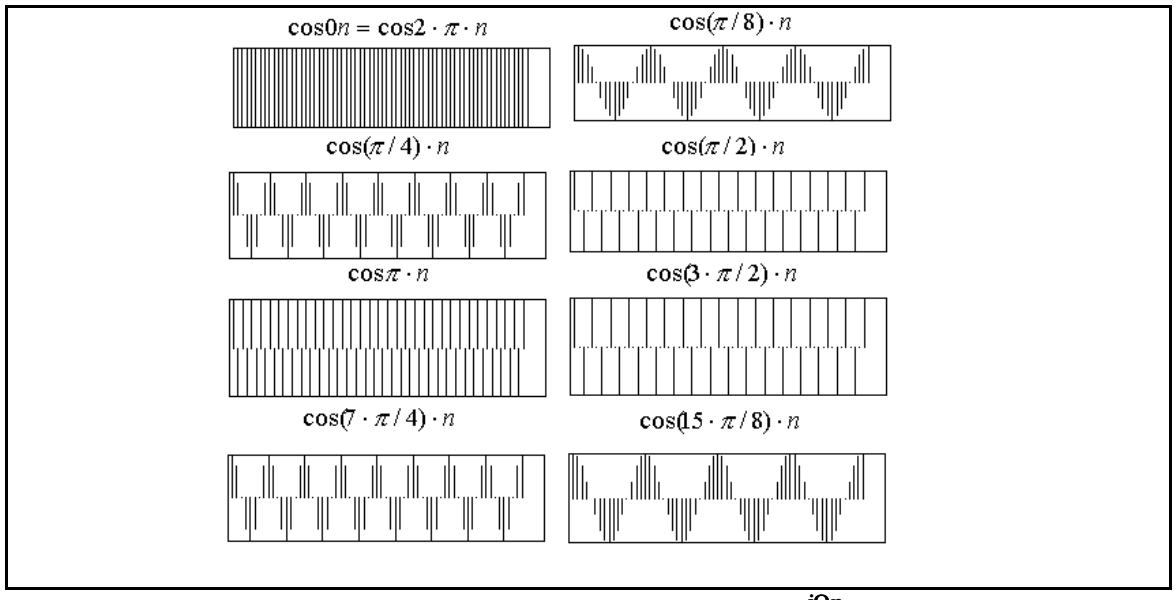


Fig. 1.15 Semnalul $x_R[n]=\cos\Omega n=\mathrm{Re}\{e^{j\Omega n}\}$ pentru $\Omega \in \{0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 7\pi/4, 15\pi/8, 2\pi\}$.

Pentru **$\sigma = 0$** relaţia (1.35) conduce la :

$$x[n] = A\cos(\Omega n) + jA\sin(\Omega n) \quad , \tag{1.42}$$

şi deci :

$$\begin{aligned} x_R[n] &= A\cos(\Omega n) = Re\{Ae^{j\Omega n}\} \\ x_I[n] &= A\sin(\Omega n) = Im\{Ae^{j\Omega n}\} \quad . \end{aligned} \tag{1.43 a-b}$$

În figura 1.15 se pot vedea diferite forme de semnale $x_R[n]$, periodice după n,

pentru $\Omega \in \{0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 7\pi/4, 15\pi/8, 2\pi\}$. Se observă că pentru $\Omega=0$, şi $\Omega=2\pi$ nu apar variaţii ale mărimii semnalului la modificarea valorii variabilei n, astfel încât semnalul în cauză este similar unei constante în timp continuu, constantă interpretată ca şi componentă continuă. Pe măsură ce Ω creşte spre π, variaţia după n a semnalului devine tot mai rapidă. La $\Omega = \pi$, $x_R[n]=\cos(\pi n)=(-1)^n$ ceea ce corespunde celei mai rapide schimbări posibile a semnalului în funcţie de n. Se observă şi faptul că pentru o valoare particulară $\Omega_o \in [0 , \pi]$ precum şi pentru valoarea $2\pi-\Omega_o$ se obţine aceeaşi viteză de variaţie după n. Se poate deci afirma, pe baza asocierii noţiunii de frecvenţă cu viteza de variaţie a semnalului că $\Omega = 0$ şi $\Omega = 2\pi$ corespund componentelor continue şi că frecvenţele Ω din jurul valorilor 0 respectiv 2π sunt "frecvenţele joase". Frecvenţele Ω din jurul valorii π sunt "frecvenţele înalte", cea mai mare frecvenţă fiind $\Omega=\pi$. Afirmaţiile făcute se referă la variaţia semnalului în timp discret în funcţie de n şi nu la variaţia în

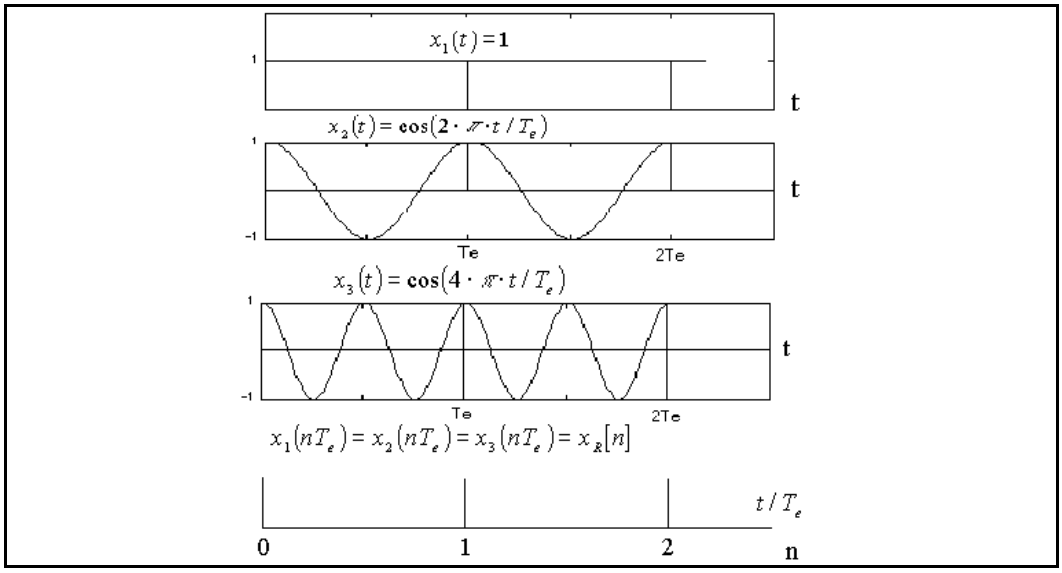


Fig. 1.16 Semnalul în timp discret $x_R[n] = 1$ este obţinut prin prelevarea eşantioanelor discrete din oricare din cele trei semnale.

timp continuu a semnalului x(t) prin a cărui eşantionare se obţine x[n]. În figura 1.16 se pot vedea trei semnale $x_1(t) = 1$, o componentă continuă, un semnal $x_2(t) = \cos(2\pi t/T_e)$ şi un al treilea $x_3(t) = \cos(4\pi t/T_e)$ care prin eşantionare la momentele de timp nT_e dau naştere aceluiaşi semnal în timp discret $x_R[n] = 1$, $\forall\ n \in Z$. Dacă în primul caz rezultatul era evident, în celelalte două cazuri rezultatul este surprinzător, relevând anumite inconveniente ale transformării prin eşantionare a semnalelor în timp continuu. Cele trei frecvenţe corespunzătoare semnalelor $x_1(t)$, $x_2(t)$ şi $x_3(t)$ şi anume ω_1, ω_2, ω_3 sunt 0, $2\pi/T_e$ respectiv $4\pi/T_e$ şi deci $\Omega_1=0$, Ω_2

$= (2\pi/T_e)T_e = 2\pi$, $\Omega_3 = (4\pi/T_e)T_e = 4\pi$ ceea ce concordă cu observaţia periodicităţii după Ω, cu perioada 2π a semnalului $x_R[n]$. Analizând figura 1.17 se observă

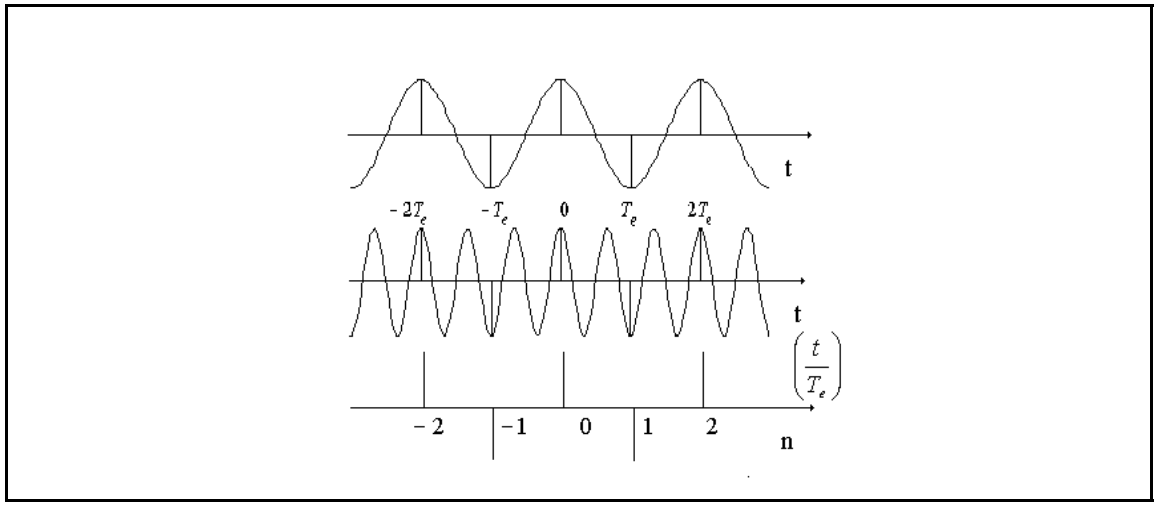


Fig. 1.17 Semnalul în timp discret $x_R[n]=\cos(\pi n)=(-1)^n$, obţinut prin eşantionarea semnalelor distincte $x_4(t)$ şi $x_5(t)$.

că eşantionând semnalele $x_4(t)$ şi $x_5(t)$ având frecvenţele $\omega_4 = \pi/T_e$ şi $\omega_5 = 3\pi/T_e$ (şi nu numai pe ele), se obţine acelaşi semnal $x_R[n] = \cos(\pi n) = (-1)^n$. Avem $\Omega_4 = (\pi/T_e)T_e = \pi$ şi $\Omega_5 = (3\pi/T_e)T_e = 3\pi$, $\Omega_5-\Omega_4=2\pi$. Credem că ultimele două

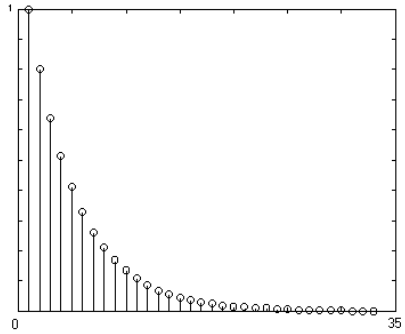


Fig. 1.18 a Semnalul a^n , $0 < a < 1$.

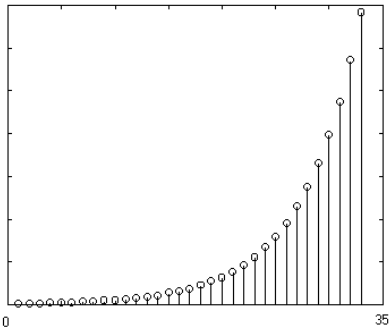


Fig. 1.18 b Semnalul a^n , $a > 1$.

exemple sunt suficiente pentru a ilustra faptul că nu există o relaţie simplă între viteza de variaţie după t şi viteza de variaţie după n. Semnale cu viteză de variaţie din ce în ce mai rapidă după t pot da naştere unor semnale cu aceeaşi viteză de variaţie după n. Eşantionarea este un proces ce are ca rezultat generarea unui semnal în timp discret, dar din forma sa de variaţie nu se poate, în general, preciza semnalul în timp continuu din care a fost obţinut.

Pentru $\Omega = \omega T_e = 2\pi m$ şi $\sigma \neq 0$, din (1.34) rezultă semnalul în timp discret:

$$x[n] = Ae^{\sigma T_e n} = Aa^n \quad ; \quad a \triangleq e^{\sigma T_e} \quad . \qquad \textbf{(1.44)}$$

Dacă $\sigma < 0$, se obţine $0 < a < 1$ iar dacă $\sigma > 0$, se obţine $a > 1$ rezultând semnalele din figurile 1.18 a respectiv 1.18 b (reprezentate pentru A=1), exponenţiale, descrescătoare sau crescătoare, dar care nu prezintă oscilaţii.

Dacă $\Omega \neq 2m\pi$ şi $\sigma \neq 0$ din relaţia 1.35 rezultă părţile reală şi imaginară ale semnalului x[n] :

$$x_R[n] = Ae^{\sigma n}\cos\Omega n = Aa^n\cos\Omega n \; ; \; x_I[n] = Aa^n\sin\Omega n \; . \qquad \textbf{(1.45.a-b)}$$

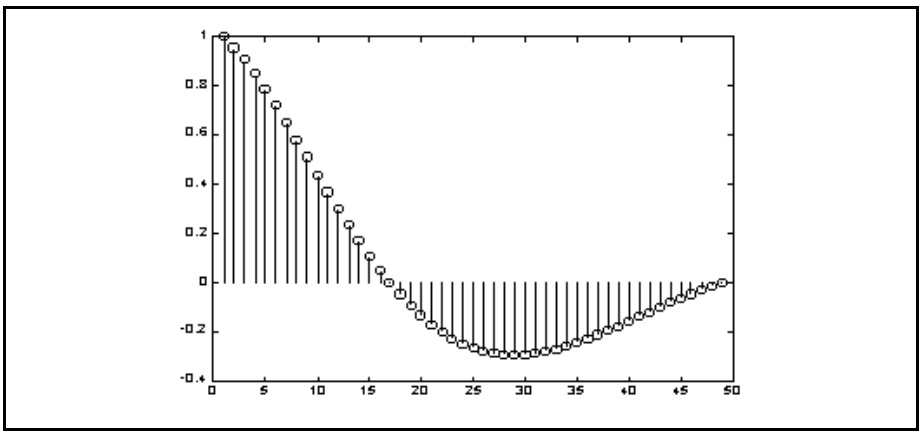


Fig. 1.19 Cosinusul discret atenuat exponenţial.

În figura 1.19 se poate vedea o formă de variaţie a semnalului $x_R[n]$ pentru A=1 şi $0 < a < 1$. El poate fi un semnal provenit din eşantionarea semnalului cosinusoidal atenuat exponenţial, definit în timp continuu, arătat în figura 1.8.a. Figura 1.20 dă variaţia cosinusoidei discrete descrescătoare exponenţial, corespunzător lui $a > 1$. Ea poate proveni din eşantionarea semnalului din figura 1.8.b.

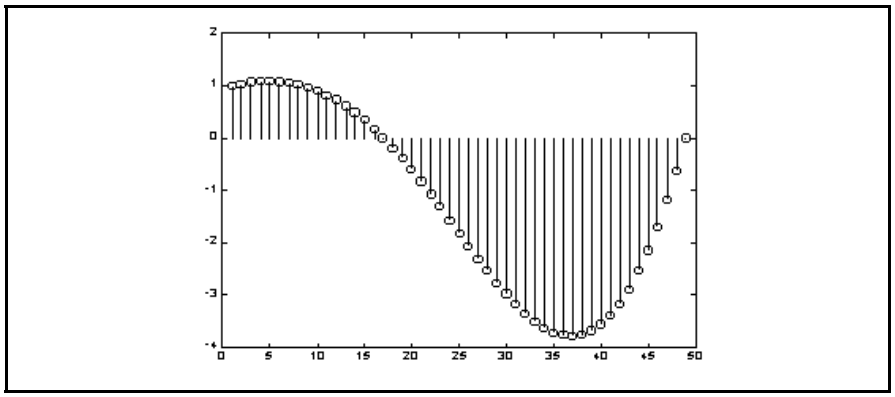


Fig. 1.20 Cosinusul discret crescător exponenţial.

În ambele cazuri deşi semnalul reprezentat este oscilant el nu este periodic.

ii. **Semnale exponenţiale cu exponent imaginar şi frecvenţe în relaţie armonică**

Se consideră semnalele de forma:

$$x_k[n] = A_k e^{jk\Omega_o n} = A_k e^{j\Omega_k n} \quad . \tag{1.46}$$

Frecvenţele lor sunt $\Omega_k = k\Omega_o$. Dacă $\Omega_o = 2\pi/N$ atunci perioada semnalelor $x_k[n]$ este:

$$N_k = \frac{2\pi}{\Omega_k} = \frac{2\pi}{k\Omega_o} = \frac{N}{k} \quad , \quad k \neq 0 \quad . \tag{1.47}$$

Perioada comună tuturor acestor semnale este N. Astfel de semnale se spune că sunt în relaţie armonică, fundamentala având frecvenţa Ω_o. Celelalte sunt armonicele având frecvenţele $k\Omega_o$. Semnalele $x_k[n]$ din mulţimea :

$$\left\{ x_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \;\middle|\; n \in Z \;,\; k = 0,1,2,\ldots N-1 \right\} \;, \tag{1.48}$$

în număr de N, satisfac condiţia :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_k[n] x_l^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-l)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1 - e^{jN\frac{2\pi}{N}(k-l)n}}{1 - e^{j(k-l)\frac{2\pi}{N}}} = 0 \;,$$

dacă **$k \neq l$** . Pentru cazul **$k = l$** avem :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_k[n] x_k^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N \quad ,$$

sau sintetic:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_k[n] x_l^*[n] = \begin{cases} 0 \;, & k \neq l \\ N \;, & k = l \end{cases} \;, \tag{1.49}$$

relaţie care arată că cele N semnale (1.48) formează o familie ortogonală. Suma unor exponenţiale complexe discrete neatenuate (1.48), de forma:

$$y[n] = \sum_k A_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad , \qquad \textbf{(1.50)}$$

este un semnal discret periodic, de perioadă N.

iii. **Semnalul discret treaptă unitară**

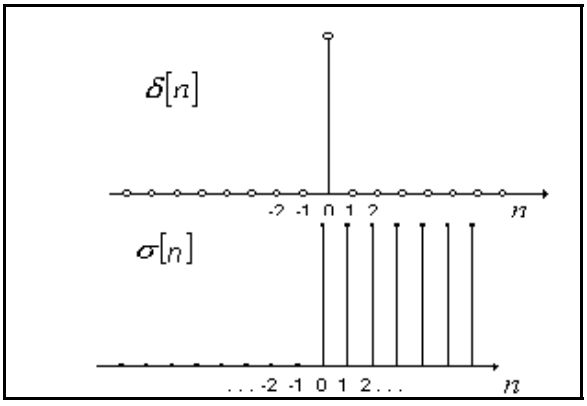


Fig. 1.21 Semnalul δ[n] şi semnalul treaptă unitară σ[n] .

Este prezentat în figura 1.21 şi are expresia :

$$\sigma[n] = \begin{cases} 1 , & n \geq 0 \\ 0 , & n < 0 \end{cases} . \qquad \textbf{(1.51)}$$

Se consideră că eşantionând semnalul treaptă unitară definit în timp continuu σ(t), se obţine semnalul treaptă unitară discret :

$$\sigma(nT_e) = \sigma[n] . \qquad \textbf{(1.52)}$$

iv. **Semnalul discret impuls unitar**

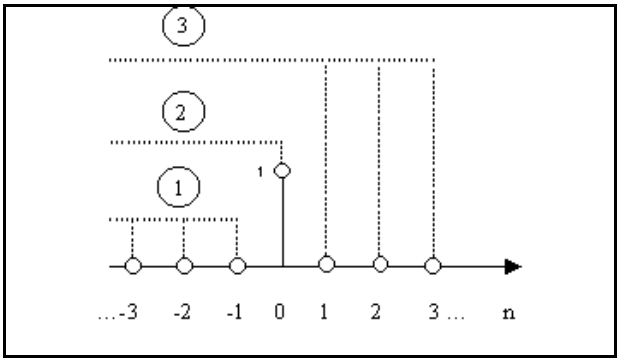


Fig. 1.22 Tipurile de intervale de însumare pentru relaţia (1.54).

Rolul distribuţiei Dirac δ(t) este jucat în timp discret de impulsul unitar:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 , & n = 0 \\ 0 , & n \neq 0 \end{cases} . \qquad \textbf{(1.53)}$$

Spre deosebire de δ(t), δ[n] este o funcţie obişnuită. Dacă semnalul δ(t) nu se poate genera tehnic, funcţia δ[n] poate fi generată. Ea este reprezentată în figura 1.21. Se poate verifica că:

$$\sigma[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \quad . \qquad (1.54)$$

Fie n < 0 . În intervalele de însumare de tipul marcat cu 1 în figura 1.22, toate valorile supuse însumării sunt nule şi deci pentru n < 0 :

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = 0 \quad .$$

Pentru n=0 - intervalul 2 de însumare din figura 1.22 - avem:

$$\sum_{k=-\infty}^{0} \delta[k] = 1$$

Şi pentru intervalele de însumare de tipul 3 tot o singură valoare este nenulă:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \begin{cases} 1 , & n \geq 0 \\ 0 , & n < 0 \end{cases} ,$$

ceea ce demonstrează relaţia (1.54) (se ţine seama de (1.51)). Dacă în (1.54) se face substituţia n ⟶ n-1 se obţine:

$$\sigma[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \delta[k] \quad . \qquad \textbf{(1.54')}$$

Scăzând din (1.54) pe (1.54') obţinem:

$$\sigma[n] - \sigma[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} \delta[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \delta[k] + \delta[n] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} \delta[k] ,$$

de unde rezultă în final că :

$$\delta[n] = \sigma[n] - \sigma[n-1] \quad . \qquad \textbf{(1.55)}$$

Relaţia (1.55) este echivalenta relaţiei (1.30), δ(t) = σ'(t) iar relaţia (1.54) este echivalentă relaţiei (1.32):

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = \sigma(t) \quad .$$

Având în vedere definiţia (1.53) pentru δ[n] , se poate verifica imediat că avem:

$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n] \quad . \qquad \textbf{(1.56)}$$

1.1.4 Transformări liniare ale variabilei timp

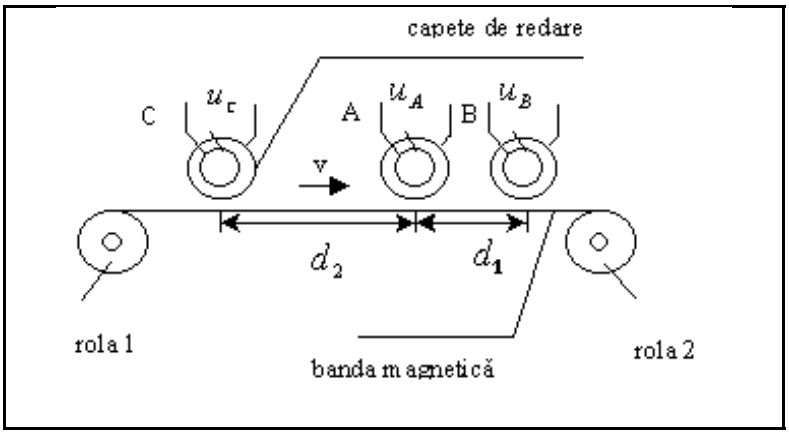


Fig. 1.23 Schema unei instalaţii de redare a înregistrărilor pe bandă magnetică, prevăzută cu trei capete de redare, decalate.

În multe cazuri semnalele definite în timp continuu sau în timp discret sunt supuse, în vederea prelucrării, unor transformări simple ce afectează timpul. Pentru precizarea ideilor, ne vom referi la o instalaţie ipotetică de redare a înregistrărilor pe bandă magnetică, instalaţie prevăzută cu trei capete de redare, A, B şi C aşa cum se arată în figura 1.23.

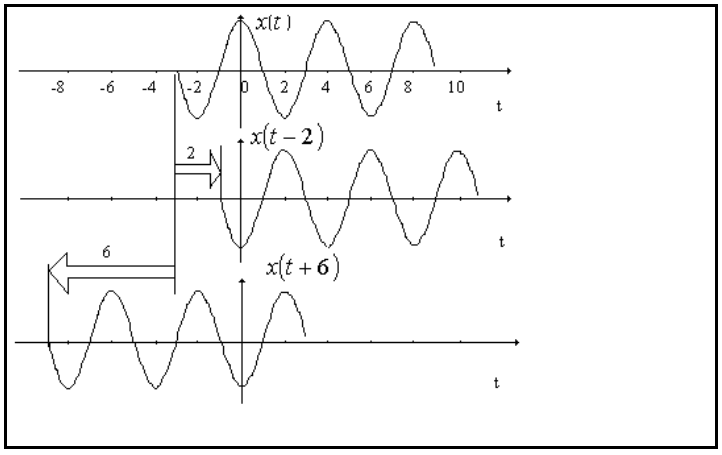


Fig. 1.24 Semnalul x(t) este întîrziat cu 2 unităţi de timp, dând astfel naştere semnalului x(t-2) şi anticipat cu 6 dând semnalul x(t+6).

Considerând că viteza liniară a benzii este v, dacă distanţele între capetele de redare sunt d_1 şi d_2 atunci timpul în care banda parcurge calea de la capul C la capul A este $t_2 = d_2/v$, iar timpul în care parcurge calea de la capul A la capul B este $t_1=d_1/v$. Tensiunea indusă în înfăşurarea capului A se notează cu x(t): $u_A(t)=x(t)$. Tensiunea indusă în înfăşurarea capului B este $u_B(t) = x(t-t_1)$, iar cea indusă în înfăşurarea capului C: $u_C(t) = x(t+t_2)$ (Se consideră capetele de redare identice). Evident, ca urmare a sensului de mişcare al benzii magnetice tensiunea $u_B(t)$ este versiunea retardată cu t_1 a tensiunii $u_A(t)$.

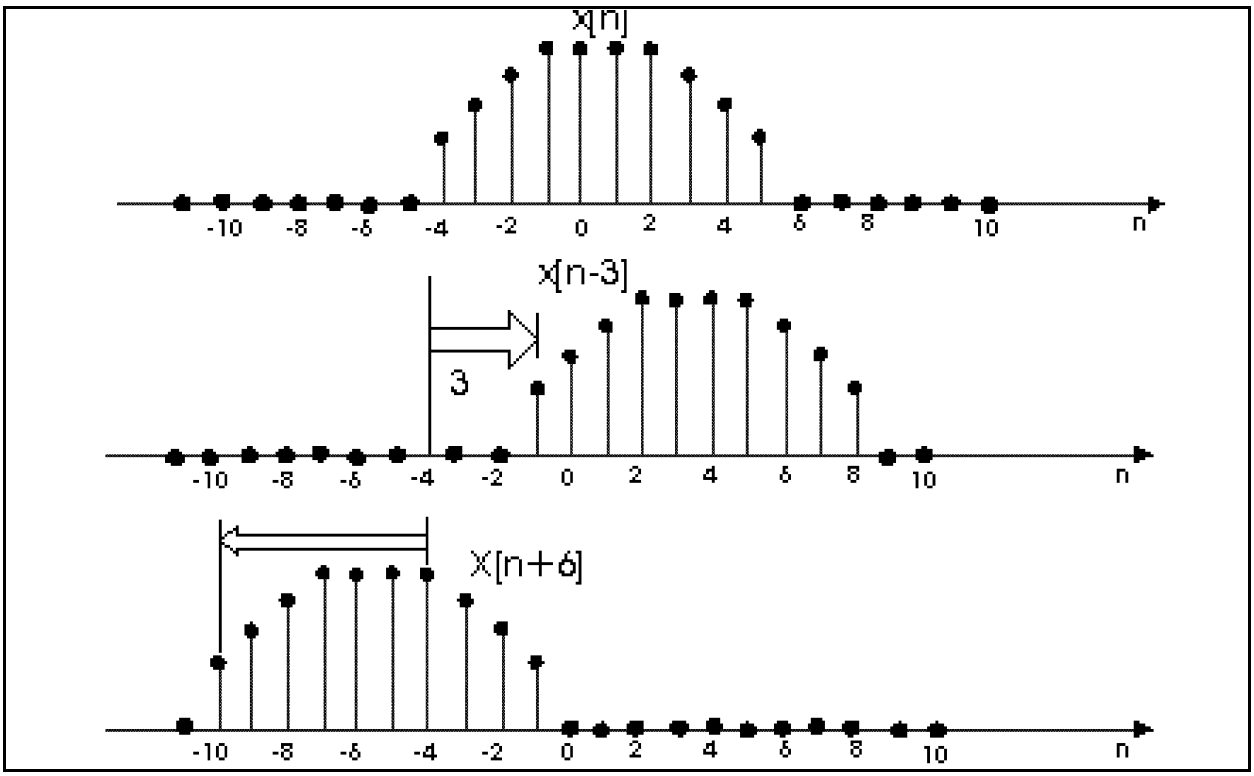


Fig. 1.25. Semnalul în timp discret x[n] este întârziat cu 3 unităţi de timp (x[n-3]) şi anticipat cu 6 unităţi (x[n+6]) .

În figura 1.24 se arată un semnal x(t) şi versiunea sa întârziată - sau translatată spre dreapta - cu t_1, $x(t-t_1)$ unde $t_1 > 0$ precum şi versiunea sa anticipată - sau translatată spre stânga - cu t_2 , $x(t+t_2)$, $t_2 > 0$.

Şi semnalele discrete x[n] pot fi supuse operaţiei de translatare aşa cum rezultă din figura 1.25. Semnalul $x[n-n_1]$, $n_1 \in N$, ($n_1 > 0$) este versiunea retardată (sau translatată spre dreapta) cu n_1 a semnalului x[n] . Semnalul $x[n+n_2]$, $n_2 \in N$ ($n_2>0$) este versiunea anticipată (translatată spre stânga) cu n_2 a semnalului x[n] . În cazul semnalelor discrete cuantizate translatările (deplasările) pot fi obţinute utilizând memorii numerice. În cazul semnalelor necuantizate se pot folosi registre de deplasare analogice cu memorare pe capacităţi (de exemplu dispozitive cu transfer de sarcină).

În cele mai multe cazuri practice se utilizează numai întârzierea semnalelor, anticiparea lor cerând existenţa unor înregistrări deci fiind imposibilă efectuarea unor prelucrări în timp real.

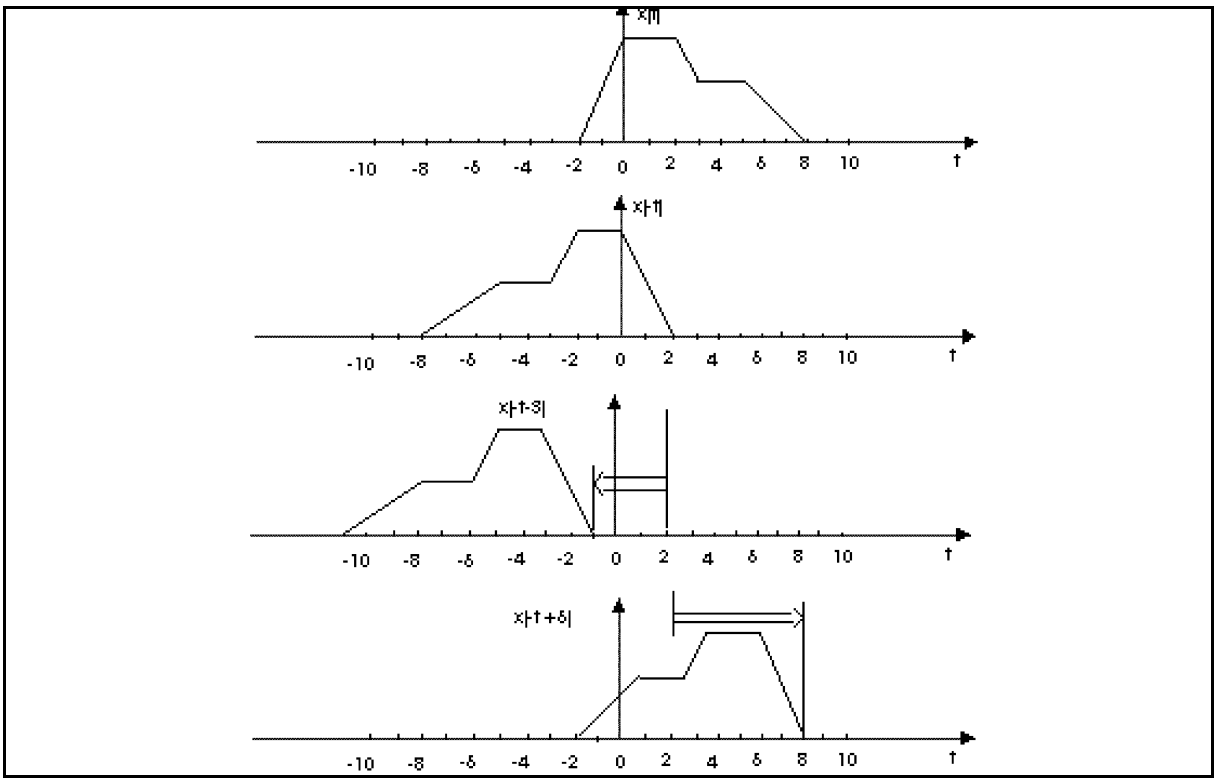


Fig. 1.26 Semnalul x(-t) este simetricul lui x(t) în raport cu axa verticală (reflectatul său). Semnalul reflectat poate fi deplasat la stânga şi la dreapta.

Şi semnalele discrete pot fi reflectate şi deplasate - figura 1.27. Semnalul x[-n] este reflectatul semnalului x[n] . Semnalul $x[-n-n_1]$, $n_1 \in N$ ($n_1 > 0$), este versiunea reflectată şi deplasată spre stânga cu n_1 iar $x[-n+n_2]$, $n_2 \in N$ ($n_2 > 0$) este versiunea reflectată şi deplasată spre dreapta cu n_2 a semnalului x[n] .

În transformările prezentate forma semnalului se păstrează. Să ne imaginăm acum că redăm un semnal x(t) înregistrat pe bandă, rulând banda cu o viteză v şi că semnalul durează 6 unităţi de timp - vezi figura 1.28. Dacă reluăm experienţa de redare cu o viteză mai mică, să zicem v/2 , redarea semnalului va dura evident 12 unităţi de timp. Dacă vom face cuvenitele corecţii în ceea ce priveşte nivelul de redare, vom obţine semnalul x(0,5t) , având derularea mai lentă decât a semnalului x(t) . Dublând acum viteza benzii, aducând-o deci la valoarea 2v , redarea semnalului va dura doar 3 unităţi de timp, şi făcând corecţiile de amplificare se poate spune că se redă semnalul x(2t) , cu derulare mai rapidă decât a semnalului x(t).

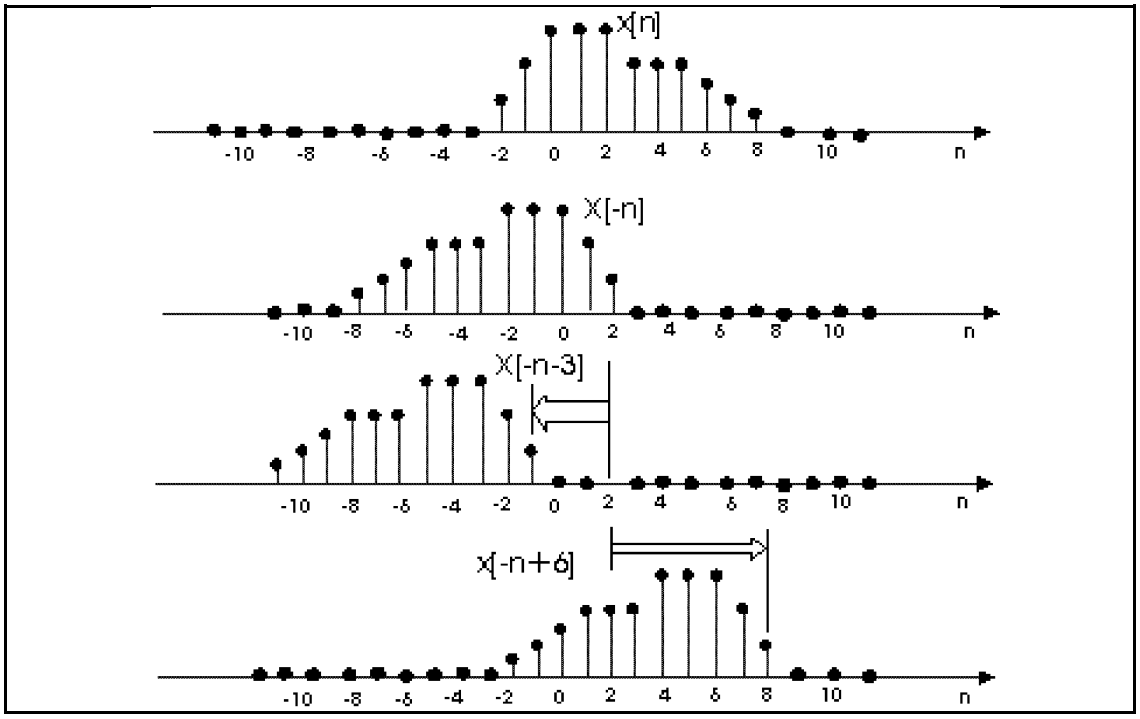


Fig. 1.27 Semnalul discret x[-n] este reflectatul semnalului x[n]. Semnalul reflectat poate fi deplasat spre stânga sau spre dreapta.

Fie, în general, x(t) un semnal de durată τ (sau conţinând o porţiune delimitată cu două marcaje decalate în timp cu τ) şi y(t) = x(at), unde a > 0 , a $\in \mathbb{R}$, transformatul său. Durata lui y(t) (sau timpul scurs între derularea celor două marcaje mai sus amintite) este θ ce satisface relaţia $a\theta = \tau$. Rezultă $\theta = \tau/a$ şi dacă $0 < a < 1$ atunci $\theta > \tau$, semnalul y(t) având o derulare mai lentă decât x(t). Pentru cazul a>1 avem $\theta < \tau$, şi în consecinţă, y(t) se derulează mai rapid decât x(t).
Semnalele pot suferi transformări ale variabilei timp de forma $a(t-t_o)$. În figura 1.29 este prezentat un astfel de caz. Fie $z(t) = x(a(t-t_o))$, a > 0 , $t_o > 0$. Semnalul x(t) suferă mai întâi o deplasare spre dreapta cu t_o şi apoi o modificare a vitezei de derulare după cum $0 < a < 1$ sau a > 1 . Semnalul $w(t) = x(a(t+t_o))$, a > 0 , $t_o >$ 0 suferă mai întâi o deplasare spre stânga şi apoi modificarea conformă valorii lui a. În cazul semnalelor definite în timp discret (sau mai pe scurt discrete) modificarea scării timpului (care are doar valori întregi) nu este posibilă. Se introduce totuşi un gen de semnal în timp discret cu derulare mai lentă decât a semnalului x[n] conform relaţiei:

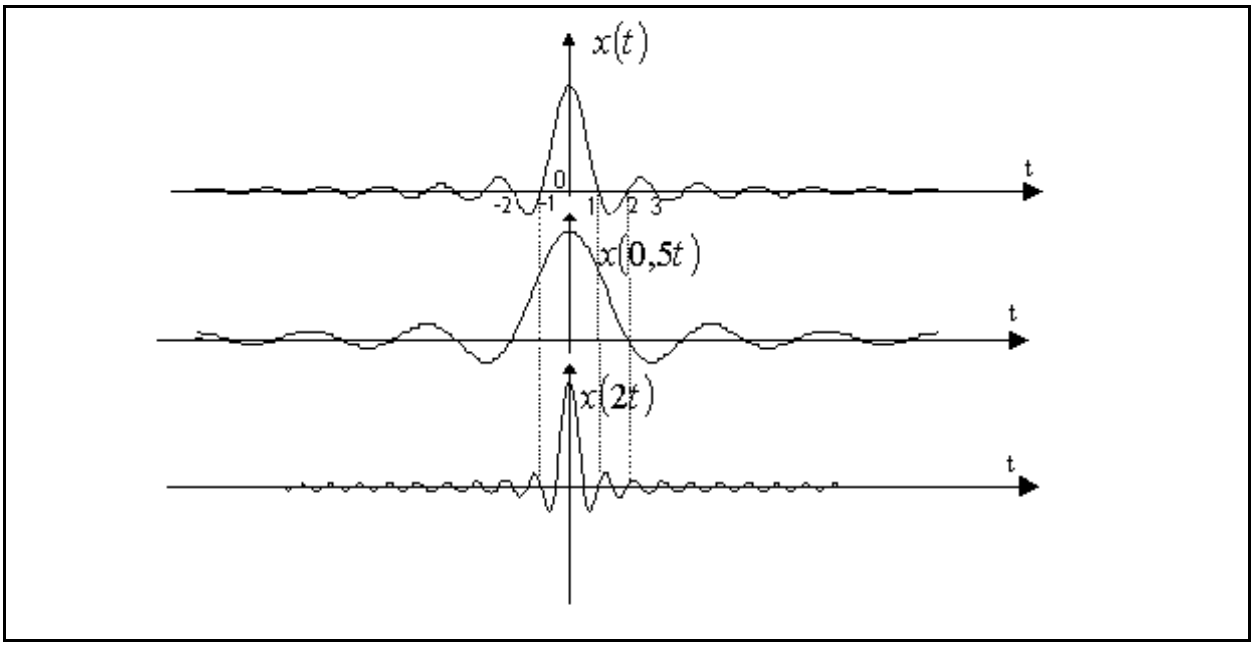


Fig. 1.28 Semnalul x(0,5t) este o versiune cu derulare mai înceată a semnalului x(t). Semnalul x(2t) este o versiune cu derulare mai rapidă a lui x(t).

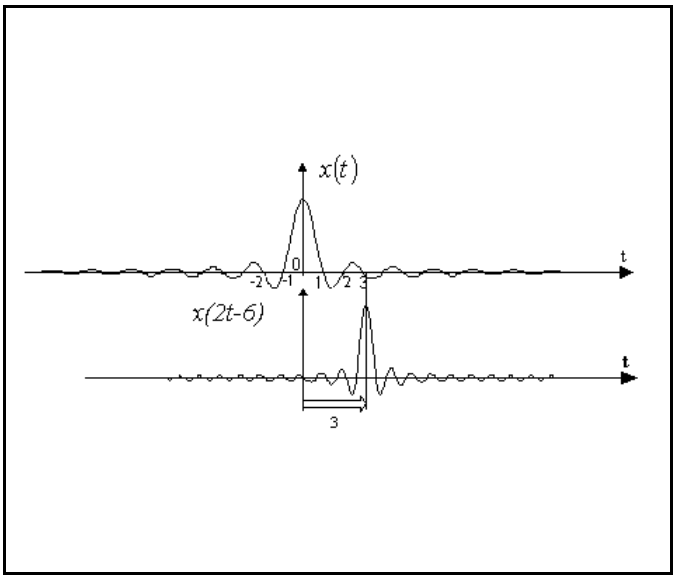


Fig. 1.29 Semnalul x((t-3)/0,5) este o versiune deplasată cu 3 şi cu derulare mai rapidă ca a lui x(t).

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}] & , \ daca \quad n \vdots k \\ 0 & , \ în \ rest \end{cases} \qquad \textbf{(1.57)}$$

În figura 1.30 se arată un semnal x[n] şi semnalul $x_{(2)}[n]$. Între două valori consecutive ale semnalului a fost introdusă o valoare nulă, marcată cu asterisc (*). Se poate vedea că semnalul $x_{(2)}[n]$ se derulează mai lent decât x[n] . Rămâne de văzut în ce măsură această modalitate de definire a lui $x_{(k)}[n]$ este asemănătoare cu a lui x(at) , a<1 .

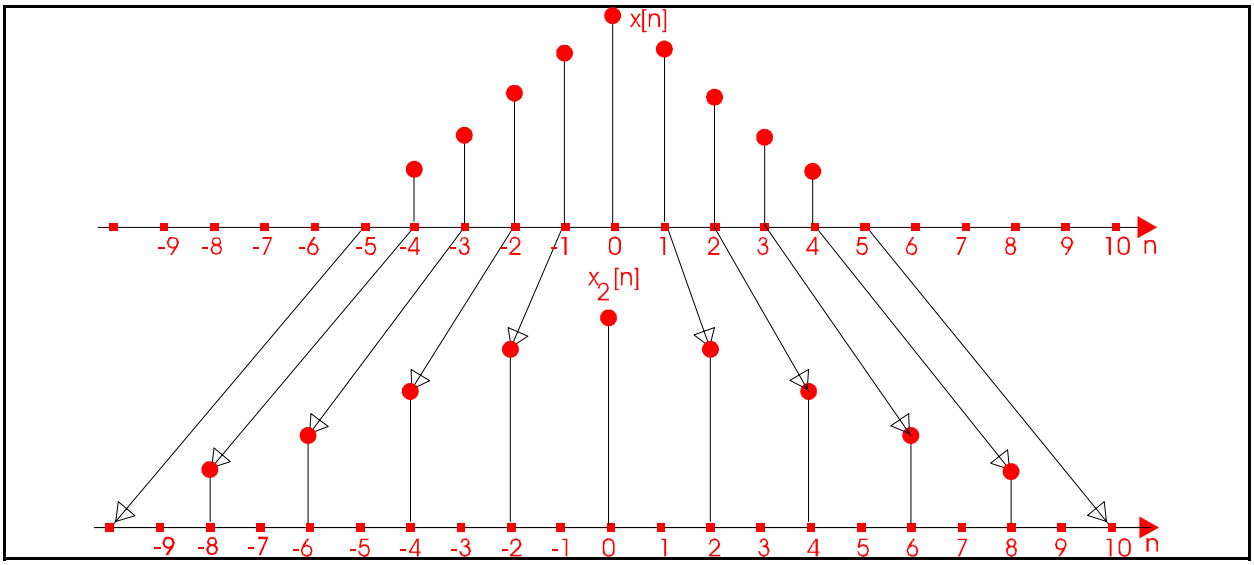


Fig. 1.30 $x_{(2)}[n]$ este o versiune "cu derulare mai înceată" a semnalului x[n].

1.1.5 Componenta pară şi componenta impară a unui semnal

Fie x(t) un semnal real. Se definesc:

$$x_p(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \quad ; \quad x_i(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2} \quad . \qquad \textbf{(1.58-59)}$$

Avem:

$$x_p(-t) = \frac{x(-t)+x(t)}{2} = x_p(t) \quad ; \quad x_i(-t) = \frac{x(-t)-x(t)}{2} = -x_i(t) \quad ,$$

şi deci $x_p(t)$ este un semnal par iar $x_i(t)$ un semnal impar. Fiind dat semnalul x(t), cele două semnale $x_p(t)$ şi $x_i(t)$ sunt complet definite. Ele permit reconstruirea semnalului iniţial. Însumând relaţiile (1.58) şi (1.59) găsim că:

$$x(t) = x_p(t)+x_i(t) \quad . \qquad \textbf{(1.60)}$$

şi deci $x_p(t)$ şi $x_i(t)$ sunt componentele pară şi respectiv impară ale semnalului. Este evident că întotdeauna $x_i(0) = 0$.În figura 1.31. se poate urmări modul de obţinere al componentelor pară şi impară ale unui semnal definit în timp continuu. Şi pentru semnalele discrete reale, x[n] , se pot defini componentele pară respectiv impară:

$$x_p[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2} \quad ; \quad x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} \quad . \qquad \textbf{(1.61-62)}$$

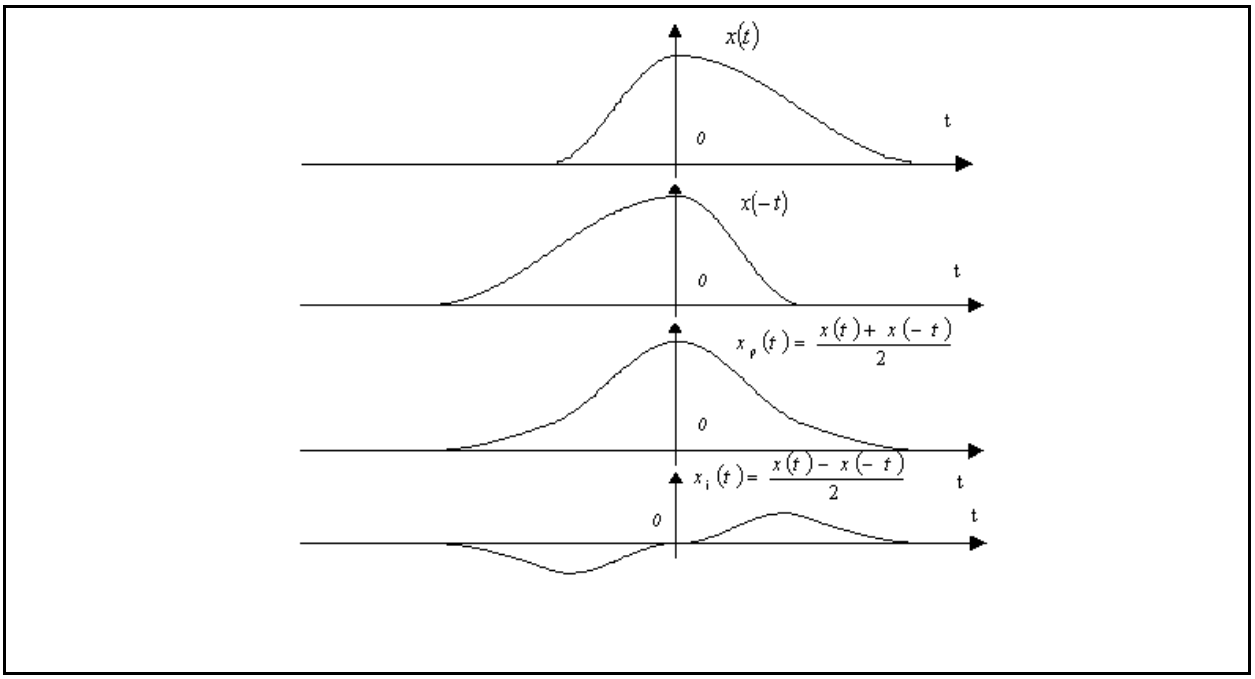


Fig. 1.31 Componenta pară $x_p(t)$ şi componenta impară $x_i(t)$ a semnalului x(t).

Se verifică uşor că $x_p[-n] = x_p[n]$ şi că $x_i[-n] = -x_i[n]$. Prin însumare rezultă :

$$x[n] = x_p[n] + x_i[n] \quad . \qquad \textbf{(1.63)}$$

Figura 1.32 prezintă modul de construire al celor două componente, pentru un semnal x[n] dat. Şi în cazul discret avem întotdeauna $x_i[0] = 0$. În cazul semnalelor x(t) complexe, se definesc componentele conjugat simetrică $x_p(t)$ şi conjugat antisimetrică $x_i(t)$ prin:

$$x_p(t) = \frac{x(t)+x^*(-t)}{2} \quad , \quad x_i(t) = \frac{x(t)-x^*(-t)}{2} \quad . \qquad \textbf{(1.64-65)}$$

Avem:

$$x_p(-t) = \frac{x(-t)+x^*(t)}{2} = \left[\frac{x(t)+x^*(-t)}{2}\right]^* = x_p^*(t)$$
$$x_i(-t) = \frac{x(-t)-x^*(t)}{2} = -\left[\frac{x(t)-x^*(-t)}{2}\right]^* = -x_i^*(-t) \quad ,$$

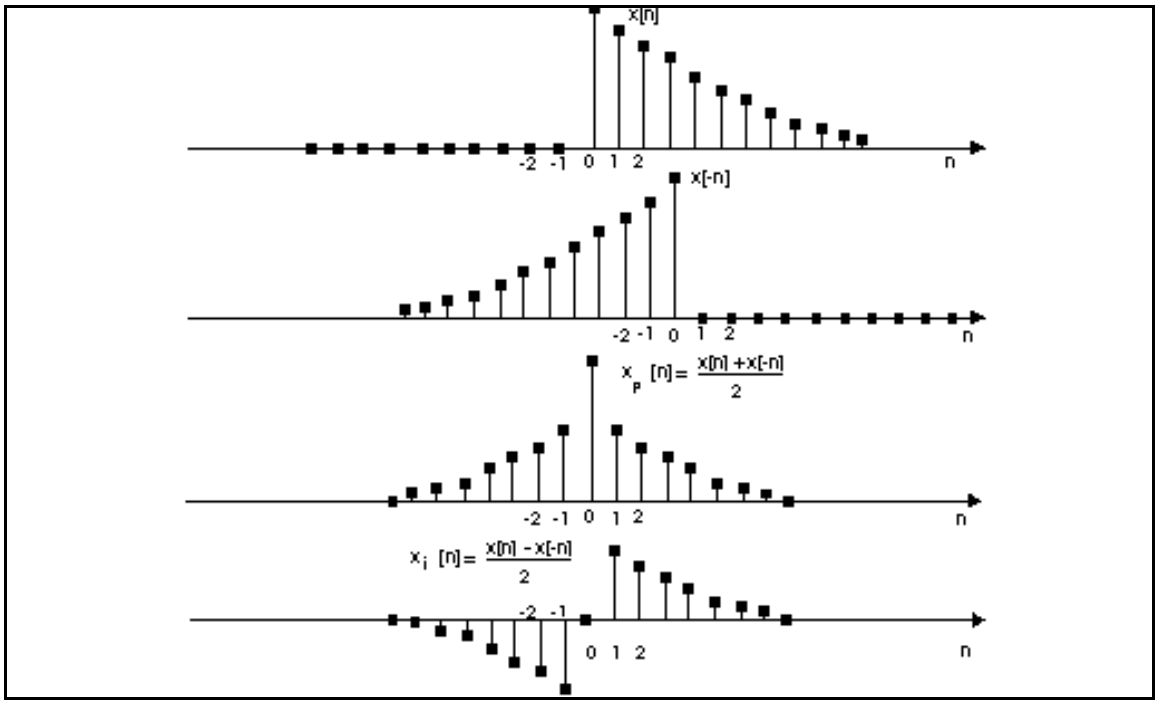


Fig. 1.32 Componenta pară $x_p[n]$ şi componenta impară $x_i[n]$ a semnalului discret x[n].

relaţii care justifică denumirile celor două componente. Relaţii similare pot fi scrise şi pentru semnalele în timp discret.

1.1.6 Energia şi puterea semnalelor

Dacă u(t) este tensiunea aplicată la bornele unui rezistor de rezistenţă R, energia disipată în rezistor se calculează cu relaţia:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{R} dt \quad , \qquad \textbf{(1.66)}$$

În multe cazuri şi mai ales atunci când suntem puşi în situaţia de a detecta

prezenţa unuia dintre două semnale posibile $u_1(t)$ şi $u_2(t)$ energia dezvoltată în rezistorul R nu este prea semnificativă. Este mai important raportul lor:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} u_1^2(t)\,dt}{\frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} u_2^2(t)\,dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u_1^2(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} u_2^2(t)\,dt} \quad ,$$

în care R nu apare. Se obişnuieşte de aceea să se definească energia semnalului ca fiind acea valoare a ei care se disipă în rezistenţa unitară (R =1 Ω). În consecinţă relaţia (1.66) ia forma:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\,dt < \infty \qquad \textbf{(1.67)}$$

Dacă semnalul care se ia în considerare x(t) este complex, relaţia 1.67 devine :

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \qquad \textbf{(1.68)}$$

Pentru semnale discrete x[n], eventual complexe, energia (disipată în rezistenţa unitară) se exprimă prin:

$$W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \qquad \textbf{(1.69)}$$

Teoretic există şi semnale de energie infinită. Spre exemplu, orice semnal periodic are conform relaţiilor (1.68), (1.69), energie infinită. Semnalele de energie finită definite în timp continuu sunt modelate de funcţii cu pătratul modulului integrabil, deci ele aparţin clasei de funcţii notată L^2. Semnalele de energie finită definite în timp discret sunt modelate de funcţii cu pătratul modulului sumabil, deci ele aparţin clasei de funcţii notată l^2. Un indicator important al comportării unui semnal îl constituie şi fluxul mediu de energie, raportat la durata semnalului (sau debitul mediu de energie), numit şi puterea medie a semnalului, P. Pentru un semnal cu întindere infinită în timp avem:

$$\mathbf{P} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \quad ; \quad \mathbf{P} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \quad . \qquad \textbf{(1.70-71)}$$

Semnalele de energie finită cu întindere infinită în timp au puterea medie nulă. Semnalele cu întindere infinită în timp ce au puterea medie nenulă au energie infinită. În practică energia semnalelor este întotdeauna finită. Funcţiile periodice, ce se utilizează pentru a modela anumite semnale au energia infinită dar puterea medie pe o perioadă finită, şi ea constituie criteriul energetic de echivalare. Pentru semnalele periodice, modelate prin funcţii periodice, puterea medie este :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{T_o}\int_{T_o} |x(t)|^2 dt \quad ; \quad \mathbf{P} = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} |x[n]|^2 \quad . \qquad \textbf{(1.72-73)}$$

Notaţia $n \in <N>$ semnifică faptul că n ia N valori consecutive, fără ca valoarea de început să fie precizată. Semnalele întâlnite în practică au durată finită. Spre exemplu x(t) durează de la de la momentul t_1 pînă la momentul t_2. Această afirmaţie înseamnă că x(t) = 0 pentru $t < t_1$ sau $t > t_2$. Pentru astfel de semnale, de durată t_2-t_1 finită, formulele de calcul ale energiei şi puterii medii devin:

$$\mathbf{W} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad ; \quad \mathbf{P} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad . \qquad \textbf{(1.74-75)}$$

În cazul semnalului discret x[n] cu durata $N_1 \le n \le N_2$, adică $x[n] \equiv 0$ pentru $n < N_1$ sau $n > N_2$, energia şi puterea medie sunt calculabile cu relaţiile:

$$W = \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 \quad ; \quad P = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1}\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 \quad . \qquad \textbf{(1.76-77)}$$

Semnalele de durată finită şi de energie finită sunt de clasă L^2 sau l^2 după cum sunt definite în timp continuu sau în timp discret. Menţionăm că vom spune semnale din L^2 în loc de semnale modelate prin funcţii din L^2.

Exemple

i) Vom considera semnalul sinusoidal $x(t) = A\cos(\omega_o t)$, $\omega_o = 2\pi/T_o$. Fiind un semnal periodic, x(t) are energie infinită. Într-adevăr avem:

$$\int_{-T}^{T} A^2 \cos^2 \omega_o t\, dt = \frac{A^2}{2} \int_{-T}^{T} (1 + \cos 2\omega_o t) dt = \frac{A^2}{2} \int_{-T}^{T} dt + \frac{A^2}{2} \int_{-T}^{T} \cos 2\omega_o t\, dt =$$

$$= A^2 T + \frac{A^2}{2\omega_o} \sin 2\omega_o T \xrightarrow[T \to \infty]{} \infty$$

În schimb puterea medie, aplicând relaţia (1.70) este :

$$\mathbf{P} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left(A^2 T + \frac{A^2}{2\omega_o} \sin 2\omega_o T \right) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4\omega_o} \lim_{T \to \infty} \frac{\sin 2\omega_o T}{T} \quad .$$

Dar :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\sin 2\omega_o T}{T} = 0 \quad .$$

În consecinţă, pentru semnalul sinusoidal rezultă P = $A^2/2$, rezultat cunoscut şi identic cu cel obţinut prin aplicarea relaţiei (1.72):

$$\mathbf{P} = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} A^2 \cos^2 \omega_o t\, dt = \frac{A^2}{2T_o} \int_0^{T_o} dt + \frac{A^2}{4\omega_o T_o} \left(\sin 2\omega_o T_o - 1 \right) = \frac{A^2}{2} \quad .$$

(1.78)

ii) Fie acum semnalul discret x[n] = $a^n \sigma[n]$, 0 < a < 1 . Aplicând (1.69) avem:

$$\mathbf{W} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = \frac{1}{1 - a^2} < \infty \quad .$$

Puterea medie a acestui semnal de energie finită şi durată infinită este nulă.

iii) Un semnal de durată limitată este semnalul triunghiular:

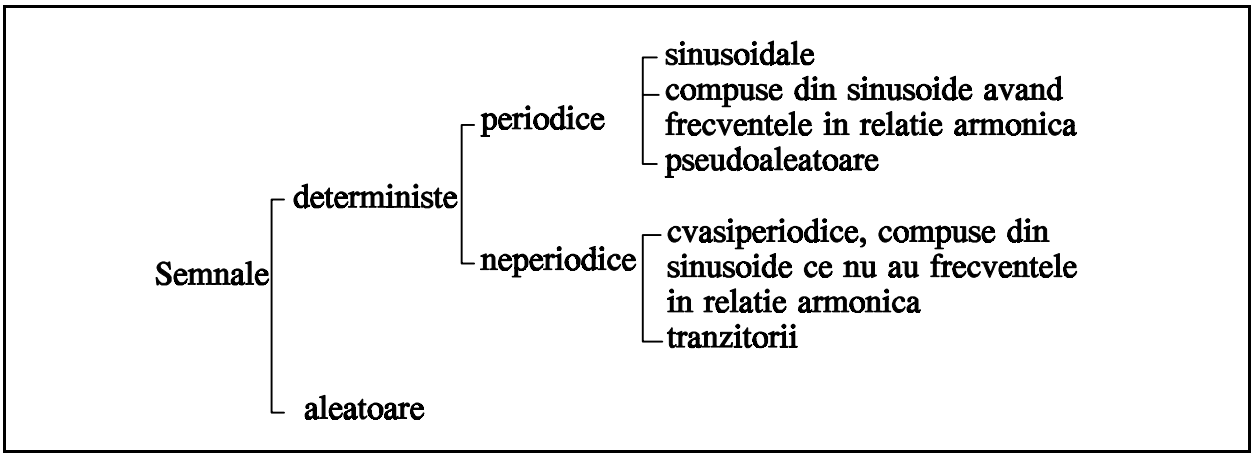
$$x(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\tau} & , \ |t| \le \tau \\ 0 & , \ |t| > \tau \end{cases} \quad .$$

Având durata finită (2τ) semnalul este de energie şi putere finită şi se aplică deci relaţiile (1.74) şi (1.75):

$$W=\int_{-\tau}^{\tau}|x(t)|^2dt=\int_{-\tau}^{0}\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^2dt+\int_{0}^{\tau}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)^2dt=2\int_{0}^{\tau}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)^2dt=\frac{2\tau}{3}\Rightarrow P=\frac{1}{2\tau}W=\frac{1}{3}\ .$$

1.1.7 O clasificare posibila a semnalelor

Semnalele de care ne-am ocupat au calitatea de a putea fi modelate printr-o funcţie, astfel că valoarea lor poate fi cunoscută în orice moment de timp. Astfel de semnale se numesc semnale deterministe. Spre deosebire de acestea, semnalele cu variaţie aleatoare nu pot fi exprimate ca valoare, printr-o funcţie. Ele se numesc semnale aleatoare. Unele semnale deterministe au o comportare asemănătoare cu cea a semnalelor aleatoare. O clasificare posibilă a semnalelor este :



Semnalele deterministe au, de obicei, legi de variaţie temporală de tip funcţie. De multe ori pentru identificarea unui anumit semnal nu este necesară cunoaşterea valorii funcţiei, care îl descrie, la fiecare moment de timp, ci este suficientă cunoaşterea unor caracteristici (parametrii) ai acestei funcţii. De exemplu un semnal sinusoidal este descris de o funcţie de forma : $A_o\sin(\omega_o t+\varphi_o)$ unde constantele A_o , ω_o şi φ_o sunt numere reale. Pentru cunoaşterea valorii acestui semnal la orice moment de timp, este suficient să se ştie că este vorba de un semnal sinusoidal şi să se cunoască valorile constantelor A_o , ω_o şi φ_o . Aceste constante se numesc parametrii semnalului. Parametrii semnalului $A_oe^{-\alpha t}$ sunt A_o şi α. Semnalele descrise astfel se numesc semnale deterministe staţionare. Dacă parametrii semnalului sunt variabili în timp atunci este vorba despre un

semnal determinist nestaţionar. De exemplu semnalele: $A_o \sin(t^2+\varphi_o)$ sau $t\sin(\omega_o t+\varphi_o)$ sunt semnale deterministe nestaţionare. Semnalele pseudoaleatoare constituie o categorie aparte de semnale care, deşi sunt periodice, au un comportament ce pare aleator. Ele au o perioadă extrem de mare. Aceste semnale se generează cu ajutorul unor registre de deplasare prevăzute cu bucle de reacţie.

Semnalele cvasiperiodice sunt compuse din sinusoide ce nu au frecvenţele în relaţie armonică. Dacă niciuna dintre amplitudinile acestor sinusoide nu este dominantă semnalul are mai curând un caracter aleator.

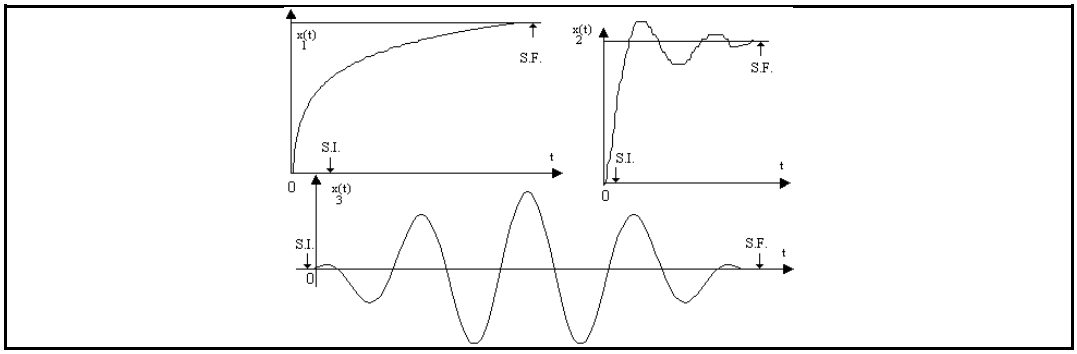


Fig. 1.33 Trei exemple de semnale tranzitorii. Cu SI s-a notat starea iniţială iar cu SF starea finală.

Semnalele tranzitorii nu sunt nici periodice şi nici nu se pot descompune într-o sumă de sinusoide cu amplitudinile elemente ale unui şir convergent la 0. Noţiunea "tranzitoriu" este legată de obicei de trecerea de la o stare permanentă la o altă stare permanentă. Pentru ilustrare se prezintă în figura 1.33 câteva semnale care pot fi considerate tranzitorii. Cele două stări permanente sunt notate cu SI - starea iniţială respectiv cu SF - starea finală. Aceasta din urmă poate fi atinsă numai la infinit. Regimul tranzitoriu este determinat de obicei de apariţia unei perturbaţii.

1.1.8 Distribuţii

Deşi toate semnalele fizic generabile sunt de energie finită, se utilizează numeroase modele de semnale cu energie infinită (de exemplu semnalele periodice). Modelarea "naturală" a unui semnal pare a fi funcţia de timp. Funcţiile "uzuale" nu sunt suficiente pentru modelarea semnalelor. Printr-o observare mai atentă a semnalelor fizice precum şi a instrumentelor de măsurare a valorii lor, vom pune

în evidenţă anumite deficienţe ale modelării semnalelor prin funcţii "uzuale". În acest mod vom ajunge la noţiunea de distribuţie.

Necesitatea introducerii noţiunii de distribuţie

Fenomenele cuantice ale microfizicii sunt discontinue şi aleatoare. Totuşi fenomenele macroscopice ce generează semnalele observate par "continue". Explicaţia este numărul mare de efecte microfizice ce dau naştere semnalului precum şi efectului "netezitor" al manifestării lor aleatoare. Observarea semnalului se efectuează prin intermediul unor aparate de măsurare care prin inerţia pe care o prezintă contribuie la "netezirea" suplimentară a semnalelor. Această inerţie, nu ne permite măsurarea valorii semnalului la un anumit moment de timp. Mai curând măsurăm o valoare "mediată" pe un anumit interval de timp, care ar trebui să fie suficient de scurt. Cele expuse ar părea că legitimează utilizarea exclusivă a semnalelor continue pentru modelarea semnalelor fizice. Nu putem distinge prin măsurare valori prea apropiate ale mărimii semnalului şi nici valori prea apropiate în timp. Ori, stabilirea experimentală a continuităţii unui semnal implică posibilitatea de a măsura cu o precizie arbitrar de bună valorile unei mărimi fizice la momente de timp arbitrar apropiate. Acest lucru nu este posibil. Apare necesară introducerea unei noţiuni noi pentru modelarea semnalelor ce face abstracţie de "detaliile nesemnificative". Este de dorit un obiect matematic care echivalează toate funcţiile ce nu diferă între ele decât într-un număr finit de puncte sau, într-un caz mai general, într-o mulţime de puncte de măsură Lebesgue nulă. Astfel de funcţii se numesc "egale aproape peste tot" sau prescurtat egale a.p.t. Dacă se consideră cazul unei percuţii în care fenomene mecanice foarte complexe se derulează într-un interval de timp foarte scurt, o simplificare considerabilă a problemei determinării efectelor se obţine dacă se acceptă că percuţia este instantanee. Această ipoteză înlocuieşte un fenomen complex printr-o simplă discontinuitate. Este însă posibil ca derivata funcţiei în care se introduce discontinuitatea menţionată să aibă o semnificaţie fizică importantă, de natură să impună conservarea mărimii ce de fapt încetează să mai existe în sensul uzual al derivării unei funcţii. Vom considera acum cazul încărcării unui capacitor de capacitate C = 1 cu o sarcină Q , de la o sursă de curent ce debitează curentul i(t) , figura 1.34.

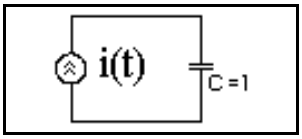


Fig. 1.34. Circuitul de încărcare al unui capacitor.

Dacă încărcarea nu depăşeşte o durată ε , rezolutia aparatului de măsurare utilizat , încărcarea se poate considera

"instantanee". Forma funcţiei de timp care descrie curentul i(t) în intervalul (0 , ε) sau în intervale mai reduse nu mai este importantă, din moment ce pentru aparatul de măsurare utilizat sarcina trece "instantaneu" de la 0 la valoarea:

$$Q = \int_0^{\varepsilon} i(t)\,dt \quad .$$

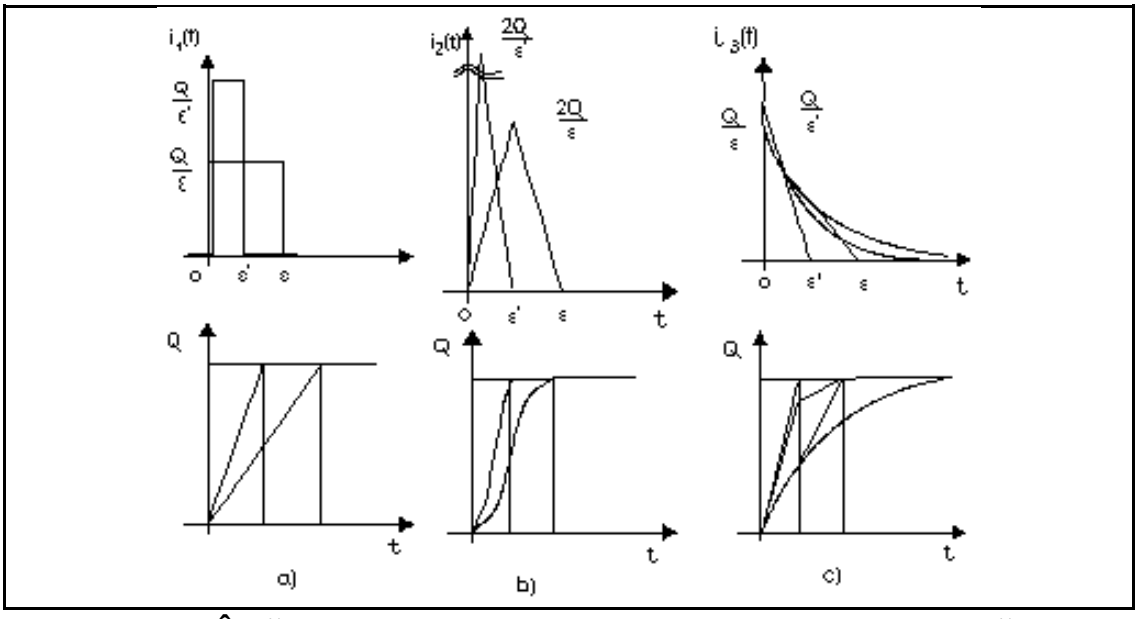


Fig. 1.35 Încărcarea unui capacitor C prin trei forme de undă ale curentului: rectangular (a), triunghiular (b) şi exponenţial (c).

În figura 1.35 se indică trei forme de undă ale curentului de încărcare care sunt la fel sesizate ca efect de aparatul de măsurare, solicitat sub nivelul rezoluţiei sale temporale, ε . În figurile 1.35 a şi 1.35 b , încărcarea condensatorului durează exact ε , iar în figura 1.35 c durata de încărcare este aproximativ ε . Curentul $i_3(t)$ va avea cam acelaşi efect ca şi curenţii $i_1(t)$ şi $i_2(t)$.

Forma curentului este un obiect matematic pe care îl vom nota cu Qδ(t) şi care satisface proprietatea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q\delta(t)dt = Q \quad .$$

Pentru procesul de măsurare imaginat curenţii $i_1(t)$ şi $i_2(t)$ sunt echivalenţi, folosirea oricăruia dintre ei conducând la concluzia că s-a realizat o încărcare instantanee cu sarcina Q. Toate elementele acestei clase de echivalenţă se numesc funcţii test. Este clar că dacă experienţa s-ar fi făcut cu un alt aparat de măsură (cu rezoluţie temporală de valoare diferită), funcţiile test corespunzătoare ar fi avut alte expresii decât în cazul considerat. De fapt definim un semnal ca fiind o aplicaţie care pune în corespondenţă unei funcţii de tip test caracteristică unui anumit aparat de măsurare din mulţimea celor posibile, un scalar, care reprezintă mărimea semnalului la un moment oarecare t. Obţinem astfel caracterizarea unui semnal prin efectul pe care îl produce asupra unui aparat de măsurare. Suntem conduşi astfel la definirea unui nou concept matematic, distribuţia, ca fiind o aplicaţie (cu anumite proprietăţi) care atribuie oricărei funcţii (numită funcţie test) aparţinând unei mulţimi precizate un număr real sau complex. Reamintim că o funcţie "obişnuită" asociază unui "număr test" dintr-o mulţime precizată un alt număr. Distribuţia este o extindere naturală a noţiunii de funcţie reală sau complexă de o variabilă reală. Ea este mai potrivită pentru a modela realitatea fizică a semnalelor decât funcţiile "obişnuite".

Clase remarcabile de funcţii

Este utilă prezentarea unor clase de funcţii utilizate în teoria semnalelor în general şi în studiul distribuţiilor în special.

1. $\mathbb{C}^k$ reprezintă mulţimea funcţiilor $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, derivabile şi cu derivate continue până la ordinul k inclusiv, $k \in \mathbb{N}$, în orice punct al axei reale. $\mathbb{C}^\infty$ sunt funcţiile indefinit derivabile, cu derivatele continue.
2. $\mathbb{C}_o^k$ submulţime a mulţimii $\mathbb{C}^k$, formată din funcţii cu suportul mărginit. $\mathbb{C}_o^\infty$ sunt funcţiile indefinit derivabile având suportul mărginit.
3. L^1 mulţimea funcţiilor $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabile (Lebesgue) pe $\mathbb{R}$. O funcţie φ aparţine acestei clase dacă şi numai dacă este măsurabilă şi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|dt < \infty \quad .$$

4. L^1_{loc} reprezintă clasa funcţiilor măsurabile şi integrabile (Lebesgue) pe orice compact din $\mathbb{R}$. Ele sunt funcţiile "obişnuite" sau "uzuale".

5. L^2 mulţimea funcţiilor $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ măsurabile şi pentru care:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt < \infty \quad .$$

Aceste funcţii sunt de energie finită. În figura 1.36 se arată printr-o diagramă simbolică relaţiile de incluziune între funcţiile din L^1 (L^1_{loc}) şi L^2 (L^2_{loc}).

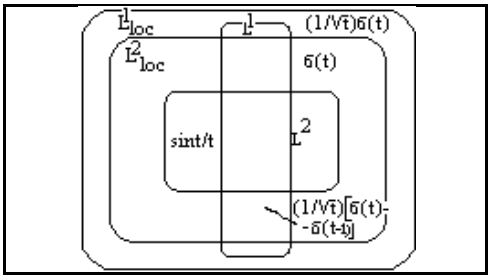


Fig. 1.36 Relaţii între funcţiile din L^1 şi L^2.

Spre exemplu pentru :

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\sigma(t) - \sigma(t-1)\right]$$

avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(t)|\,dt = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{\epsilon}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 < \infty \quad ,$$

şi deci $\varphi_1 \in L_1$. Dar $\varphi_1 \notin L^2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(t)|^2 dt = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{\epsilon}^{1} \frac{dt}{t} = -\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \ln\epsilon = \infty \quad .$$

În schimb pentru :

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & , \ t \neq 0 \\ 1 & , \ t = 0 \end{cases} .$$

se poate constata că $\varphi_2(t) \notin L^1$ dar că $\varphi_2(t) \in L^2$. Nu considerăm că este momentul să abordăm acum problemele de convergenţă în L^1 şi L^2 ele urmând a fi discutate ulterior.

Distribuţii pe spaţiul D

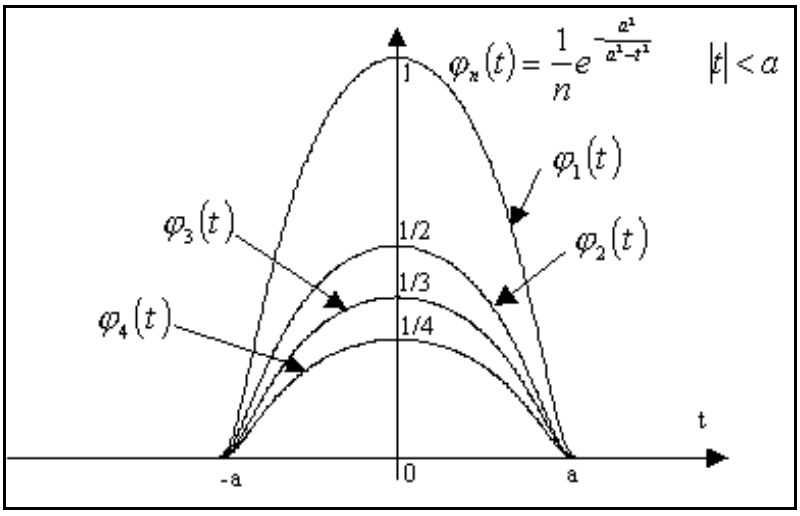


Fig. 1.37 Şirul de funcţii test $\varphi_n(t)$, nule în afara unui compact, tinde spre 0 împreună cu derivatele sale când n $\rightarrow \infty$.

O distribuţie asociază unei funcţii "test" φ(t) un număr real sau complex. Există mai multe spaţii de funcţii test. Unul dintre ele este aşa numitul spaţiu D cunoscut şi sub denumirea de spaţiu de bază.

D este un spaţiu vectorial conţinând funcţiile din $\mathbb{C}_o^\infty$. Funcţiile φ(t) ∈ D sunt indefinit derivabile cu derivate continue, având suport compact (adică ele se anulează în exteriorul unui interval compact). În spaţiul D se introduce convergenţa pentru un şir de funcţii $\varphi_n(t)$, indexat după n. Se spune că şirul $\varphi_n(t)$ converge la 0 în D pentru n tinzând la infinit dacă toate funcţiile $\varphi_n(t)$ se anulează în afara unui compact, acelaşi indiferent de valoarea indicelui n, şi converg uniform spre 0, împreună cu derivatele lor $\varphi_n^{(k)}(t)$ de orice ordin. Convergenţa şirului de funcţii $\varphi_n(t)$ către o funcţie φ(t) este uşor de definit, considerând şirul diferenţelor $\varphi_n(t)$- φ(t) ce trebuie să conveargă spre 0 în D. În figura 1.37 se prezintă câteva funcţii $\varphi_n \in D$, definite prin:

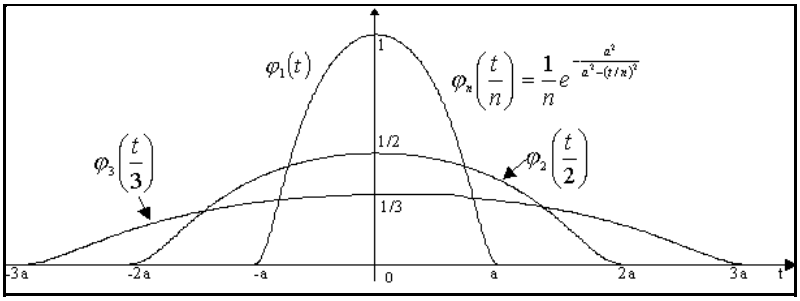


Fig. 1. 38 Şir de funcţii ce nu se anulează în afara unui compact atunci când n $\rightarrow \infty$.

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} e^{-\frac{a^2}{a^2-t^2}} & , \ |t| < a \\ 0 & , \ |t| \geq a \end{cases} . \qquad \textbf{(1.79)}$$

Se observă că toate funcţiile $\varphi_n(t)$ se anulează în afara aceluiaşi compact, [-a, a]. Spre deosebire de funcţiile din relaţia (1.79), şirul de funcţii obţinut din acesta prin scalarea variabilei t cu 1/n, $\varphi_n(t/n)$ nu este din D. O distribuţie este o funcţională liniară, T_f , continuă pe spaţiul pentru care am stabilit o regulă care asociază oricărei funcţii test φ(t) din D un număr real sau complex, notat cu $<T_f , \varphi >$, astfel încât să fie satisfăcute următoarele condiţii:

$$i) \ \langle T_f , \ \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 \rangle = \alpha_1 \langle T_f , \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle T_f , \varphi_2 \rangle \ , \ \forall \ \varphi_1 , \ \varphi_2 \in D$$

(aditivitatea şi omogenitatea funcţionalei) **(1.80)**

$$ii) \ Dacă \ \ \forall \ \varphi_n \in D \ ; \ \varphi_n \xrightarrow{D} 0 \quad atunci \ \ \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$$

(continuitatea funcţionalei T_f prin şiruri) **(1.81)**

Asocierea $\varphi(t) \longrightarrow <T_f , \varphi>$ poate fi realizată în mai multe modalităţi. De exemplu dacă f(t) este o funcţie local integrabilă:

$$\varphi(t) \longrightarrow \langle T_f , \ \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt \ \ ; \ \ \forall \ \varphi \in D \ , \qquad \textbf{(1.82)}$$

Distribuţia (funcţionala) se confundă adesea, ca notaţie, cu funcţia f(t), utilizată în definiţia (1.82). Se obişnuieşte să se scrie :

$$\varphi(t) \longrightarrow < f , \ \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt \ \ ; \ \ \forall \ \varphi \in D \ . \qquad \textbf{(1.83)}$$

Definiţia (1.82) satisface condiţiile de liniaritate şi continuitate. Se poate pune problema dacă există o funcţie local integrabilă f(t) astfel încât

funcţiei test φ(t) din D să i se asocieze valoarea φ(0) :

$$\varphi(t) \longrightarrow \langle T_f , \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \phi(0) \quad , \quad \forall \varphi \in D \quad . \tag{1.84}$$

Să considerăm că o astfel de funcţie există. (1.84) este verificată şi pentru :

$$\varphi_1(t) = e^{-\frac{a^2}{a^2-t^2}} \quad , \quad |t| < a \quad ,$$

dată de relaţia (1.79). Conform relaţiei (1.84) avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_1(t)dt = \varphi_1(0) = e^{-1} \quad . \tag{1.85}$$

Dar integrala din membrul stâng al relaţiei (1.85) este:

$$\int_{-a}^{a} f(t)e^{-\frac{a^2}{a^2-t^2}}dt \xrightarrow{a\to 0} 0 \quad , \tag{1.86}$$

şi ea tinde la zero atunci când a tinde la zero. Comparând (1.85) şi (1.86) se ajunge la $e^{-1} = 0$ ceea ce este absurd. Funcţionala T_f ce realizează corespondenţa φ(t) ⟶ φ(0) o vom numi distribuţie delta, δ, sau distribuţia lui Dirac şi se scrie :

$$\langle \delta , \varphi(t) \rangle = \varphi(0) \quad . \tag{1.87}$$

Distribuţiile T_f pentru care $f \in L^1_{loc}$ se numesc distribuţii regulate sau de tip funcţie. Distribuţiile de tipul celei definite prin relaţia (1.87) se numesc distribuţii neregulate sau distribuţii singulare. Pentru cazul distribuţiei Dirac (care este singulară) se utilizează în mod curent şi notaţia δ(t) deşi ea este formal incorectă. O distribuţie nu are o anumită valoare într-un punct t_o . Se poate introduce însă o noţiune de valoare care localizează distribuţiile pe mulţimi deschise. Fie D o vecinătate a punctului t_o (o mulţime deschisă ce include t_o). Se spune că distribuţia δ (sau o altă distribuţie T_f) este nulă pe mulţimea deschisă D dacă are loc egalitatea:

$$\langle \delta , \varphi \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \varphi \in D \quad , \quad \operatorname{supp}\varphi \subset D \quad , \tag{1.88}$$

sau, în general:

$$\langle T_f , \varphi \rangle = 0 \;\; ; \;\; \forall \varphi \in D \;\; , \;\; \text{supp } \varphi \subset D \;\; , \qquad \textbf{(1.89)}$$

unde s-a notat cu " supp φ " suportul funcţiei test φ.

Complementara reuniunii tuturor mulţimilor deschise pe care se anulează o distribuţie se numeşte suportul distribuţiei.

Exemple:

i) Distribuţia unitate:

$$\langle 1 , \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \varphi(t)\,dt \;\; , \qquad \textbf{(1.90)}$$

are suportul, mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$. Ea este de tip funcţie.

ii) Distribuţia treaptă unitară :

$$\langle \sigma , \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\varphi(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \varphi(t)\,dt \;\; , \qquad \textbf{(1.91)}$$

este tot de tip funcţie, cu suportul necompact [0, ∞) .

iii) Distribuţia poartă temporală (sau fereastră temporală), asociată funcţiei $p_T(t)=\sigma(t+T)-\sigma(t-T)$:

$$\langle p_T , \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-T}^{T} \varphi(t)\,dt \;\; . \qquad \textbf{(1.92)}$$

Şi ea este de tip funcţie, suportul ei fiind compactul [-T , T] .

iv) Distribuţia Dirac δ pentru care este valabilă relaţia (1.87) $<\delta , \varphi> = \varphi(0)$ este o distribuţie singulară. Suportul distribuţiei Dirac este un compact redus la punctul din origine $t_o=0$. În vecinătatea oricărui punct t nenul distribuţia Dirac este nulă. În general se spune că dacă o distribuţie nu este nulă în nici o vecinătate a lui t_o , atunci acest punct este un punct esenţial al distribuţiei.

În legătură cu noţiunea de valoare nulă a unei distribuţii într-o mulţime deschisă se introduce noţiunea de egalitate a două distribuţii (sau de coincidenţă a

acestora). Fie T_f, şi T_g două distribuţii. Vom spune că cele două distribuţii coincid pe mulţimea deschisă D dacă şi numai dacă diferenţa T_f - T_g este nulă pe această mulţime:

$$\langle T_f - T_g , \varphi \rangle = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in D \quad , \quad \text{supp } \varphi \subset D \quad . \tag{1.93}$$

Dacă f şi g sunt funcţii local integrabile, din relaţia :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - g(t)] \varphi(t) dt = 0 \quad , \tag{1.94}$$

rezultă că cele două funcţii f(t) şi g(t) sunt egale aproape peste tot. Egalitatea f(t)=g(t) poate să nu fie satisfăcută cel mult într-o mulţime numărabilă de puncte (care are măsura Lebesgue nulă). Se scrie :

$$f(t) = g(t) \quad a.p.t. \tag{1.95}$$

Cazul distribuţiilor regulate pentru care f(t) ∈ ℂ

Definiţia funcţionalei folosite devine în acest caz :

$$\langle f , \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \varphi(t) dt \quad , \quad \varphi(t) \in D \quad . \tag{1.96}$$

Pentru compatibilitatea notaţiei cu produsul scalar, unii autori preferă să noteze < φ , f > şi nu < f , φ > .

Operaţii cu distribuţii

i) **Adunarea distribuţiilor**

Prin definiţie:

$$\langle T_f + T_g, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle + \langle T_g, \varphi \rangle \quad sau \quad \langle f+g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D \; . \tag{1.97}$$

Dacă relaţia (1.97) este evidentă pentru distribuţiile de tip funcţie şi rezultă imediat din proprietăţile integralei, pentru distribuţiile singulare ea se introduce prin definiţie. Există, după cum se va vedea, o modalitate simplă de a justifica extrapolarea relaţiilor stabilite pentru distribuţiile regulate şi la cele singulare bazată pe faptul că orice distribuţie singulară este limita unui şir de distribuţii

regulate.

ii) **Produsul unei distribuţii cu o funcţie a(t) indefinit derivabilă**

Ca urmare a proprietăţii esenţiale de liniaritate nu există nici un mod natural pentru a defini produsul a două distribuţii. Se poate însă defini produsul unei distribuţii cu o funcţie indefinit derivabilă prin:

$$\langle a(t)T_f, \varphi(t)\rangle = \langle T_f, a(t)\varphi(t)\rangle \quad sau \quad \langle a(t)f, \varphi(t)\rangle = \langle f, a(t)\varphi(t)\rangle \ , \ \forall \varphi \in D \ .$$

(1.98)

Este uşor de văzut că a(t)φ(t) ∈ D dacă a(t) este indefinit derivabilă. Dacă a(t) este complexă atunci (1.98) se modifică:

$$\langle a(t)T_f, \varphi(t)\rangle = \langle T_f, a^*(t)\varphi(t)\rangle \ , \ \forall \varphi \in D \ . \qquad \textbf{(1.99)}$$

Un caz particular îl reprezintă produsul unei distribuţii cu o constantă a(t)=α. Din (1.98) şi (1.99) se deduc:

$$\langle \alpha T_f , \varphi\rangle = \langle T_f , \alpha\varphi\rangle = \alpha \langle T_f , \varphi\rangle \ ; \ \alpha \in \mathbb{R} \ , \ \forall \varphi \in D$$
$$\langle \alpha T_f , \varphi\rangle = \langle T_f , \alpha^*\varphi\rangle = \alpha^* \langle T_f , \varphi\rangle \ ; \ \alpha \in \mathbb{C} \ , \ \forall \varphi \in D \ .$$

(1.100-101)

iii) **Transformări liniare ale variabilei independente**

Deşi am făcut remarca că scrierea f(t) pentru o distribuţie nu are sens, ea este totuşi utilizată. Relaţiile la care se ajunge sunt corecte şi notaţia este de cele mai multe ori sugestivă. Vom utiliza deci şi forma δ(at+b) . Avem relaţia:

$$\langle f(at+b), \varphi(t)\rangle = \frac{1}{|a|}\langle f(u), \varphi(\tfrac{u-b}{a})\rangle \ . \qquad \textbf{(1.102)}$$

Vom lua în considerare câteva cazuri particulare.

$$\langle \delta(t-t_o), \varphi(t)\rangle = \langle \delta(t), \varphi(t+t_o)\rangle = \varphi(t_o) \ ; \ \langle \delta(-t), \varphi(t)\rangle = \langle \delta(t), \varphi(-t)\rangle = \varphi(0) \ .$$

(1.103-104)

Comparând (1.104) cu (1.88) se ajunge la δ(-t) = δ(t) ; distribuţia Dirac este pară.

$$\langle \delta(at), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \delta(t), \varphi(\frac{t}{a}) \rangle = \frac{1}{|a|} \varphi(0) \quad , \qquad \textbf{(1.105)}$$

şi deci:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad . \qquad \textbf{(1.106)}$$

iv) **Derivarea distribuţiilor**

Una dintre proprietăţile esenţiale ale distribuţiilor este că acestea sunt indefinit derivabile. Vom considera cazul funcţiei f local integrabile. Avem :

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \varphi(t) dt = f(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt \; ; \; \forall \; \varphi \in D \quad .$$

Deoarece φ(t) se anulează în afara unui compact, produsul f(t)φ(t) evaluat la +∞ şi -∞ este sigur nul, chiar dacă suportul lui f(t) nu este finit. Avem deci :

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [-\varphi'(t)] dt = \langle f, -\varphi' \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle \quad \forall \; \varphi \in D \; ,$$

deoarece φ' ∈ D . În general, pentru derivata de ordinul k :

$$\langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle \quad , \quad \forall \; \varphi \in D \quad . \qquad \textbf{(1.107)}$$

Problema derivării indefinite a distribuţiei f este, conform (1.107) transferată funcţiei test. Relatia (1.107) defineste derivarea distribuţiilor. Se justifică şi limitarea suportului funcţiei test la un compact, deoarece numai astfel primul termen al integrării prin părţi dispare. Vom considera câteva cazuri particulare.

$$\langle \sigma', \varphi \rangle = -\langle \sigma, \varphi' \rangle = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(t) dt = -\varphi(t) \Big|_{0}^{\infty} = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0) \quad ,$$

deoarece φ se anulează în afara unui compact. Am obţinut egalitatea :

$$\langle \sigma', \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \; \varphi \in D \quad ,$$

care arată că :

$$\sigma' = \delta \quad . \tag{1.108}$$

Şi distribuţia Dirac poate fi derivată:

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$$

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0) \quad \forall\ \varphi \in D \quad . \tag{1.109}$$

În figura 1.39 este reprezentată funcţia f(t) continuă pe porţiuni, având într-o mulţime numărabilă de puncte: t_1, t_2, ... discontinuităţi de speţa întâi cu salturile h_1, h_2 , ... În rest f e continuă pe porţiuni şi cu derivata continuă pe porţiuni. Se introduce funcţia f_1 (t) de forma:

$$f_1(t) = f(t) - \sum_k h_k \sigma(t - t_k) \quad . \tag{1.110}$$

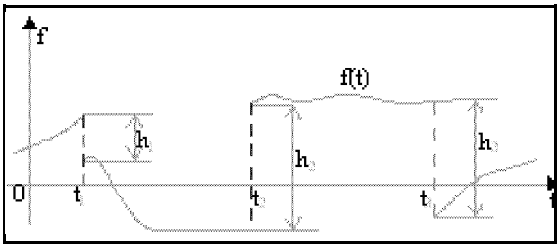


Fig. 1.39 Funcţie cu mulţime numărabilă de discon tinuităţi, derivabilă în sensul distribu ţiilor.

Dar $f_1(t)$ poate fi considerată ca o distribuţie regulată. Derivata acestei distribuţii este:

$$f_1' = f' - \sum_k h_k \delta(t - t_k) \quad , \tag{1.111}$$

şi deci derivata distribuţiei regulate asociate funcţiei f e :

$$f' = f_1 + \sum_k h_k \delta(t - t_k) \quad . \tag{1.112}$$

Convergenţa slabă a distribuţiilor

Considerăm un şir de distribuţii indexat după n , $\{f_n\}$. Se spune că şirul $\{f_n\}$ converge slab către distribuţia f dacă oricare ar fi funcţia test din D avem :

$$\lim_{n \to \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad , \quad \forall\ \varphi \in D \quad . \tag{1.113}$$

Convergenţa şirului numeric $< f_n , \varphi >$ defineşte convergenţa slabă a distribuţiilor. Se poate arăta că orice distribuţie singulară definită pe spaţiul D al funcţiilor

test poate fi obţinută ca limita unui şir de distribuţii de tip regulat. De aceea relaţiile obţinute pot fi extinse şi la distribuţiile de tip neregulat. Pentru exemplificare vom arăta câteva şiruri de funcţii local integrabile ce generează şiruri de distribuţii regulate ce converg, în sensul definiţiei (1.113) la distribuţia Dirac.

Condiţiile necesare şi suficiente ca şirul de funcţii $f_n(t)$ să genereze un şir de distribuţii regulate convergent la distribuţia Dirac , sunt:

i) Pentru orice M > 0 , pentru $|a| \le M$, $|b| \le M$ mărimile: $\left|\int_a^b f_n(t)\,dt\right|$ sunt mărginite de o constantă ce nu depinde de a sau b (ci doar de M) ;

ii) Pentru a şi b fixaţi şi diferiţi de zero :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \begin{cases} 1 \ , & a < 0 < b \\ 0 \ , & a < b < 0 \quad sau \quad 0 < a < b \end{cases} . \qquad \textbf{(1.114')}$$

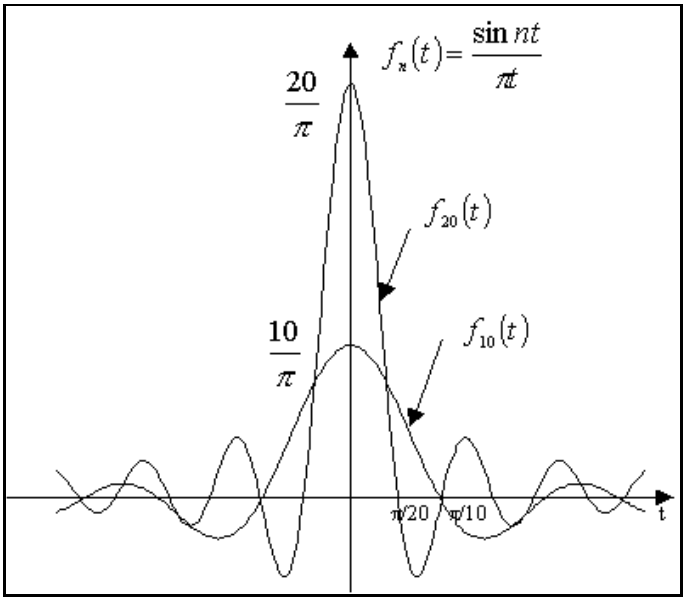


Fig. 1.40 Şir reprezentativ pentru distribuţia Dirac, δ(t).

Şirurile de distribuţii regulate convergente la distribuţia Dirac se numesc "δ - şiruri" sau şiruri reprezentative pentru distribuţia Dirac. Un astfel de şir este cel definit de expresia:

$$f_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi t} \quad .$$

Două dintre funcţiile şirului, care respectă condiţia (1.114) sunt ilustrate în figura 1.40. Se poate arăta prin dezvoltare în serie că:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nt}{\pi t}\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0) \ , \ \forall \varphi \in D \ , \qquad \textbf{(1.114")}$$

şi deci :

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \frac{\sin nt}{\pi t}, \varphi(t) \right\rangle = \left\langle \delta , \varphi(t) \right\rangle , \ \forall \ \varphi \ \in D \quad .$$

Convergenţa slabă a şirului $f_n(t)$ nu este o convergenţă uniformă. Funcţiile $f_n(t)$ au un prim minim în jurul originii la t_o , soluţie a ecuaţiei tg $(nt_o)=nt_o$, unde $\pi/n<t_o<(3\pi)/(2n)$, minim având valoarea :

$$f_n(t_o) = \frac{-n}{\pi\sqrt{1+(nt_o)^2}} \quad ;$$

atunci când n —> ∞ , t_o —> 0 şi $f_n(t_o)$ —> -∞ . Şirul prezentat mai înainte nu este singurul care generează un şir de distribuţii regulate convergent la distribuţia Dirac. Şi şirul : $f_\alpha(t) = (\sin(\alpha t)/(\pi t)$, $\alpha > 0$ are aceeaşi limită când α tinde la infinit deşi α nu este un întreg, atunci când α —> ∞ .

Şirul $g_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon}\left[\, \sigma(t+\epsilon) - \sigma(t-\epsilon) \,\right]$ are şi el proprietatea că generează un un şir de distribuţii regulate convergent la distribuţia Dirac pentru ε tinzând la 0.

<u>Spaţiul D' al distribuţiilor cu suport mărginit</u>

Funcţionalele definite pe spaţiul D al funcţiilor test formează un spaţiu vectorial relativ la însumarea distribuţiilor şi la înmulţirea cu un număr. Acest spaţiu se notează cu D' şi poartă numele de spaţiu dual al spaţiului D. Limita în sensul convergenţei slabe a unui şir de distribuţii f_n din D' , dacă există, este tot o distribuţie din D' . Reamintim că distribuţiile din D' pot fi regulate sau singulare iar din punct de vedere al suportului pot fi cu suport mărginit (δ) sau nemărginit (σ). În D' operaţia de derivare este continuă. Astfel, dacă $f_n \in$ D' şi f_n converge în D' la f atunci când n tinde la infinit (este vorba despre convergenţa slabă din D') şirul derivatelor f_n' din D' converge slab către f' .

Şi pentru seriile convergente de distribuţii din D' este valabilă o afirmaţie similară. Dacă $f_n = \sum_{k=1}^{n} h_k \quad , \quad h_k \in D'$ este convergentă slab către f, atunci avem pentru n tinzând la infinit:

$$\sum_{k=1}^{n} h_k' \xrightarrow{D'} f' \quad , \quad pentru \quad n \longrightarrow \infty \quad sau \quad \sum_{k=1}^{\infty} h_k' = f' \quad . \qquad \textbf{(1.115)}$$

<u>Alte exemple de distribuţii din D'</u>

v) Distribuţia Dirac periodică (tot o distribuţie neregulată) δ_T *, este definită*

prin:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t+kT) \quad . \tag{1.116}$$

Pentru ea avem :

$$\langle \delta_T, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \delta(t-kT), \varphi(t) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \delta(t), \varphi(t+kT) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(kT) \; ; \; \forall \varphi \in D \; .$$

(1.117)

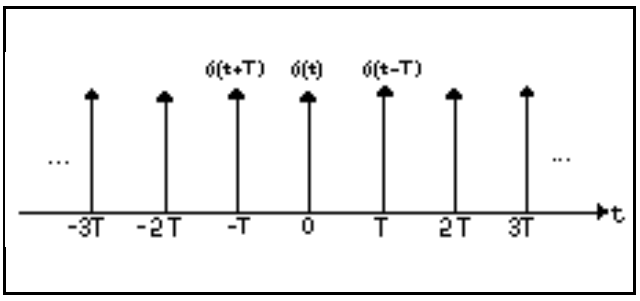


Fig. 1.41 Simbolizarea grafică a distribuţiei Dirac periodice $\delta_T(t)$.

Suportul distribuţiei, simbolizată în figura 1.41 este format din mulţimea punctelor $\{t_k=kT \mid k \in Z\}$ şi nu este mărginit. În general o distribuţie f din D' este periodică de perioadă T, dacă satisface condiţia:

$$\langle f(t-T), \varphi(t) \rangle = \langle f(t), \varphi(t) \rangle \quad \forall \varphi \in D \; ,$$

(1.118)

relaţie asemănătoare condiţiei de periodicitate a funcţiilor "obişnuite".

vi) Distribuţia "valoare principală a lui 1/t", notată şi VP(1/t) este tot o distribuţie cu suportul nemărginit, din D':

$$\left\langle VP\left(\frac{1}{t}\right), \varphi(t) \right\rangle = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \lim_{\epsilon \searrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right] \quad \forall \varphi \in D \; ,$$

(1.119)

unde cu V.P. s-a notat valoarea principală Cauchy a integralei. Dar funcţia φ este din D , deci este nulă în afara unui compact [-a , a] . Ca valoare principală avem:

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \left[\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\varphi(0)}{t} dt + \int_{\epsilon}^{R} \frac{\varphi(0)}{t} dt \right] = V.P. \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(0)}{t} dt = 0 \quad ,$$

şi în consecinţă (1.119) se poate scrie şi sub forma :

$$\left\langle VP\left(\frac{1}{t}\right), \varphi(t)\right\rangle = V.P.\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}}\left[\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt + \int_{\epsilon}^{R}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt\right]$$

(1.120)

Deoarece φ(t) tinde la φ(0) când t tinde la 0 rezultă că VP(1/t) asociază funcţiei test φ din D un număr depinzând de alegerea funcţiei test φ.

Distribuţii pe spaţiul S

O clasă de funcţii test diferită de D este constituită din acele funcţii φ ∈ $\mathbb{C}^{\infty}$ care au, în plus, o descreştere rapidă. În acest mod termenul $f(t)\,\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}$ care apare în integrarea prin părţi din definirea derivării distribuţiilor se anulează dacă f nu are o creştere rapidă; se spune că f are o creştere temperată (polinomială).

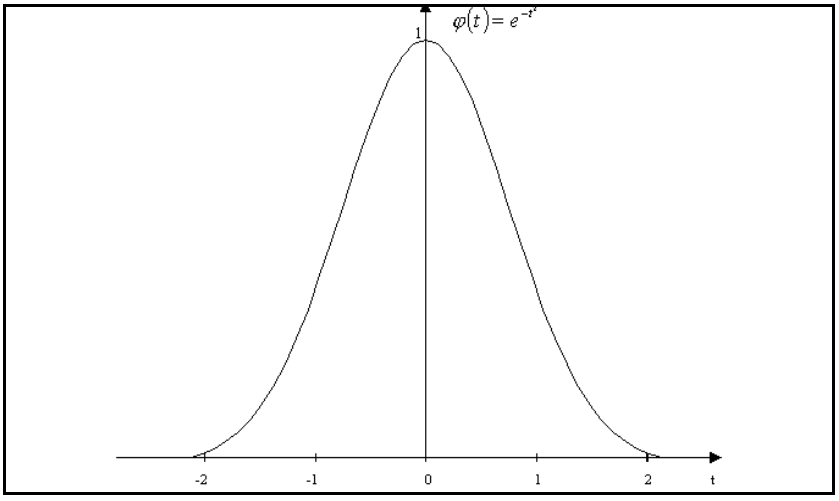


Fig. 1.42 Funcţie test din spaţiul S .

Prin definiţie funcţiile φ(t) indefinit derivabile şi care descresc spre 0 împreună cu toate derivatele lor, atunci când |t| –> ∞ , mai repede decât orice putere a lui 1/t, formează spaţiul S al funcţiilor cu descreştere rapidă. În figura 1.42 este arătată o astfel de funcţie, $\varphi(t) = e^{-t^2} \in S$.

Se mai poate spune că φ ∈ S dacă şi numai dacă pentru orice polinom $P_m(t)$ de orice grad m ∈ ℕ şi pentru orice k ∈ ℕ, funcţia $P_m(t)\varphi^{(k)}(t)$ este mărginită pe ℝ. Un şir de funcţii $\varphi_n(t) \in S$ este convergent spre 0 în S , pentru n –> ∞ dacă şirul de funcţii $t^m\varphi_n^{(k)}(t)$ converge uniform către 0 în ℝ sau ℂ, pentru ∀m ∈ ℕ şi ∀k∈ ℕ, aleşi independent. Se numesc distribuţii temperate funcţionalele liniare şi continue prin şiruri, definite pe S şi cu valori în ℝ sau ℂ. Spaţiul distribuţiilor temperate, S', este dualul spaţiului S. Continuitatea distribuţiilor temperate f din S' se defineşte în mod similar cu cea a distribuţiilor din D'. Astfel dacă şirul $\varphi_n(t)$ converge la 0 în S atunci $\langle f,\varphi_n\rangle$–>0 în ℝ sau ℂ. Este uşor de verificat incluziunea: D ⊂ S şi în consecinţă incluziunea inversă

a spaţiilor duale: $S' \subset D'$. Şi în spaţiul S' se defineşte convergenţa slabă a şirului de distribuţii $\{f_n(t)\}$. Se spune că f_n converge slab la f în S' pentru $n \to \infty$ dacă şirul numeric corespunzător este convergent : $\langle f_n , \varphi \rangle \longrightarrow \langle f , \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in S$, atunci când $n \to \infty$. Ca şi spaţiul D' , spaţiul S' este complet în sensul că, orice şir de distribuţii din S' converge slab la o distribuţie din acelaşi spaţiu. Prin urmare şi în acest spaţiu relaţiile stabilite pentru distribuţiile regulate se pot extinde şi la cele singulare. Se poate arăta că următoarele operaţii aplicate unor distribuţii din S' conduc la distribuţii tot din S' :

- Derivarea (de orice ordin); dacă $f \in S'$ atunci $f^{(k)} \in S'$,$\forall k \in \mathbb{N}$.
- Schimbarea liniară de variabilă; dacă $f(t) \in S'$, atunci $f(at+b) \in S'$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$ şi $\forall b \in \mathbb{R}$.
- Înmulţirea cu o funcţie $a(t) \in \mathbb{C}^\infty$ temperată (cu creştere cel mult polinomială).

Se mai arată că pentru orice distribuţie temperată $f \in S'$ există o funcţie continuă şi temperată $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, şi un întreg n, astfel încât $f = h^{(n)}$.

Exemple de distribuţii temperate.

i) Orice distribuţie cu suport compact este şi temperată.

ii) Orice funcţie temperată $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *defineşte o distribuţie din S' prin :*

$$\varphi \longrightarrow \langle f , \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt \quad , \quad \forall \varphi \in S \quad .$$

Vom face din nou observaţia că notaţia corectă ar fi $\varphi \longrightarrow \langle T_f , \varphi \rangle$ *; în cazul în care f este o funcţie, ea se poate identifica cu distribuţia.*

iii) Distribuţiile $\sigma(t)$ *, sgn(t) , funcţiile continue şi mărginite, polinoamele, funcţiile spline, sunt toate din S' .*

iv) Distribuţia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta(t - kT)$, $a_k \in \mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{C}$ *este tot o distribuţie temperată. Nu este însă temperată distributia:*

$$\sum_{k=1} e^{kT} \delta(t - kT) \quad \notin S'$$

Distribuţii pe spaţiul $\mathscr{E}$

O lărgire şi mai pronunţată a mulţimii funcţiilor test, decât cea adusă de mulţimea S este realizată prin considerarea clasei de funcţii $\mathbb{C}^{\infty}$, denumită $\mathscr{E}$, înzestrată cu o definiţie a convergenţei şirurilor de funcţii din ea. Spaţiul funcţiilor test $\varphi \in \mathscr{E}$ este format din funcţii indefinit derivabile, cu derivate continue şi suport infinit. Ele nu au nici măcar o scădere rapidă spre zero, atunci când $|t| \to \infty$. Spre exemplu, $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $e^{j\omega t}$ sunt funcţii din $\mathscr{E}$. Se spune că un şir de funcţii $\varphi_n(t) \in \mathscr{E}$, converge spre zero în această mulţime, dacă şirul de funcţii $\{\varphi_n^{(k)}(t)\} \in \mathscr{E}$ este uniform convergent spre 0 pe orice interval mărginit, fixat, pentru $\forall\ k \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{E}} 0 \ \text{pentru}\ n \to \infty \ \text{daca}\ \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(k)}(t) = 0\ ,\ t \in [a,b]\ ,\ \forall a,b \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}\ .$$

Această lărgire a clasei de funcţii test restrânge şi mai mult clasa distribuţiilor ce pot fi definite pe spaţiul de funcţii test $\mathscr{E}$ în comparaţie cu clasa distribuţiilor definite pe S . Pentru ca termenul $f(t)\,\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}$ ce intervine în formula integrării prin părţi din definiţia derivării distribuţiilor să se anuleze, este necesar ca distribuţiile f să aibă suportul compact. Aplicaţiilor liniare şi continue prin şiruri definite pe $\mathscr{E}$, formează spaţiul distribuţiilor cu suport mărginit, $\mathscr{E}'$, dualul lui $\mathscr{E}$.

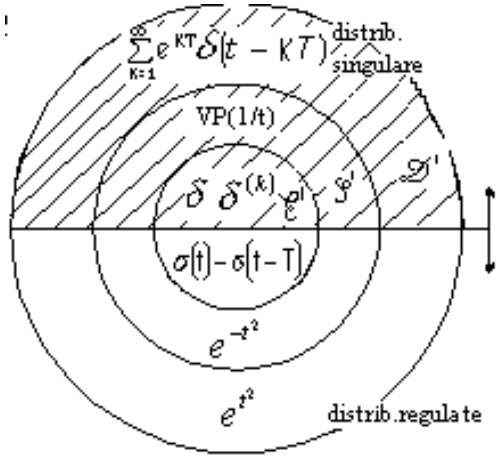


Fig. 1. 43 Relaţia dintre spaţiile $\mathscr{E}'$, S' şi D' .

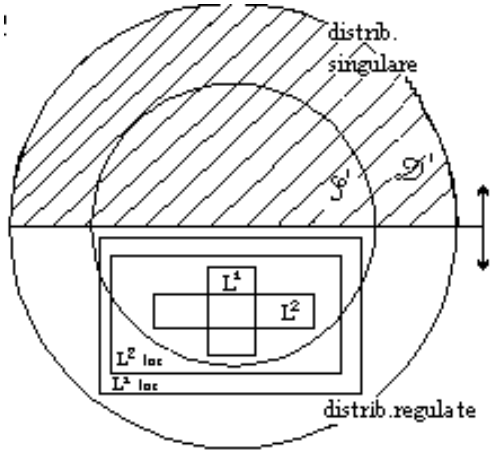


Fig. 1.44 Relaţia între spaţiile de distribuţii şi clasele L^1 şi L^2 .

S-a demonstrat anterior că spaţiile D' şi S' sunt complete în sensul că dacă $f_n \in$ D' (S') şi şirul de valori $\langle f_n , \varphi \rangle$ are limită atunci când $n \to \infty$ pentru $\forall\ \varphi \in$ D (S), atunci f_n converge (slab) spre o distribuţie f din acelaşi spaţiu, D' (S'). Spaţiul de distribuţii $\mathscr{E}'$ nu are această proprietate.

În ceea ce priveşte spaţiile funcţilor test avem relaţiile de incluziune $D \subset S \subset \mathscr{E}$; în consecinţă între spaţiile duale avem relaţiile: $\mathscr{E}' \subset S' \subset D`$. Distribuţia $\delta(t)$ şi derivatele sale sunt din $\mathscr{E}'$, având suportul compact. Distribuţia poartă (fereastră) temporală este tot din $\mathscr{E}'$.

Relaţii între clasele de funcţii şi de distribuţii

În figura 1.43 se arată într-o reprezentare simbolică incluziunile $\mathscr{E}' \subset S' \subset D`$ şi se dau câteva exemple de distribuţii regulate şi singulare din aceste spaţii. În figura 1.44 se ilustrează incluziunea funcţiilor uzuale interpretate ca distribuţii regulate în spaţiile de distribuţii. Funcţiile din L^2 cât şi funcţiile din L^1 fac parte din S' .

1.1.9 Definiţia generală a semnalelor deterministe

Se numeşte semnal determinist orice element din S'.

Această definiţie se referă la modelul matematic cel mai general al unui semnal fizic. Funcţiile din L^1 , L^2 , S , D, polinoamele de orice grad, funcţiile continue şi temperate, distribuţiile σ , δ , $\delta^{(k)}$, δ_T , VP(1/t) , sgn(t) şi altele sunt semnale deterministe în sensul definiţiei anterioare.

1.2 Sisteme

În cele ce urmează se discută doar cazul sistemelor deterministe , sistemele aleatoare nefăcând obiectul acestui curs. Operaţii precum amplificarea, atenuarea, modularea, demodularea şi altele se aplică unui semnal "de intrare" x(t) dintr-o mulţime precizată, fie ea X spre a obţine un alt semnal "de ieşire", y(t) dintr-o altă mulţime şi ea precizată Y. În figura 1.46 se dă un exemplu de sistem. Semnalul de intrare x(t) -o tensiune - se regăseşte la ieşire - tot sub forma unei tensiuni - dar amplificat: $y(t) = -(R_2/R_1)x(t)$ dacă $R_2 > R_1$. Sistemul din figura 1.45 este numit continuu deoarece are la intrare şi ieşire semnale în timp continuu şi nu recurge la discretizarea în timp a semnalelor. Este posibilă şi prelucrarea unor semnale definite în timp discret. La intrarea unui sistem de prelucrare se aplică un semnal discret x[n] din mulţimea posibilă X_d iar la ieşire rezultă un semnal discret y[n] din mulţimea semnalelor de ieşire Y_d.

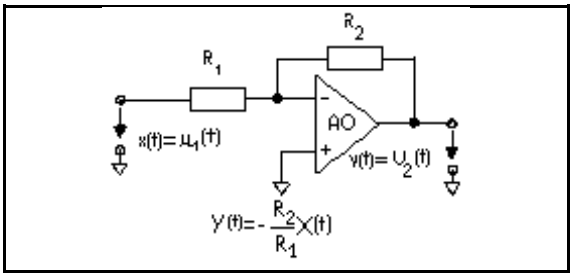


Fig. 1.45 Exemplu de sistem ce transformă semnalul x(t) în semnalul y(t).

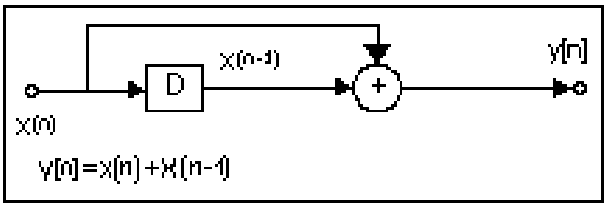


Fig. 1.46 Exemplu de sistem discret. Blocul D realizează o întârziere de un eşantion.

În figura 1.46 este arătat un astfel de sistem, denumit şi sistem discret. Blocul de întârziere D memorează semnalul discret pentru un eşantion (o perioadă de tact T_e). Dacă la intrarea sa se aplică x[n] la ieşire se obţine eşantionul precedent x[n-1]. Între semnalele de intrare şi ieşire există o relaţie de forma y[n] = x[n]+x[n-1]. Implementarea sistemelor continue numite şi analogice, se realizează utilizând circuite analogice: amplificatoare, sumatoare şi alte circuite. Sistemele discrete se implementează utilizând în cele mai multe cazuri tehnica numerică (digitală), motiv pentru care semnalele discrete sunt şi cuantizate. În ultimii ani se recurge la sisteme de prelucrare discretă pentru a simula comportarea unor sisteme analogice. Au apărut chiar structuri integrate, cunoscute sub denumirea de procesoare de semnal. Printr-o programare adecvată, în genul celei practicate la microprocesoare, se pot simula clase extrem de largi de sisteme. Evident sistemele pot fi şi mecanice sau pot avea o structură complexă (de exemplu electromecanice). Nimic nu ne împiedică să privim un automobil ca un sistem având ca mărime de intrare (una dintre multele posibile) poziţia pedalei de acceleraţie iar ca mărime de ieşire acceleraţia automobilului.

1.2.1 Modelul matematic al sistemelor

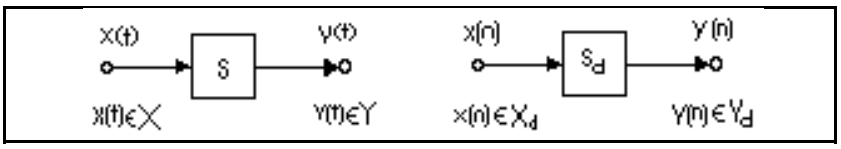


Fig. 1.47 Modelarea sistemelor continue (a) şi discrete (b) prin operatorii S respectiv S_d .

Sistemele, cel puţin cele prezentate, realizează o corespondenţă între două mulţimi de funcţii de aceeaşi natură, motiv pentru care cel mai bun model matematic pentru descrierea lor îl constituie operatorii. În figura 1.47 a se prezintă modelul unui sistem continuu, descris de operatorul S:

$$S : X \longrightarrow Y \ . \qquad \textbf{(1.121)}$$

El realizează o corespondenţă de forma :

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t) \quad sau \quad : \quad y(t) = S\{x(t)\} \quad ; \quad x(t) \in X \quad , \quad y(t) \in Y \quad . \qquad \textbf{(1.122)}$$

Pentru sistemul discret, modelul - figura 1.49 b - este un operator S_d :

$$S_d : X_d \longrightarrow Y_d \quad , \qquad \textbf{(1.123)}$$

ce realizează corespondenţa :

$$x[n] \xrightarrow{S_d} y[n] \quad sau \quad : \quad y[n] = S_d\{x[n]\} \quad ; \quad x[n] \in X_d \quad , \quad y[n] \in Y_d \quad .$$

(1.124)

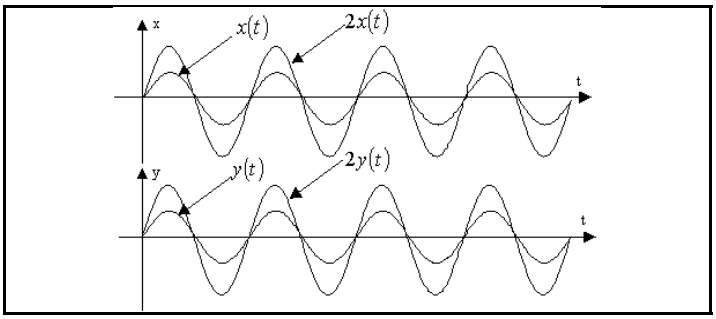


Fig. 1.48 Dublarea semnalului de intrare x(t) al unui sistem omogen, conduce la dublarea semnalului de ieşire, y(t).

Modelele prezentate sunt generale dar neaplicabile direct în practica inginerească. În cele mai multe cazuri se impun modelelor restricţii suplimentare care deşi le fac uneori mai puţin exacte conduc la simplificări esenţiale în utilizarea lor.

În majoritatea cazurilor modelele utilizate în electronică (cel puţin cele numite "de semnal mic") se consideră a fi liniare (aditive şi omogene) ceea ce reprezintă o restricţie severă.

1.2.2 Sisteme liniare

Un sistem se spune că este liniar dacă poate fi modelat cu un operator liniar (aditiv şi omogen):

$$S\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 S\{x_1(t)\} + a_2 S\{x_2(t)\} \qquad \textbf{(1.125)}$$

$$S_d\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 S_d\{x_1[n]\} + a_2 S_d\{x_2[n]\} \quad . \qquad \textbf{(1.126)}$$

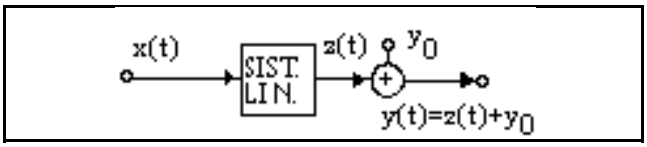


Fig. 1.49 Modelul unui sistem incremental liniar, compus dintr-un sistem liniar şi un sumator.

Pentru astfel de sisteme este valabil principiul suprapunerii efectelor, exprimat matematic prin cele două relaţii anterioare; prima pentru sistemele continue, iar a doua pentru sistemele în timp discret. Pentru a înţelege semnificaţia noţiunii de omogenitate considerăm un sistem continuu cu semnalul de intrare x(t) şi semnalul de ieşire y(t) , y(t) = S{x(t)} - figura 1.48. Dacă semnalul de intrare se dublează -spre exemplu- devenind 2x(t) atunci şi semnalul de ieşire se dublează, devenind 2y(t). O consecinţă importantă a omogenităţii o constituie concluzia că la o excitaţie nulă răspunsul nu poate fi decât nul. Dacă un sistem este excitat cu semnalul ax(t) atunci se obţine răspunsul:

$$y(t) = S\{ax(t)\} = aS\{x(t)\} \quad .$$

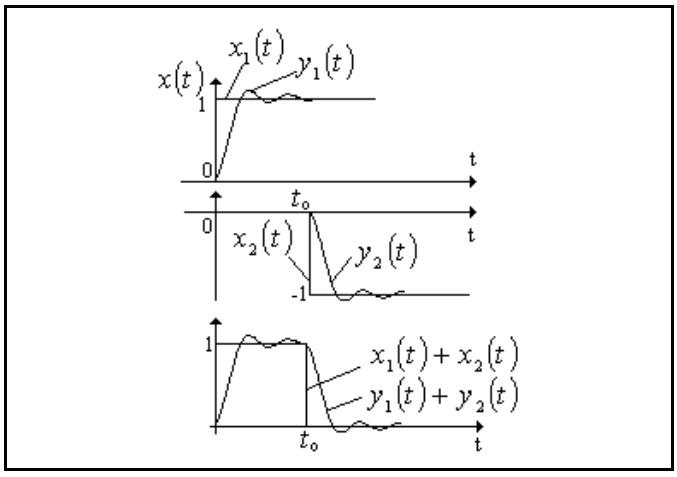


Fig. 1.50 Răspunsul unui sistem liniar la suma a două semnale de intrare este suma celor două răspunsuri parţiale.

Punând a = 0 în această relaţie rezultă că la excitaţia - x(t)=0 răspunsul este nul. Pe lângă sistemele liniare se utilizează în electronică şi aşa numitele sisteme incremental liniare. La aplicarea semnalului de intrare x(t) ≡ 0 , se obţine $y(t)=y_o\neq 0$, dar variaţiile semnalului de ieşire sunt liniare în raport cu variaţiile semnalului de intrare. În figura 1.49 se prezintă schema bloc a unui astfel de sistem incremental liniar, compus dintr-un sistem liniar propriu zis, având ieşirea z(t) şi un sumator care adaugă valoarea de repaus (corespunzător semnalului de intrare nul), y_o:

$$z(t) = S\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\} = a_1S\{x_1(t)\}+a_2S\{x_2(t)\}$$
$$y(t) = y_o+a_1S\{x_1(t)\}+a_2S\{x_2(t)\} \quad .$$

şi deci variaţia ieşirii, sau incrementul satisface relaţia:

$$\Delta y(t) = y(t) - y_o = a_1 S\{x_1(t)\} + a_2 S\{x_2(t)\} \quad . \qquad \textbf{(1.127)}$$

O ilustrare a liniarităţii unui sistem continuu se găseşte în figura 1.50. Dacă sistemul considerat generează răspunsul $y_1(t)$ atunci când excitaţia (semnalul de intrare) este $x_1(t)$ şi răspunsul $y_2(t)$ atunci când excitaţia este $x_2(t)$, aplicând la intrare suma $x_1(t) + x_2(t)$, la ieşire se obţine semnalul sumă $y_1(t) + y_2(t)$.

Şi în cazul sistemelor discrete omogene dacă la intrare se aplică un semnal nul, la ieşire se obţine tot un semnal nul: $x[n] \equiv 0$ şi drept consecinţă: $y[n] \equiv 0$. Şi sistemele discrete pot fi incremental liniare, ca şi sistemele continue.

1.2.3 Sisteme invariante la translaţia în timp

Pentru cele mai multe dintre sistemele întâlnite în practică forma răspunsului nu depinde de momentul de aplicare al semnalului de intrare.

Fie sistemul continuu descris de operatorul S.Dacă :

$$S\{x(t)\} = y(t) \quad si \quad S\{x(t-t_o)\} = y(t-t_o) \quad , \quad \forall\, t_o \in R \quad . \qquad \textbf{(1.128)}$$

sau $x(t) \rightarrow y(t)$ şi $x(t-t_o) \rightarrow y(t-t_o)$, atunci sistemul se numeşte invariant la translaţie (deplasare în timp) sau pe scurt invariant în timp.

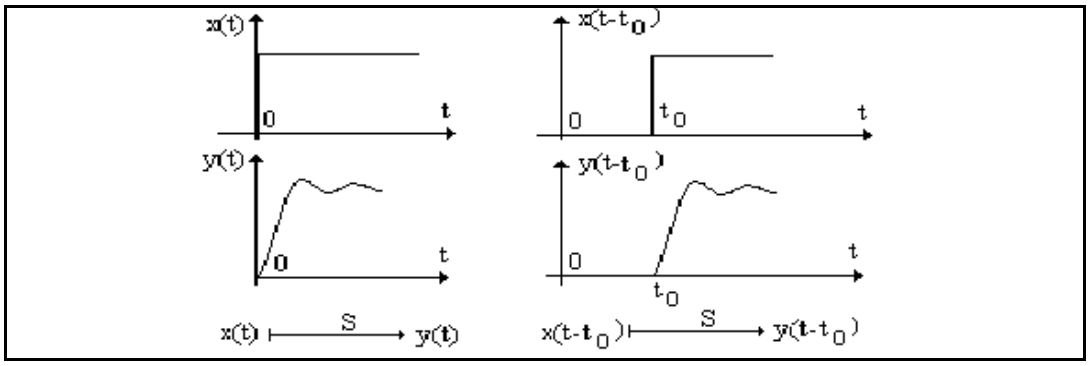


Fig. 1.51 Exemplu de răspuns al unui sistem invariant în timp. Atât semnalul de intrare cât şi semnalul de ieşire sunt deplasate cu aceiaşi mărime.

În cazul unui sistem discret descris de operatorul S_d , proprietatea de invarianţă în timp (sau invarianţă la translaţie) se exprimă prin:

$$S_d\{x[n]\} = y[n] \quad şi \quad S_d\{x[n-n_o]\} = y[n-n_o] \quad , \quad \forall\, n_o \in Z \quad .$$

(1.128')

În figura 1.51 se poate vedea răspunsul unui sistem continuu invariant timp. Excitat cu semnalul x(t) el răspunde generând semnalul y(t). Deplasând cu t_o excitaţia, care devine astfel $x(t-t_o)$, se constată că forma răspunsului generat de sistem este tot cea dinainte atât doar că este deplasată cu t_o , $y(t-t_o)$.

Amplificatoarele, sumatoarele, circuitele de întârziere şi în general circuitele ale căror elemente nu se modifică în timp formează prin interconectare sisteme invariante în timp. Spre deosebire de acestea, sistemele parametrice (amplificatoarele parametrice) spre exemplu, conţinând un element cum ar fi o capacitate ce se modifică (electronic) în timp, nu sunt invariante în timp.

1.2.4 Stabilitatea sistemelor

Vom căuta să dăm în acest subparagraf o reprezentare intuitivă noţiunii de stabilitate, problema urmând a fi reluată după definirea funcţiei pondere a unui sistem precum şi într-un capitol aparte.

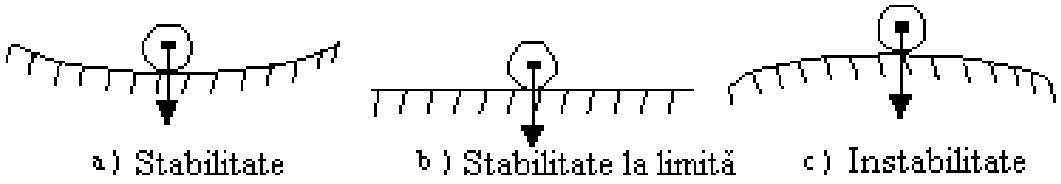


Fig. 1.52 Analogie mecanică pentru explicarea stabilităţii.

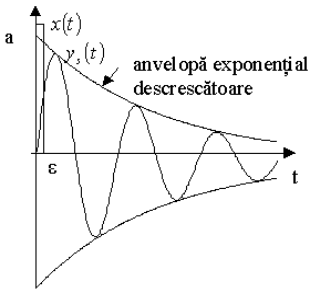


Fig. 1.53 a Răspunsul unui sistem stabil la un semnal de intrare foarte scurt.

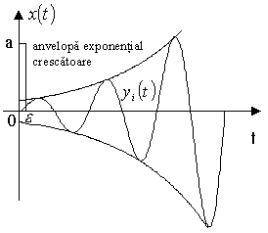


Fig. 1.53 b Răspunsul unui sistem instabil la un semnal de intrare foarte scurt.

Analogia cu o problemă din mecanică ne va permite să înţelegem mai uşor acest concept. Aşa cum se arată în figura 1.52 a plasând o bilă grea într-o scobitură ea va avea o poziţie de echilibru stabilă. Scoasă din poziţia sa de echilibru, bila va efectua mişcări oscilante în jurul poziţiei de echilibru, spre care va tinde în mod asimptotic. Referindu-ne la un sistem electric, dacă la intrare se aplică un impuls de foarte scurtă durată, de forma $x(t) = a[\sigma(t)-\sigma(t-\tau)]$, la ieşire apare un răspuns, $y_s(t)$, aşa cum se arată în figura 1.53 (indicele s are semnificaţia de sistem stabil). Deoarece pentru $t > \varepsilon$ excitaţia este nulă ar trebui ca, măcar asimptotic, răspunsul să se anuleze. Acesta este cazul sistemului cu răspunsul schiţat în figura 1.53 a şi el corespunde sistemului mecanic din figura 1.52 a.

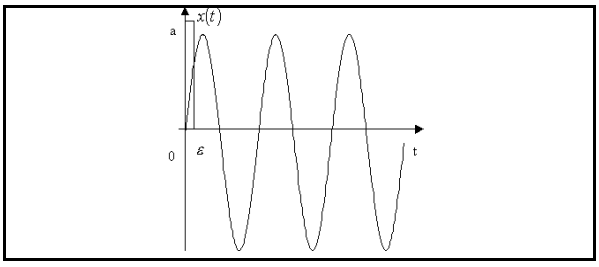


Fig. 1.54 Răspunsul unui sistem stabil la limită la un impuls foarte scurt.

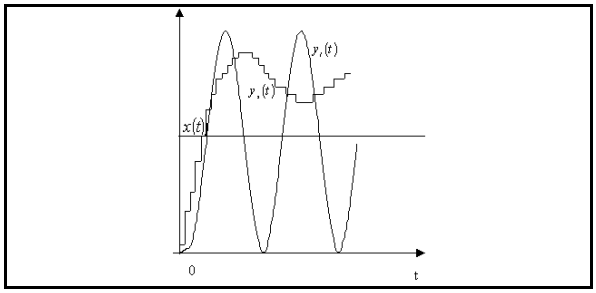


Fig. 1.55 Răspunsul unui sistem stabil $y_s(t)$ şi a unui sistem stabil la limită $y_l(t)$ la un semnal treaptă unitate.

Sistemul mecanic din figura 1.52 c este evident instabil. Odată scoasă din starea de echilibru, bila va aluneca tot mai repede pe flancul convexităţii. Sistemul electric cu răspunsul din figura 1.53 b, excitat cu acelaşi impuls de scurtă durată, nu are un răspuns ce tinde spre zero pentru $t > \varepsilon$, deşi excitaţia este nulă. Semnalul de la ieşire, $y_i(t)$ (indicele i semnifică sistem instabil) tinde să crească indefinit de mult. Este situaţia echivalentă sistemului mecanic din figura 1.52 c. Evident într-un sistem fizic va apărea în final o limitare a mărimii semnalului de ieşire, ca urmare a tensiunilor de alimentare finite. Teoretic mărimea de ieşire creşte indefinit. Sistemul mecanic din figura 1.52 b, constând dintr-o bilă grea aşezată pe un plan perfect orizontal, este un sistem stabil la limită (are o stabilitate "indiferentă"). Sistemul electric echivalent acestuia, excitat cu un impuls scurt, ce se anulează pentru $t > \varepsilon$ nu are la ieşire un semnal ce tinde spre zero dar el nici nu creşte ci rămâne staţionar ca mărime - vezi figura 1.54. Semnalul $y_l(t)$ corespunde unui sistem stabil la limită. In figura 1.55 se arată răspunsul unui sistem stabil $y_s(t)$ respectiv a unui sistem stabil la limită $y_l(t)$ la

excitaţia σ(t). Vom spune, în general, că un sistem este stabil dacă aplicând la intrare un semnal mărginit, la ieşire se va obţine tot un semnal mărginit. O astfel de stabilitate este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de "**BIBO stabilitate**" (de la **B**ounded **I**nput **B**ounded **O**utput) sau "**MIME stabilitate**" (**M**ărginit la **I**ntrare **M**ărginit la i**E**şire). Există şi alte genuri de stabilitate a sistemelor dar acestea depăşesc cadrul acestui curs. În ceea ce priveşte sistemele discrete distingem aceleaşi tipuri ca şi în cazul sistemelor continue. Vom exemplifica prin răspunsul unor astfel de sisteme la impulsul unitar discret, x[n]=δ[n]. De data aceasta, vezi figura 1.56, răspunsul nu va avea caracter oscilant (deşi ar putea avea) ci un caracter exponenţial (cum ar fi putut să aibă şi răspunsurile din figurile 1.53, 1.54 şi 1.55). Răspunsul $y_s[n]$ corespunde unui sistem stabil, răspunsul $y_i[n]$ corespunde unui sistem instabil iar răspunsul $y_l[n]$ unui sistem stabil la limită. Dintre aceste semnale numai răspunsul $y_s[n]$, nu şi celelalte două, tinde spre 0 atunci când excitaţia a dispărut.

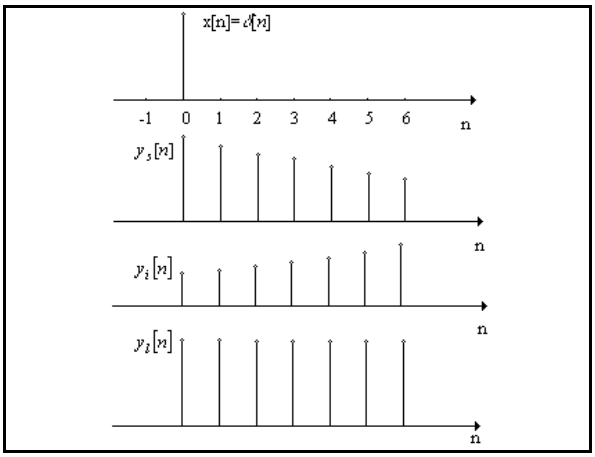


Fig. 1.56 Răspunsurile unor sisteme : stabil, instabil şi stabil la limită la semnalul δ[n].

1.2.5 Cauzalitatea sistemelor

În sistemele fizic realizabile dacă între mărimea de intrare şi cea de ieşire există o relaţie de tip "cauză - efect" atunci răspunsul nu poate fi decât ulterior excitaţiei. Acesta este cazul sistemelor realizabile în practică. În figura 1.57 se arată răspunsul a două sisteme la aplicarea aceleiaşi excitaţii, $x(t) = \sigma(t)$. Pentru $t < 0$, $x(t) \equiv 0$ ceea ce justifică răspunsul nul $y_1(t) \equiv 0$ pentru $t < 0$. Numai după aplicarea excitaţiei sau, la limită, odată cu aplicarea acesteia poate apare răspunsul unui sistem fizic realizabil. Se spune că sistemul având răspunsul de tip $y_1(t)$ este cauzal. Toate sistemele realizabile fizic sunt cauzale. Pe lângă sistemele cauzale, în teoria semnalelor se utilizează uneori în scopuri teoretice şi sisteme care nu sunt cauzale. După cum rezultă din figura 1.57, sistemul având răspunsul $y_2(t)$ "anticipează" faptul că va fi excitat. Răspunsul apare înaintea excitaţiei şi sistemul se numeşte necauzal. Sistemele necauzale nu sunt realizabile fizic.
Se mai spune că valoarea semnalului de ieşire al unui sistem cauzal la un

moment de timp dat depinde numai de valoarea actuală a semnalului de intrare şi de valorile trecute dar nicidecum de valorile viitoare. Un sistem necauzal are un semnal de ieşire a cărui valoare, la un moment de timp dat depinde de valoarea actuală a semnalului de intrare, de valorile trecute precum şi de valorile viitoare ale acestuia. Un astfel de sistem are deci calitatea de a "ghici" evoluţia, ulterioară unui moment dat, a semnalului de intrare.

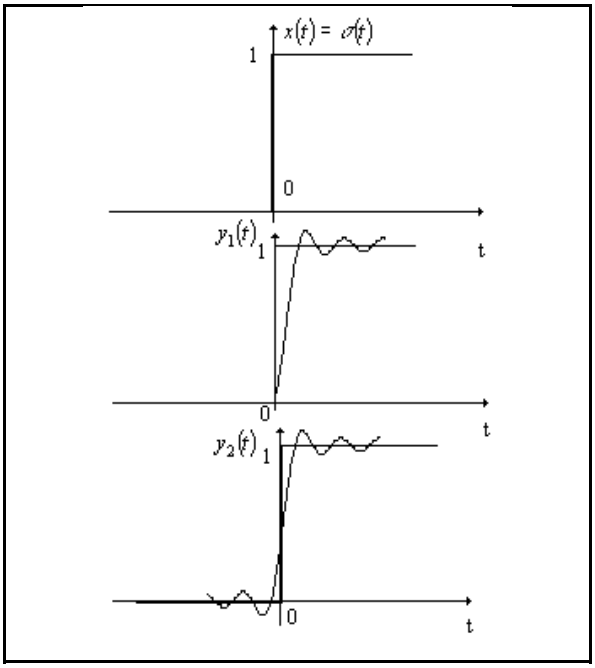


Fig. 1.57 Răspunsul unui sistem cauzal $y_1(t)$ şi al unui sistem necauzal $y_2(t)$ la excitaţia $\sigma(t)$.

Cauzalitatea se defineşte asemănător şi în cazul sistemelor în timp discret. Pentru ilustrare, în figura 1.58 se prezintă răspunsul unui sistem discret cauzal, $y_1[n]$ şi răspunsul unui sistem discret necauzal, $y_2[n]$ la excitaţia $\sigma[n]$. Se observă că răspunsul sistemului cauzal începe deodată cu aplicarea semnalului de intrare (sau eventual după) pe când răspunsul sistemului necauzal începe încă înainte ca excitaţia să fi fost aplicată. Sistemele fizic implementabile sunt numai cele cauzale. Celelalte au doar o valoare teoretică. Vom menţiona aici că pot fi făcute predicţii ale comportamentului unui semnal pe baza cunoaşterii caracteristicilor sale statistice şi a unei istorii a semnalului dar acestea sunt sisteme aleatoare şi dau doar o estimare a valorii viitoare a semnalului şi nu o valoare sigură. Cu cât timpul de predicţie este mai mare cu atât cresc erorile de predicţie. De altfel vânătorul care doreşte să împuşte o raţă care zboară, nu trage ochind-o direct, ci ocheste un punct aflat puţin în faţa ei, făcând deci o estimare a locului

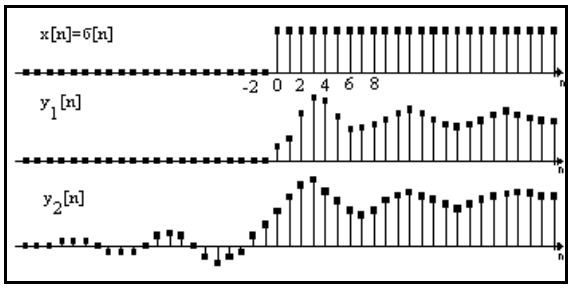


Fig. 1.58 Răspunsul la semnalul treaptă $\sigma[n]$ a unui sistem discret cauzal, $y_1[n]$ şi a unui sistem necauzal, $y_2[n]$.

unde se va afla raţa, în momentul în care glontele ajunge în dreptul ei. Dovadă că predicţia poate greşi este faptul că nu toate raţele după care se trage sunt omorâte. Se pare că prima aplicaţie a predicţiei a fost în cadrul artileriei antiaeriene.

1.3 Sisteme caracterizate de ecuaţii diferenţiale sau cu diferenţe finite liniare şi cu coeficienţi constanţi

Circuitele cu constante concentrate, utilizate la frecvenţe relativ joase, pot fi caracterizate - ca funcţionare - prin ecuaţii diferenţiale care au de cele mai multe ori coeficienţi constanţi.

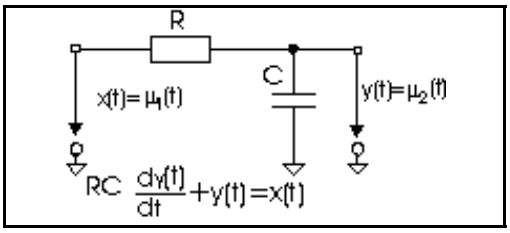


Fig. 1.59 Sistem descris printr-o ecuaţie diferenţială de ordin I.

Pentru circuitul din figura 1.59 se poate stabili că între tensiunea de intrare x(t) şi tensiunea de ieşire y(t) (sarcina fiind considerată infinită) există o relaţie de legătură de forma:

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)\quad . \qquad \textbf{(1.129)}$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul I, cu coeficienţi constanţi.

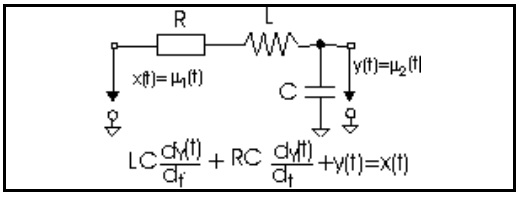


Fig. 1.60 Sistem descris printr-o ecuaţie diferenţială de ordin II.

În figura 1.60 se prezintă un sistem de ordin superior. Semnalele (tensiunile) de intrare şi de ieşire ale acestui sistem sunt legate printr-o ecuaţie diferenţială de ordinul II, cu coeficienţi constanţi:

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2}+RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)\quad . \qquad \textbf{(1.130)}$$

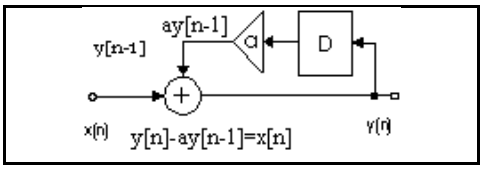


Fig. 1.61 Sistem discret descris printr-o ecuaţie cu diferenţe finite de ordinul I.

O constatare care se poate desprinde din cele două exemple, este aceea că pentru un circuit pasiv ordinul ecuaţiei diferenţiale este dat de numărul elementelor reactive (L, C) din structura sa. În figura 1.61 se prezinta unui sistem discret. În componenţa sa intră un bloc de întârziere cu un eşantion, D, un bloc de amplificare cu a precum şi un sumator. Se poate scrie că y[n] = x[n]+ay[n-1] de unde:

$$y[n] - a\,y[n-1] = x[n] \quad . \tag{1.131}$$

Între y[n] şi x[n] există deci o legătură descrisă de o ecuaţie cu diferenţe finite, de ordinul I cu coeficienţi constanţi. Mărind numărul de blocuri de întârziere într-o structură de tipul celei din figura 1.61 creşte şi ordinul ecuaţiei ce descrie sistemul.

1.3.1 Sisteme continue caracterizate de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

În general, un sistem continuu este caracterizat de o ecuaţie diferenţială:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad ; \quad a_N \neq 0 \quad . \tag{1.132}$$

Ordinul ecuaţiei este dat de cel mai mare ordin al derivatei semnalului de ieşire, adică N. În unele cazuri se consideră N = M , subînţelegând că unii coeficienţi sunt nuli. Rezolvarea ecuaţiei impune cunoaşterea a N condiţii iniţiale. Pentru ca sistemul să fie liniar, cauzal şi invariant în timp, se arată că starea iniţială a sistemului, considerând că aplicarea semnalului de intrare nenul are loc la momentul $t=t_o$ (în sensul că $x(t) \equiv 0$ pentru $t < t_o$), trebuie să îndeplinească N condiţii de repaus iniţial:

$$y(t_o) = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_o} = \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=t_o} = \ldots = \left.\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}\right|_{t=t_o} = 0 \quad . \tag{1.133}$$

Câteva cazuri particulare de sisteme continue

În practică sunt interesante câteva sisteme particulare. Aceste cazuri sunt prezentate în continuare:

i) Sistemul proporţional ideal:

$$y(t) = a\,x(t) \quad ; \quad a \in \mathbb{R} \quad . \tag{1.134}$$

El asigură doar multiplicarea (amplificarea sau atenuarea) semnalului de intrare cu o constantă. Valoarea curentă a semnalului de ieşire depinde exclusiv de valoarea curentă a semnalului de intrare. În acest sens sistemul este "fără memorie" sau "instantaneu". Simbolul acestui sistem este reprezentat în figura 1.62 a. Poate fi realizată practic o bună aproximare a acestui sistem.

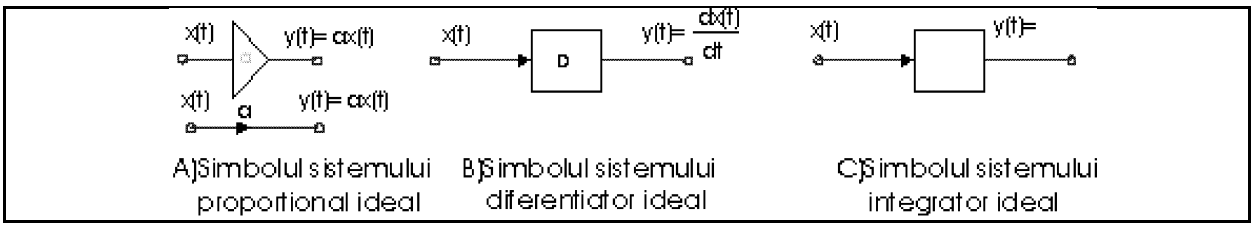


Fig. 1.62 Simbolurile sistemelor: proporţional ideal (a); diferenţiator ideal (b); integrator ideal (c).

ii) Sistemul diferenţiator ideal:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad . \tag{1.135}$$

Se pot realiza sisteme fizice care aproximează destul de bine un sistem de diferenţiere ideal. Simbolul său este prezentat în figura 1.62 b.

iii) Sistemul integrator ideal:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad . \tag{1.136}$$

Şi acest sistem se poate aproxima, chiar mai bine decât diferenţiatorul ideal, cu circuite realizabile. Simbolul său apare în figura 1.62 c. Sistemele de tipul integratorului sau, în general, sistemele la care valoarea semnalului de ieşire depinde de istoria comportării sistemului poartă denumirea de sisteme "dinamice". Sistemul proporţional ideal nu este un sistem dinamic. El este un sistem de tip "instantaneu".

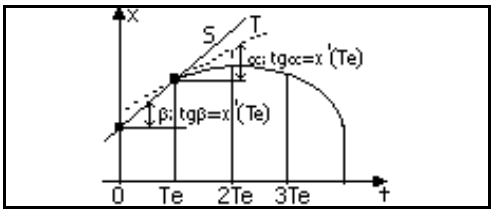


Fig. 1.63 Panta secantei S aproximează panta tagentei T.

1.3.2 Sisteme discrete caracterizate de ecuaţii cu diferenţe finite liniare şi cu coeficienţi constanţi

Ecuaţiile cu diferenţe finite pot apare ca urmare a aproximării ecuaţiei diferenţiale care caracterizează un sistem în timp continuu prin discretizare în timp. Astfel, dacă x(t) este un semnal supus discretizării, aşa cum se poate observa studiind figura 1.63 derivata x' în punctul T_e poate fi aproximată prin panta secantei, calculată utilizând valorile x(0) şi $x(T_e)$:

$$x'(T_e) \cong \frac{x(T_e) - x(0)}{T_e} \quad ,$$

sau într-un punct nT_e oarecare :

$$x'(nT_e) \cong \frac{x(nT_e) - x(nT_e - T_e)}{T_e} \quad .$$

Cum însă $x(nT_e) = x[n]$ rezultă că:

$$x'(nT_e) \cong \frac{x[n] - x[n-1]}{T_e} \quad . \qquad \textbf{(1.137)}$$

Se poate acum aproxima derivata a doua $x''(nT_e)$ prin:

$$x''(nT_e) \cong \frac{x'(nT_e) - x'(nT_e - T_e)}{T_e} \cong \frac{\frac{x(nT_e) - x(nT_e - T_e)}{T_e} - \frac{x(nT_e - T_e) - x(nT_e - 2T_e)}{T_e}}{T_e} \quad .$$

de unde se deduce:

$$x''(nT_e) \cong \frac{x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]}{T_e^2} \qquad \textbf{(1.138)}$$

Prin inducţie completă se poate arăta că :

$$x^{(k)}(nT_e) \cong \frac{1}{T_e^k} \sum_{p=0}^{k} C_k^p x[n-p] \quad ; \quad p \in \{0,1,...k\} \quad . \qquad \textbf{(1.139)}$$

Substituind astfel de forme în ecuaţia diferenţială (1.132) se obţine o aproximare:

$$\sum_{k=0}^{N} A_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} B_k x[n-k] \quad A_N \neq 0 \quad , \qquad \textbf{(1.140)}$$

ordinul ecuaţiei fiind N. Există şi ecuaţii cu diferenţe finite ce caracterizează sisteme intrinsec discrete. Ele constituie o descriere exactă a sistemului discret.

Câteva cazuri particulare de sisteme discrete

i) Sistemul proporţional :

$$y[n] = ax[n] \quad , \quad a \in \mathbb{R} \quad , \tag{1.141}$$

este implementabil prin multiplicarea, de obicei numerică, cu constanta a (în ipoteza că mărimile sunt şi cuantizate). Simbolul sistemului proporţional este acelaşi cu cel al sistemului continuu corespunzător - figura 1.62 a. În cazul în care multiplicarea se realizează cu sisteme de calcul numeric, valoarea a nu poate fi orice număr real ci doar o aproximare a acestuia care depinde de precizia sistemului de calcul folosit.

ii) Sistemul discret de diferenţiere:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \tag{1.142}$$

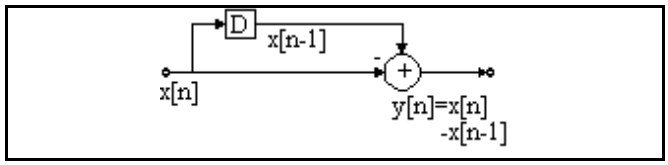


Fig. 1.64 Sistemul discret de diferenţiere.

are structura din figura 1.64. Blocul de întârziere cu un eşantion D, se simbolizează la fel ca şi blocul de derivare (figura 1.62 b) doar că semnificaţia sa este alta. Sumatorul din figura 1.64 este, de regulă un sumator numeric.

iii) Sistemul discret de însumare (acumulatorul):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{1.143}$$

este echivalentul discret al integratorului. Se realizează printr-un dispozitiv de însumare numerică ce acumulează rezultatele, numit şi acumulator (termenul este preluat din domeniul calculatoarelor). Şi în cazul sistemelor discrete se face distincţia dintre sistemul instantaneu şi sistemele dinamice, cum este şi cel din figura 1.61. Soluţionarea ecuaţiei cu diferenţe finite (1.140) cere cunoaşterea a N valori iniţiale ale semnalului y[n] şi anume : y[-N], y[-N+1],..., y[-1] . Dacă toate aceste valori sunt nule, exprimând starea de repaus iniţial a sistemului, considerând că excitaţia se aplică la n = 0 , adică x[n] ≡ 0 pentru n < 0 , atunci sistemul corespunzător este liniar, invariant în timp şi cauzal.

Exemplificări

1. *Fie sistemul continuu descris de ecuaţia diferenţială:*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2t\frac{dy(t)}{dt} + t^2 y(t) = x(t) \quad .$$

având condiţii iniţiale nule. Vom examina în continuare caracteristicile sistemului:

i) Liniaritatea sistemului.

Fie $x_1(t)$, $x_2(t)$ semnale de intrare ce determină la ieşire pe $y_1(t)$ respectiv $y_2(t)$ satisfăcând ecuaţiile diferenţiale :

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2t\frac{dy_1}{dt} + t^2 y_1 = x_1 \;\; ; \;\; \frac{d^2y_2}{dt^2} + 2t\frac{dy_2}{dt} + t^2 y_2 = x_2 \quad .$$

Însumând cele două relaţii obţinem :

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_1 + y_2) + 2t\frac{d}{dt}(y_1 + y_2) + t^2(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 \quad .$$

Aplicând la intrare $x_1(t) + x_2(t)$ la ieşire se obţine $y_1(t)+y_2(t)$. Sistemul este aditiv. Omogenitatea se probează imediat, arătând că dacă x(t) la intrare determină la ieşire pe y(t) atunci ax(t) la intrare dă la ieşire ay(t) . Multiplicând cu a se obţine:

$$\frac{d^2}{dt^2}(ay) + 2t\frac{d}{dt}(ay) + t^2(ay) = ax \quad ,$$

adică ceea ce trebuia arătat. Sistemul este liniar.

ii) Invarianţa la deplasare.

Fie y(t) răspunsul sistemului la semnalul de intrare x(t) (x(t) —> y(t)). Se pune întrebarea dacă $x(t-t_o)$ —> $y(t-t_o)$? Dacă sistemul ar fi invariant în timp (la deplasare) atunci ar trebui să satisfacă ecuaţia:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t-t_o) + 2t\frac{dy}{dt}(t-t_o) + t^2 y(t-t_o) = x(t-t_o) \quad .$$

Deoarece în ecuaţia iniţială trebuie să înlocuim t —> $t-t_o$ pentru a determina răspunsul $y_1(t)$ la excitaţia deplasată $x(t-t_o)$, obţinem:

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + 2(t-t_o)\frac{dy_1(t)}{dt} + (t-t_o)^2 y_1(t) = x(t-t_o) \quad .$$

Comparând ultima relaţie cu cea de mai sus rezultă că $y_1(t) \neq y(t\text{-}t_o)$ ca urmare a faptului că ecuaţia nu are coeficienţii constanţi ci funcţii de timp.

2. Fie sistemul dinamic descris de ecuaţia diferenţială liniară şi cu coeficienţi constanţi:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad .$$

El este liniar şi invariant timp. Rămâne să vedem în ce condiţii iniţiale sistemul este şi cauzal.

Fie acest sistem excitat cu semnalul $x(t) = K\cos(\omega_o t)\sigma(t)$, $x(t) \equiv 0$ pentru $t<0$. Se caută răspunsul sistemului, $y(t)$ la acest semnal de intrare. Soluţia ecuaţiei diferenţiale obţinute este o sumă dintre o soluţie a ecuaţiei omogene, $y_l(t) = y_{tr}(t)$, şi o soluţie particulară, $y_f(t) = y_s(t)$, a ecuaţiei date.

Soluţia de regim liber (tranzitoriu) este dată de :

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \; ; \quad \frac{dy}{y} = -2dt \quad ; \quad y_l(t) = Ae^{-2t} \quad .$$

Pentru a găsi soluţia forţată (de regim staţionar) se caută o soluţie particulară a ecuaţiei :

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = K\cos\omega_o t \quad , \quad t > 0 \quad .$$

Se observă că membrul drept poate fi pus şi sub forma:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = Re\left\{Ke^{j\omega_o t}\right\} \quad , \quad t > 0 \quad .$$

Se caută pentru $y_f(t)$ o expresie de forma:

$$y_f(t) = Re\left\{Be^{j\omega_o t}\right\} \quad , \quad t > 0$$

Substituind în ecuaţie se obţine :

$$j\omega_o B + 2B = K \quad sau \quad B = \frac{K}{j\omega_o + 2} = \frac{K}{\sqrt{4+\omega_o^2}}\, e^{-j\theta} \quad ,$$

unde s-a notat: $\theta = arctg(\omega_o/2)$ *. În consecinţă, soluţia de regim forţat devine :*

$$y_f(t) = Re\left\{ \frac{K}{\sqrt{4+\omega_o^2}} e^{j(\omega_o t - \theta)} \right\} = \frac{K}{\sqrt{4+\omega_o^2}} \cos(\omega_o t - \theta) \quad ; \quad t > 0 \quad .$$

Am stabilit deci că, pentru $t > 0$ *, soluţia ecuaţiei este:*

$$y(t) = Ae^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_o^2}} \cos(\omega_o t - \theta) \quad , \quad t > 0 \quad .$$

Pentru $t < 0$ *excitaţia este nulă iar soluţia este numai cea de regim liber, corespunzătoare ecuaţiei omogene:*

$$y(t) = Ce^{-2t} \quad , \quad t < 0 \quad .$$

Am obţinut deci:

$$y(t) = \begin{cases} Ae^{-2t} + \dfrac{K}{\sqrt{4+\omega_o^2}} \cos(\omega_o t - \theta) \ , & t \geq 0 \\ Ce^{-2t} \ , & t < 0 \end{cases} .$$

Continuitatea soluţiei la $t = 0$ *conduce la :* $A + \dfrac{K\cos\theta}{\sqrt{4+\omega_o^2}} = C$ *. Fie acum* $y(0)=y_o$*,*

condiţia iniţială. Rezultă imediat $C = y_o$ *şi eliminând A rezultă soluţia :*

$$y(t) = \begin{cases} y_o e^{-2t} + \dfrac{K}{\sqrt{4+\omega_o^2}} \left[\cos(\omega_o t - \theta) - e^{-2t}\cos\theta \right] \ , & t \geq 0 \\ y_o e^{-2t} \ , & t < 0 \end{cases} .$$

Soluţia poate fi rescrisă şi sub o altă formă, ţinând cont de definiţia semnalului treaptă unitară, $\sigma(t)$*:*

$$y(t) = y_o e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{4+\omega_o^2}} \left[\cos(\omega_o t - \theta) - e^{-2t}\cos\theta\right]\sigma(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Dar omogenitatea soluţiei impune ca pentru K = 0 (semnal de excitaţie nul) răspunsul să fie nul, adică:

$$y(t) = y_o\, e^{-2t} \equiv 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad .$$

Din această ultimă condiţie rezultă că omogenitatea cere $y_o = 0$, condiţia iniţială nulă. Dacă se respectă această condiţie atunci sistemul nu este numai liniar şi omogen, invariant în timp ci şi cauzal deoarece soluţia y(t) ia forma :

$$y(t) = \frac{K}{\sqrt{4+\omega_o^2}} \left[\cos(\omega_o t - \theta) - e^{-2t}\cos\theta\right]\sigma(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Se observă că ea nu precede în timp semnalul de excitare aplicat la intrarea sistemului $x(t) = K\cos\omega_o t\sigma(t)$, ceea ce justifică afirmaţia despre cauzalitatea sistemului. Se poate sesiza importanţa condiţiei iniţiale nule.

3. Un sistem dinamic discret, asemănător sistemului dinamic continuu de la punctul anterior, este cel descris de ecuaţia cu diferenţe finite liniară şi cu coeficienţi constanţi:

$$y[n] - 0{,}5y[n-1] = x[n] \quad .$$

Considerăm că sistemului i se aplică la intrare semnalul $x[n] = K(\cos\Omega n)\sigma[n]$, nenul începând cu n = 0. Soluţia ecuaţiei cu diferenţe finite este suma a doi termeni $y_l[n]+y_f[n]$. Soluţia ecuaţiei omogene $y[n]-0{,}5y[n-1] = 0$ este de forma $y_l[n]=A(0{,}5)^n$.

Pentru $n \geq 0$ avem:

$$y[n] - 0{,}5 \cdot y[n-1] = K\cos\Omega n = Re\left\{Ke^{j\Omega n}\right\} \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

şi se caută soluţia de regim forţat de forma $y_f[n] = Re\{Be^{j\Omega n}\}$. Substituind în ecuaţie ajungem la:

$$Be^{j\Omega n} - 0{,}5 \cdot Be^{j\Omega(n-1)} = Ke^{j\Omega n} \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

sau $B(1-0{,}5e^{-j\Omega}) = K$, de unde: $B = \frac{K}{\sqrt{1{,}25 - \cos\Omega}} e^{-j\theta}$, *în care s-a notat:*

$\theta = arctg \frac{0{,}5\sin\Omega}{1 - 0{,}5\cos\Omega}$. *În final, soluţia* $y_f[n]$ *devine:*

$$y_f[n] = \frac{K}{\sqrt{1{,}25 - \cos\Omega}} \cos(\Omega n - \theta) \quad , \quad n \geq 0 \quad .$$

Prin urmare, pentru n ≥ 0 soluţia ecuaţiei este suma celor două soluţii:

$$y[n] = A \cdot (0{,}5)^n + \frac{K}{\sqrt{1{,}25 - \cos\Omega}} \cos(\Omega n - \theta) \quad , \quad n \geq 0 \quad .$$

Când n < 0 excitaţia este nulă şi deci este valabilă numai soluţia de regim liber: $y[n] = C\ 0{,}5^n$, $n < 0$. *Am găsit că:*

$$y[n] = \begin{cases} A \cdot (0{,}5)^n + \frac{K}{\sqrt{1{,}25 - \cos\Omega}} \cos(\Omega n - \theta) & , \ n \geq 0 \\ C \cdot 0{,}5^n & , \ n < 0 \end{cases} .$$

Dar pentru n < 0 , $x[n] \equiv 0$ *, deci e necesar ca* $y[n] \equiv 0$ *pentru n < 0 . E suficient să impunem doar y[-1] = 0 .Se deduce imediat că C = 0 . Impunând acum condiţia de omogenitate, dacă se ia K = 0 ,* $x[n] \equiv 0$ *şi pentru n ≥ 0 .Aceasta atrage după sine că şi A = 0 . Rămîne deci soluţia :*

$$y[n] = \frac{K}{\sqrt{1{,}25 - \cos\Omega}} \left[\cos(\Omega n - \theta)\right] \sigma[n] \quad ,$$

dovedind că sistemul este liniar şi cauzal.

Observaţie *Condiţia de repaus iniţial a sistemului discret nu se impune lui y[0] ci lui y[-1] (şi dacă e cazul şi celorlaltor valori spre stînga: y[-2], y[-3], etc).*

Problema 1.

a). Sunt ortogonale semnalele sin ($m\omega_0 t$) şi sin ($n\omega_0 t$) pe intervalul (o,T) cu $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, *m, n* $\in Z$ *? Dar ortonormate?*

b). Repetaţi punctul a) pentru funcţiile $\varphi_m(t)$ *şi* $\varphi_n(t)$ *unde:*

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}[\ \cos\ (k\omega_0 t)\ +\ \sin\ (k\omega_0 t)\ ]\ \ , k \in Z$$

c). Demonstraţi că funcţiile $\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ *sunt ortogonale pe orice interval de lungime* $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. *Sunt ele şi ortonormate ?*

d). Sunt ortogonale semnalele $\varphi_k(t)$ *definite cu relaţia de mai jos?*

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[\sigma\left(t - kT + \frac{T}{2}\right) - \left(t - kT - \frac{T}{2}\right)\right]\ \ , k \in Z$$

Dar ortonormate? Este totală mulţimea $\{\varphi_k(t)\}$, $k \in Z$ *pe spaţiul* $L^2(\Re)$*?*

e). Demonstraţi că părţile pară şi impară ale oricărui semnal x(t), $x_i(t)$ *şi* $x_p(t)$, *sunt ortogonale pe orice interval de forma (-T, T).*

Rezolvare:

a). $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $m, n \in Z$

$$\int_0^T \sin(m\omega_0 t)\cdot\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^T \cos[(m-n)\omega_0 t]dt - \int_0^T \cos[(m+n)\omega_0 t]dt\right]$$

$\alpha \neq 0$

$$\int_0^T \cos(\alpha\omega_0 t)dt = \frac{1}{\alpha\omega_0}\int_0^T d(\sin\alpha\omega_0 t) = \frac{1}{\alpha\omega_0}[\sin(\alpha\cdot 2\pi) - 0] = 0$$

$\alpha = 0$

$$\int_0^T \cos(\alpha\omega_0 t)dt = \int_0^T dt = T$$

Deci:

$$\langle \sin(m\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t) \rangle = \begin{cases} o \ , & m \neq n, \ \ m \neq -n \\ T \ , & m = n \\ -T \ , & m = -n \end{cases}$$

Rezultă că semnalele considerate nu sunt ortogonale. Ca urmare, ele nu sunt nici ortonormate.

b).

$$\langle \varphi_m(t), \ \ \varphi_n(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T [\cos(m\omega_0 t) + \sin(m\omega_0 t)] \cdot [\cos(n\omega_0 t) + \sin(n\omega_0 t)] dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^T \cos(m\omega_0 t)\cdot\cos(n\omega_0 t)dt + \int_0^T \cos(m\omega_0 t)\cdot\sin(n\omega_0 t)dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^T sin(m\omega_0 t)\cdot cos(n\omega_0 t)dt + \int_0^T sin(m\omega_0 t)\cdot sin(n\omega_0 t)dt \right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^T \cos[(m-n)\omega_0 t]dt + \int_0^T \sin[(m+n)\omega_0 t]dt \right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\frac{1}{(m-n)\omega_0}\int_0^T d[\sin[(m-n)\omega_0 t]] - \frac{1}{(m+n)\omega_0}\int_0^T d[\cos[(m+n)\omega_0 t]]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{(m-n)}[\sin[(m-n)2\pi]] - \frac{1}{(m+n)}[\cos[(m+n)2\pi] - 1]\right\} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \ \ m \neq -n \\ A, & m = n \\ B, & m = -n \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{T}\int_0^T [\cos(m\omega_0 t) + \sin(m\omega_0 t]^2 \ dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^T \cos^2(m\omega_0 t)dt + \int_0^T \sin^2(m\omega_0 t)dt + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^T \sin(m\omega_0 t)\cdot\cos(m\omega_0 t)dt \right] = \frac{1}{T}\left[\int_0^T dt + \int_0^T \sin(2m\omega_0 t)dt \right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[T - \frac{1}{2m\omega_0}\int_0^T d[\cos(2m\omega_0 t)]\right] = 1 - \frac{1}{4m\pi}[\cos(4m\pi) - 1] = 1 \quad , \ \forall \ \ m \neq 0$$

Pentru m = 0

$$A = \frac{1}{T} \cdot T = 1$$

$$B = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\cos^2(m\omega_0 t) - \sin^2(m\omega_0 t)\right]dt = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(2m\omega_0 t)dt = \frac{1}{2m\omega_0 T}\int_0^T d\left[\sin(2m\omega_0 t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2m\omega_0 T}\left[\sin(2m\omega_0 T)\Big|_0^T\right] = 0 \quad , \quad m \neq 0$$

Dacă m = 0 atunci B = 1.

Deci:

$$\langle \varphi_m(t), \varphi_n(t) \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Funcţiile φ_k (t) sunt ortogonale şi ortonormate.

c).

$$\langle \varphi_k(t), \varphi_l(t) \rangle = \int_0^T e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jl\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{j(k-l)\omega_0 t} dt = \frac{1}{j(k-l)\omega_0}\int_0^T d\left[e^{j(k-l)\omega_0 t}\right] =$$

$$= \frac{1}{j(k-l)\omega_0}\left[e^{j(k-l)\omega_0 t}\Big|_0^T\right] = \frac{1}{j(k-l)\omega_0}\left[e^{j(k-l)2\pi} - 1\right] = 0, \quad k \neq l$$

Pentru k = l

$$\langle \varphi_k(t), \varphi_l(t) \rangle = \int_0^T dt = T$$

Deci:

$$\langle \varphi_k(t), \varphi_l(t) \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ T, & k = l \end{cases}$$

Funcţiile sunt ortogonale, dar nu sunt ortonormate.

d). În figura următoare se prezintă 2 elemente ale mulţimii considerate.

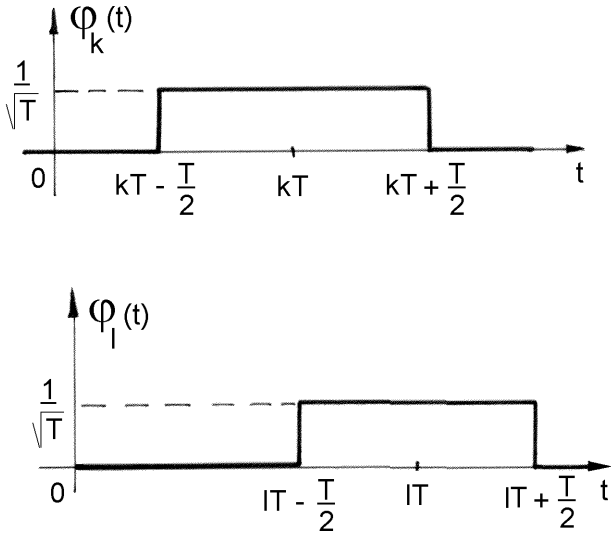


Fig.1.1. Două elemente ale mulţimii considerate.

Pentru $k \neq l$ *rezultă* $\varphi_k(t) \cdot \varphi_l(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi_k(t),\ \varphi_l(t) \rangle = 0$

Pentru $k = l$ *rezultă* $\varphi_k(t) \cdot \varphi_k(t) = \frac{1}{T}\left[\sigma\left(t - kT + \frac{T}{2}\right) - \sigma\left(t - kT - \frac{T}{2}\right)\right]$

$$\langle \varphi_k(t),\ \varphi_k(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{kT-\frac{T}{2}}^{kT+\frac{T}{2}} dt = 1$$

În concluzie, semnalele $\varphi_k(t)$ *sunt ortogonale şi ortonormate.*
Semnalul tri (t) $\in L^2(\Re)$*, având variaţia temporală din figura de mai jos, nu se poate exprima ca o combinaţie liniară de elemente ale mulţimii* $\{ \varphi_k(t) \}_{k \in \Re}$*.*
Deci, mulţimea considerată nu este totală pe $L^2(\Re)$*.*

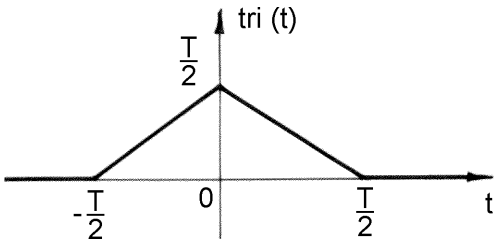


Fig.1.2. Un exemplu de semnal care nu aparţine mulţimii considerate.

e). $\left\langle x_i(t),\ x_p(t)\right\rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t)\cdot x_p(t)dt = 0$

Se constată că semnalul y(t) = x_i(t) · x_p(t) este impar şi ca urmare $x_i(t) \perp x_p(t)$.

Problema 2.

Un sistem liniar este caracterizat de rãspunsurile sale $h_k[n]$ la impulsuri întârziate $\delta[n - k]$. Pentru fiecare dintre urmãtoarele alegeri ale lui $h_k[n]$ determinați legãtura dintre intrarea x[n] şi ieşirea y[n] din sistem.

a). $h_k[n] = 2\cdot\delta[n - k];$

b). $h_k[n] = \delta[n - 2k];$

c). $h_k[n] = 2\cdot\delta[2n - k];$

d). $h_k[n] = k\cdot\sigma[n - k];$

e). $h_k[n] = k\cdot\delta[n - 2k] + 5k\cdot\delta[n - k].$

Care dintre sistemele de mai sus este cauzal şi care nu?

Determinați şi schițați rãspunsul indicial al fiecãruia dintre aceste sisteme.

Rezolvare:

$$x[n] = \vartheta\{x[n]\}$$

$$x[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\vartheta\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h_k[n]$$

a). $h_k[n] = 2\cdot\delta[n-k]$

$h[n] = 2\cdot\delta[n]$

$h_k[n] = h[n-k]$ - *sistemul este invariant în timp*

$y[n] = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k] = 2x[n]$ - *sistemul este cauzal*

b). $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-2k]$

$$\delta[n-2k] = \begin{cases} 1\ , & n = 2k \\ 0\ , & in\ \ rest \end{cases}$$

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[1-2k] = 0$$

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[2-2k] = x[1]$$

$$y[3] = 0$$

$$y[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[4-2k] = x[2]$$

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] , & n \vdots 2 \\ 0 , & \hat{i}n \ rest \end{cases}$$ - *sistemul este cauzal*

c). $$y[n] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[2n-k]$$

$$y[0] = 2 \cdot x[0]$$

$$y[1] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[2-k] = 2 \cdot x[2]$$

$$y[2] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[4-k] = 2 \cdot x[4]$$

$$y[-1] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[-2-k] = 2 \cdot x[-2]$$

$y[n] = 2 \cdot x[2n]$ - *sistemul nu este cauzal*

d). $h_k[n] = k \cdot \sigma[n-k]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot k \cdot \sigma[n-k]$$

$$\sigma[n-k] = \begin{cases} 1 , & n-k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq n \\ 0 , & n-k \langle 0 \Leftrightarrow k \rangle n \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot x[k]$$ - *sistemul este cauzal*

e). $h_k[n] = k \cdot \delta[n-2k] + 5k \cdot \delta[n-k]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot x[k] \cdot \delta[n-2k] + 5 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot x[k] \cdot \delta[n-k]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot x[k] \cdot \delta[n-2k] = y_1[n]$$

$y_1[0]=0; \quad y_1[1]=0; \quad y_1[2]=x[1]; \quad y_1[3]=0; \quad y_1[2]=2 \cdot x[2];$

$y_1[5]=0; \quad y_1[6]=3 \cdot x[3];$

$$y_1[n] = \begin{cases} \frac{n}{2} \cdot x\left[\frac{n}{2}\right], & n \vdots 2 \\ 0, & \hat{i}n \ \ rest \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot x[k] \cdot \delta[n-k] = y_2[n]$$

$y_2[0]=0; \quad y_2[1]=x[1]; \quad y_2[2]=2 \cdot x[2]; \quad y_2[3]=3 \cdot x[3];$

$y_2[n] = n \cdot x[n]$

$y[n] = y_1[n] + 5 \cdot y_2[n]$ - *sistemul este cauzal*

Rãspunsurile indiciale ale acestor sisteme sunt:

- pentru sistemul de la punctul a).

$$s_a[n] = 2 \cdot \sigma[n];$$

- pentru sistemul de la punctul b).

$$s_b[n] = \begin{cases} 1, & n - par, pozitiv \\ 0, & \hat{i}n \ \ rest \end{cases}$$

- pentru sistemul de la punctul c).

$$s_c[n] = 2 \cdot \sigma[2n] = 2 \cdot \sigma[n]$$

- pentru sistemul de la punctul d).

$$s_d[n] = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- pentru sistemul de la punctul e).

$$s_e[n] = \begin{cases} \frac{n}{2} + n, & n \vdots 2, \ n \geq 0 \\ n, & n \geq 0 \\ 0, & n \langle 0 \end{cases}$$

2.5.2 Produsul de convoluţie între o distribuţie şi o funcţie. Convoluţia ca operaţie de regularizare a unei distribuţii.

Prin definiţie convoluţia unei distribuţii $f \in D^1$ cu funcţia test $\varphi \in D$ este funcţia $\psi(t)$ dată de relaţia:

$$\psi(t) = (f * \varphi) = \langle f(\tau), \varphi(t-\tau) \rangle = \langle f(t-\tau), \varphi(\tau) \rangle \quad . \qquad \textbf{(2.64)}$$

Dar $\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t} = \langle f(\tau), \frac{\varphi(t+\Delta t-\tau)-\varphi(t-\tau)}{\Delta t} \rangle$ şi cum distribuţiile sunt continue, se poate trece la limită. Se obţine că $\psi'(t) = < f(\tau), \varphi'(t-\tau) >$. Deoarece φ este indefinit derivabilă, rezultă că $\psi \in C^{\infty}$ sau, ceea ce este echivalent, $\psi \in \mathscr{E}$. Se spune că funcţia ψ este regularizata distribuţiei f prin funcţia φ. Considerând f o distribuţie fixată (precizată), am definit prin produsul de convoluţie (2.64) o aplicaţie $D \rightarrow E$, $\varphi \rightarrow f * \varphi$, $\forall \varphi \in D$. În situaţia în care $f \in \mathscr{E}$, deci are şi ea ca şi φ, suport mărginit, $\psi(t) \in \mathbb{C}_0^{\infty}$ sau $\psi(t) \in D$. Prin urmare o distribuţie $f \in \mathscr{E}$ fixată, defineşte prin (2.64) o aplicaţie $D \rightarrow D$, $\varphi \rightarrow f * \varphi$, $\forall \varphi \in D$. Pentru a înţelege efectul de regularizare al relaţiei (2.64) se prezintă în figura 2.20 o funcţie test $\varphi_{\varepsilon}(t) \in D$:

$$\varphi_{\epsilon}(t) = \begin{cases} A_{\epsilon}\, e^{-\frac{1}{1-(\frac{t}{\epsilon})^2}} & , \ |t| < \epsilon \\ 0 & , \ |t| \geq \epsilon \ , \end{cases} \qquad \textbf{(2.65)}$$

şi în care constanta A_{ε}, indexată şi ea după ε, se alege astfel încât $\varphi_{\varepsilon}(t)$ să fie un delta şir, atunci când $\varepsilon \rightarrow 0$. Aceasta înseamnă că $\varphi_{\varepsilon}(t)$ trebuie să îndeplinească condiţia (1.114), modificată pentru cazul $\varepsilon \rightarrow 0$. Se ia pentru f o distribuţie din $\mathscr{E}$:

$$f(t) = \sigma(t+T+2\epsilon) - \sigma(t-T-2\epsilon) \quad . \qquad \textbf{(2.66)}$$

Evident $f(t) \in L^1_{loc}$, iar ca urmare a condiţiei (1.114) $\varphi_{\varepsilon}(t) \in L^1_{loc}$, şi se aplică relaţia de definiţie (2.52) pentru calculul convoluţiei:

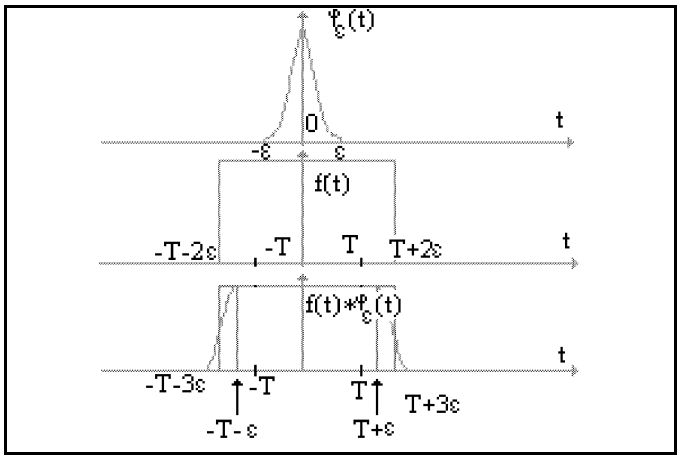


Fig. 2.20 Din f se poate obţine prin convoluţie o funcţie f*φε ∈ D , ce este identică cu f pe un compact dat.

$$(f*\varphi_\epsilon)(t) = \int_{-T-2\epsilon}^{T+2\epsilon} A_\epsilon\, e^{-\frac{1}{1-\left(\frac{t-\tau}{\epsilon}\right)^2}}$$

Rezultatul este prezentat în figura 2.20. Spre deosebire de f care nu este "netedă", în sensul că nu este derivabilă în mod uzual, $f*\varphi_\epsilon$ este indefinit derivabilă, având în acest sens "un grad maxim de netezime". Mai mult, $f*\varphi_\epsilon$ are suport compact [-T-3ε , -T+3ε], fiind, în consecinţă din D. În afara unei mulţimi (T-3ε,T-ε) ∪ (T+ε,T+3ε), a cărei măsură poate fi făcută arbitrar de mică, f şi $f*\varphi_\epsilon$ coincid. Se poate spune că şirul $\varphi_\varepsilon \in$ D tinde în D' către distribuţia f sau că aceasta poate fi aproximată oricât de bine, cu ajutorul funcţiilor test. Condiţia cerută este ca φ_ε să fie δ şir, de obicei numai cu valori pozitive. Un alt exemplu de regularizare poate fi dat în legătură cu distribuţiile singulare. Pe baza relaţiei (2.64) se poate scrie:

$$(\delta * \varphi)(t) = \langle \delta(t-\tau), \varphi(\tau) \rangle = \varphi(t) \quad ,$$

unde s-a folosit şi (1.103). Se constată că distribuţia singulară δ(t) a fost regularizată, fiind transformată prin convoluţie într-o funcţie. Se remarcă, de asemenea, faptul că distribuţia Dirac lasă neschimbată, prin convoluţie cu aceasta, funcţia test φ(t), adică este element neutru al spaţiului de distribuţii pentru produsele de convoluţie cu o funcţie, aşa cum s-a arătat intuitiv cu relaţia (2.51). Se defineşte un operator de translaţie (de deplasare) cu τ , Tr_τ : $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$,

$$Tr_\tau[\varphi(t)] = \varphi(t-\tau) \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{E} \;,\; \forall\, t \;,\; \forall\, \tau \in \mathbb{R} \;. \qquad \textbf{(2.67)}$$

Operatorul de translaţie are, în mod evident, sens şi în D sau S. Fie U şi V două dintre spaţiile de funcţii test, S, D sau $\mathscr{E}$. O aplicaţie liniară S : U → V se numeşte invariantă la translaţie (deplasare), dacă pentru $\forall\tau \in \mathbb{R}$ şi $\forall\varphi \in$ U avem:

$$S\{Tr_\tau \varphi\} = Tr_\tau S\{\varphi\} \quad sau \quad S\{\varphi(t-\tau)\}(t) = S\{\varphi(t)\}(t-\tau) \;. \qquad \textbf{(2.68)}$$

Aplicaţia liniară invariantă în timp este denumită în teoria sistemelor, operator liniar invariant în timp, motiv pentru care am şi păstrat notaţia S.

În cele ce urmează, vom prezenta, sub forma unei teoreme, un rezultat important, cunoscut şi sub denumirea de **teorema de reprezentare a sistemelor continue, liniare şi invariante în timp**.

Teorema 2.1

i) Pentru f ∈ D' fixat, aplicaţia $D \to \mathscr{E}$, $\varphi \to f * \varphi$, $\forall\ \varphi \in D$ este un operator liniar, continuu (prin şiruri) şi invariant în timp.

ii) Reciproc, fie S : D → $\mathscr{E}$ un operator liniar, continuu şi invariant în timp. Atunci există întotdeauna o distribuţie unică f ∈ D' astfel încât $S\{\varphi\} = f * \varphi$, $\forall\ \varphi \in D$. Se spune că operatorul este de tip convolutiv şi se scrie $S = f *$.

Demonstrarea teoremei cere mai întâi următoarea:

Lemă O aplicaţie liniară f : D → $\mathbb{C}$ este o distribuţie - ceea ce înseamnă că este continuă prin şiruri - dacă şi numai dacă pentru orice interval mărginit I ⊂ $\mathbb{R}$, există p ≥ 1 astfel încât pentru ∀ φ ∈ D având supp φ ⊂ I are loc inegalitatea $|< f , \varphi >| \le p\|\varphi\|_p$, unde norma funcţiei test este definită prin:

$$\|\varphi\|_p = \sup_{t \in I} \{ |\varphi(t)| , |\varphi'(t)| , |\varphi''(t)| , \dots , |\varphi^{(p)}(t)| \} .$$

Demonstrarea lemei. Presupunând că f este o distribuţie, considerăm, prin absurd, că ar exista I ⊂ $\mathbb{R}$ mărginit, astfel încât să existe un şir de funcţii $\{\varphi_p\}$, p ≥ 1, $\varphi_p \in D$, având supp $\varphi_p \subset I$ pentru care:

$$|\langle f, \varphi_p \rangle| > p\,\|\varphi_p\| \quad . \qquad \textbf{(2.69)}$$

Se construieşte şirul de funcţii ψ_p : $\psi_p = \dfrac{\varphi_p}{\sqrt{p}\,\|\varphi_p\|_p}$, $\operatorname{supp} \psi_p \subset I$.

Deoarece numitorul funcţiei este, pentru p fixat, constant, avem $\|\psi_p\|_p \le \dfrac{1}{\sqrt{p}}$. În consecinţă $\psi_p \to 0$ atunci când p → ∞ şi deoarece f ∈ D' rezultă că şirul valorilor < f, ψ_p > tinde spre zero în $\mathbb{C}$: < f, ψ_p > → 0 , pentru p → ∞ .

Dar, s-a presupus existenţa şirului $\{\varphi_p\}$, astfel încât relaţia (2.69) este satisfăcută. Atunci:

$$\langle f, \psi_p \rangle = \left\langle f, \frac{\varphi_p}{\sqrt{p}\,\|\varphi_p\|_p} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{p}\,\|\varphi_p\|_p} \langle f, \varphi_p \rangle > \frac{p\,\|\varphi_p\|_p}{\sqrt{p}\,\|\varphi_p\|_p} ,$$

sau $\langle f, \psi_p \rangle > \frac{1}{\sqrt{p}}$ ceea ce înseamnă că şirul numeric < f, ψ_p > nu poate tinde spre 0 atunci când p $\to \infty$. S-a ajuns deci la o contradicţie. Presupunem acum că inegalitatea din enunţ este adevărată. Considerăm un şir $\varphi_n \to 0$ pentru n $\to \infty$. Atunci şi $\|\varphi_n\|_p \to 0$ şi, deci $|<f, \varphi_n>| \le p\|\varphi_n\|_p \to 0$, de unde şirul de valori < f, φ_n > $\to 0$ atunci când $\varphi_n \to 0$ pentru n $\to \infty$. Deci f este o distribuţie - o funcţională liniară continuă prin şiruri - f $\in$ D'.

Demonstrarea teoremei 2.1

i) Liniaritatea operatorului este evidentă. Rămâne să demonstrăm că el este şi continuu prin şiruri. Pentru aceasta considerăm un şir $\{\varphi_n\}$ de funcţii test din D, $\varphi_n \to 0$, pentru n $\to \infty$. Avem de arătat că şirul de funcţii $\rho_n = f * \varphi_n \to 0$ când n $\to \infty$, ceea ce înseamnă că $\rho_n^{(k)}(t)$ tinde în mod uniform spre zero $\forall k \ge 0$ şi $\forall$ t $\in$ [a, b] = K , $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$. Dar, conform lemei demonstrate anterior, există p ≥ 1 , astfel încât:

$$|\rho_n^{(k)}(t)| = \left|\left\langle f(\tau), \rho_n^{(k)}(t-\tau)\right\rangle\right| \le p\,\|\varphi_n\|_{p+k} .$$

Notând cu I un compact astfel încât supp $\varphi_n \subset$ I ($\varphi_n \in$ D, deci au suportul compact), şi cu I_t , compactul ce conţine suporturile funcţiilor translatate cu t, relaţia de mai sus este satisfăcută pentru acele valori t care aparţin unui interval mărginit ce conţine toate intervalele I_t atunci când t $\in$ K este ales. Dar, din $\varphi_n \to 0$, când n $\to \infty$, rezultă $\|\varphi_n\|_{p+k} \to 0$, când n $\to \infty$, de unde $\rho_n^{(k)} \to 0$, pentru n $\to \infty$, $\forall$ k ≥ 0 , adică $\rho_n \to 0$. Continuitatea este, prin urmare, demonstrată. A mai rămas de arătat că operatorul este invariant în timp, ceea ce înseamnă că trebuie să demonstrăm că:

$$(f * Tr_u \varphi)(t) = (f * \varphi)(t-u) , \forall \varphi \in D \quad si \quad \forall u, t \in \mathbb{R} .$$

Dar, aplicând definiţia (2.64) avem:

$$(f * Tr_u \varphi)(t) = \left\langle f(\tau), (Tr_u \varphi)(t-\tau)\right\rangle = \left\langle f(\tau), \varphi((t-u)-\tau)\right\rangle = (f * f)(t-u) .$$

ii) Notând cu $\check{\varphi}(t) = \varphi(-t)$, reflectata funcţiei test φ ε D , se consideră

funcţionala f : D $\to \mathbb{C}$ definită prin operatorul S, φ —> S{φ̌}(0) . Operatorul este, conform ipotezei liniar şi continuu prin şiruri. În consecinţă, funcţionala f este liniară şi continuă prin şiruri, adică este o distribuţie din D', f ∈ D' . Se aplică definiţia (2.64). Pentru ∀ φ ε D avem:

$$(f*\varphi)(t) = \langle f(\tau), \varphi(t-\tau)\rangle = S\{\varphi(t+\tau)\}\big|_{\tau=0} \quad .$$

Operatorul S fiind şi invariant în timp, rezultă că:

$$(f*\varphi)(t) = S\{\varphi(t+\tau)\}\big|_{\tau=0} = S\{\varphi\}(t+\tau)\big|_{\tau=0} = S\{\varphi\}(t) \quad ,$$

sau $f*\varphi = S\{\varphi\}$, operatorul fiind de tip convoluţie $S = f*$. Mai trebuie arătată unicitatea distribuţiei f. Presupunem că $S = f*$, şi că mai există o funcţie $f_1 \in D'$, $S = f_1*$. Pentru ∀ φ ∈ D $S\{\varphi\} = f*\varphi = f_1*\varphi$; $\langle f(\tau), \varphi(t-\tau)\rangle = \langle f_1(\tau), \varphi(t-\tau)\rangle$, sau $\langle f(\tau) - f_1(\tau), \varphi(t-\tau)\rangle = 0$, ∀ φ ∈ D ; rezultă că f = f_1 a.p.t. deci distribuţia f există şi este unică.

2.5.3 Convoluţia distribuţiilor.

Produsul direct de distribuţii

Vom considera pentru început două distribuţii regulate din L^1_{loc}: f(t) şi g(t). Produsul lor f(t)g(t) este local integrabil pe $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ şi, aplicând teorema lui Fubini, avem:

$$\langle f(t)\cdot g(\tau), \varphi(t,\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int f(t)\, g(\tau)\, \varphi(t,\tau)\, dt\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, \varphi(t,\tau)\, d\tau\right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t,\tau)\, dt\right] d\tau \quad .$$

Funcţia test, de două variabile, φ(t,τ) ∈ D($\mathbb{R}^2$) este definită pe un compact IxI ⊂ $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ şi este indefinit derivabilă după t şi τ, adică există şi este continuă: $\dfrac{\partial^{k+n}}{\partial t^k \partial \tau^n}\varphi(t,\tau) \quad \forall k\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Prima relaţie poate fi scrisă şi sub forma:

$$\left\langle f(t)\cdot g(\tau)\,,\,\varphi(t,\tau)\right\rangle = \left\langle f(t)\,,\left\langle g(\tau)\,,\,\varphi(t,\tau)\right\rangle\right\rangle = \left\langle g(\tau)\,,\left\langle f(t)\,,\,\varphi(t,\tau)\right\rangle\right\rangle .$$

(2.70)

În $< g(\tau)\,,\,\varphi(t,\tau) > = \psi(t)$, t se consideră a fi un parametru fixat. Evident, $\psi(t)$ este definită pe un compact şi este indefinit derivabilă în raport cu t, ceea ce rezultă din continuitatea funcţionalei prin şiruri. În consecinţă $\psi(t) \in D$. Definim produsul direct (tensorial) a două distribuţii $f, g \in D'$ (notat cu fxg) într-un mod asemănător cu (2.70) :

$$\left\langle f(t)\,\mathrm{x}\,g(\tau)\,,\,\varphi(t,\tau)\right\rangle = \left\langle f(t)\,,\left\langle g(\tau)\,,\,\varphi(t,\tau)\right\rangle\right\rangle = \left\langle g(\tau)\,,\left\langle f(t)\,,\,\varphi(t,\tau)\right\rangle\right\rangle \quad,\quad \forall\ \phi \in D(\mathbb{R}^2) \quad . \qquad \textbf{(2.71)}$$

Exemplu: *Deşi* $\delta(t)\delta(t)$ *nu are sens, se poate defini* $\delta(t)\mathrm{x}\delta(\mathrm{t})$ prin (2.71) :

$$\left\langle \delta(t)\,\mathrm{x}\,\delta(\tau)\,,\,\varphi(t,\tau)\right\rangle = \left\langle \delta(t)\,,\left\langle \delta(\tau)\,,\,\varphi(t,\tau)\right\rangle\right\rangle = \left\langle \delta(t)\,,\,\varphi(t,0)\right\rangle = \varphi(0,0) .$$

Se mai notează:

$$\delta(t,\tau) = \delta(t)\,\mathrm{x}\,\delta(\tau) \quad,\quad \left\langle \delta(t,\tau)\,,\,\varphi(t,\tau)\right\rangle = \varphi(0,0) \quad . \qquad \textbf{(2.72-73}$$

Convoluţia distribuţiilor

Fie din nou $f, g \in L^1_{loc}$, astfel ca $(f*g)(t)$ să existe. Funcţionala definită de funcţia $f*g$ se poate exprima prin:

$$\left\langle (f*g)(t)\,,\,\varphi(t)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right]\varphi(t)\,dt \quad . \qquad \textbf{(2.74)}$$

Se pun în (2.74) : $\tau = u$, $t - \tau = v$, şi se obţine:

$$\left\langle (f*g)(t)\,,\,\varphi(t)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int f(u)\,g(v)\,\varphi(u+v)\,du\,dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(v)\,\varphi(u+v)\,dv\right]du \quad,\quad \forall\ \phi \in D \quad . \qquad \textbf{(2.75)}$$

Această relaţie poate fi pusă şi sub forma:

$$\left\langle (f*g)(t)\,,\,\varphi\right\rangle = \left\langle f(u)\,,\left\langle g(v)\,,\,\varphi(u+v)\right\rangle\right\rangle = \left\langle f(u)\,\mathrm{x}\,g(v)\,,\,\varphi(u+v)\right\rangle ,$$

şi ea serveşte la definirea convoluţiei distribuţiilor. Se poate observa că definirea convoluţiei a două distribuţii f, g ∈ D' prin relaţia:

$$\langle f*g\,,\,\varphi\rangle = \langle f\,x\,g\,,\,\varphi(u+v)\rangle \quad , \quad \forall\ \varphi\ \in D \quad , \qquad \textbf{(2.76)}$$

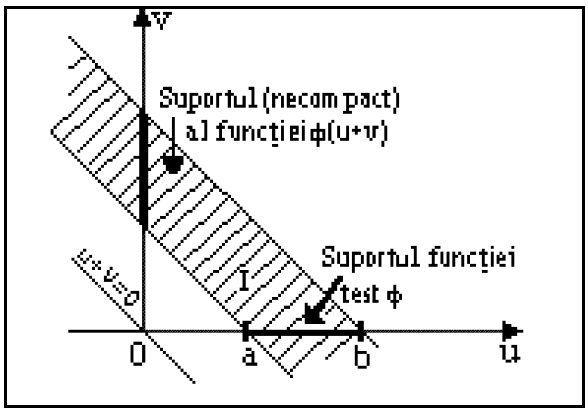


Fig.2.21 Deşi φ(u) are suport compact, φ(u+v) nu mai are suport compact.

este naturală. Totuşi, definiţia este numai aparent corectă, pentru că deşi φ(t) ∈ D şi, prin urmare, are suportul compact [a,b] - vezi figura 2.21 - suportul funcţiei φ(u+v) nu este compact. El este delimitat de două drepte paralele cu a doua bisectoare, u+v = 0 , şi anume u+v = a , respectiv u+v = b. Rezultă ca suport pentru φ(u+v) o bandă infinită, aşa cum evidenţiază figura 2.21. În consecinţă relaţia (2.76) nu se poate aplica decât dacă:

i) Cel puţin una dintre cele două distribuţii are suportul compact.

ii) Suporturile ambelor distribuţii sunt mulţimile [a, ∞] şi [b, ∞] .

Figura 2.22 a ilustrează cazul în care o distribuţie (f) are suportul compact iar cealaltă (g) un suport infinit. Se delimitează astfel pentru φ(u+v) un domeniu romboidal, compact. Dacă ambele distribuţii f şi g au suportul [0, ∞] pentru φ(u+v) se delimitează un domeniu compact, trapezoidal, ca în figura 2.22 b. Vom nota acest domeniu, în ambele cazuri, cu K. Formula (2.76) se corectează, transformând funcţia φ(u+v) într-o funcţie din $D(\mathbb{R}^2)$. Pentru aceasta, se înmulţeşte φ(u+v) cu o funcţie α(u,v) ∈ $D(\mathbb{R}^2)$ cu proprieta-tea că este unitară pe domeniul K compact şi se anulează în afara acestuia. Dacă $\{\alpha_n(u,v)\}$ este un şir de astfel de funcţii din $D(\mathbb{R}^2)$, ce tinde spre α(u,v) pentru $n\to\infty$ astfel încât $\alpha_n(u,v) = 1\ \forall\ (u,v) \in K$ pentru o valoare n > N, unde N este dependent de K, atunci convoluţia a două distribuţii f şi g se defineşte prin relaţia:

$$\langle f*g\,,\,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f(u)\,x\,g(v)\,,\,\alpha_n(u,v)\,\varphi(u+v)\rangle, \forall\ \varphi\ \in D, \quad \textbf{(2.77)}$$

dacă această limită există pentru ∀ φ ∈ D . Menţionăm faptul că în multe lucrări funcţia $\alpha_n(u,v)$ nu apare pentru că cel puţin una dintre distribuţii este, uzual, δ.

Dacă, aşa cum apare în figura 2.22 a, suportul distribuţiei f este compact, supp(f) = I ⊂ ℝ relaţia (2.77) se modifică în:

$$\langle f*g\,,\,\varphi\rangle \;=\; \lim_{n\to\infty}\langle f(u)\;\mathrm{x}\;g(v)\,,\,\alpha_n(u)\;\varphi\,(u+v)\rangle \quad , \qquad \textbf{(2.78)}$$

$\{\alpha_n(u)\}$ fiind un şir de funcţii $\alpha_n \in D$ şi $\alpha_n(u) = 1$, $\forall$ u ε I pentru n > N , N depinzând de I , $\alpha_n \to \alpha$ dacă $n \to \infty$. Evident definiţia cere ca limita (2.78) să existe.

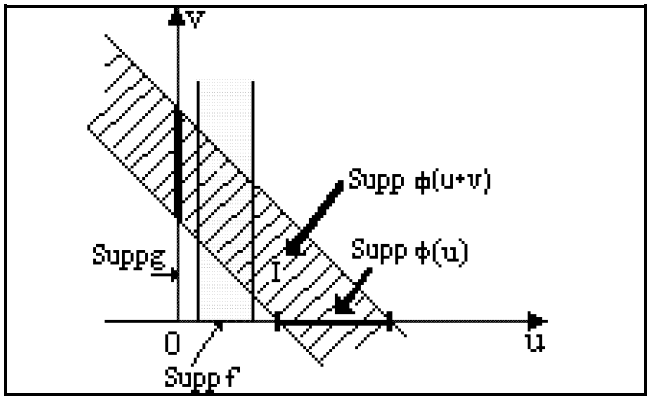


Fig.2.22a Cazul unei distribuţii f cu suport compact.

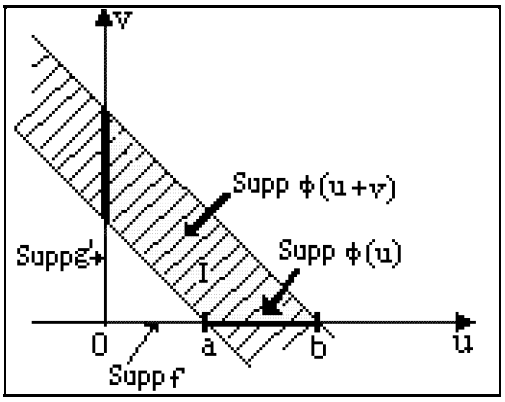


Fig.2.22b Cazul a două distribuţii cu suportul [0, ∞] .

Exemple

i) Convoluţia cu distribuţia Dirac. Fie f ε D'. Avem, conform relaţiei (2.78):

$$\langle f*\delta\,,\,\varphi\rangle \;=\; \langle f(u)\;\mathrm{x}\;\delta\,(v)\,,\,\alpha\,(v)\,\varphi\,(u+v)\rangle \;=\; \langle f(u)\,,\langle\,\delta\,(v)\,,\,\alpha\,(v)\,\varphi\,(u+v)\rangle\rangle$$

$$\langle f*\delta\,,\,\varphi\rangle \;=\; \langle f(u)\,,\,\alpha\,(0)\,\varphi\,(u)\rangle \;=\; \langle f\,,\,\varphi\rangle \quad ,$$

(2.79)

deoarece $\alpha(0) = 1$. Rezultă că:

$$f*\delta \;=\; \delta*f \;=\; f \quad , \qquad \textbf{(2.80)}$$

distribuţia Dirac δ fiind elementul neutru în produsul de convoluţie.

ii) Fie f, g ∈ D' şi $f*g$, considerând că ea există. Căutăm derivata convoluţiei distribuţiilor $(f*g)'$. Avem:

$$\langle (f*g)', \varphi \rangle = \langle f*g, -\varphi'(t) \rangle = \langle f(u), \langle g(v), -\varphi'(u+v) \rangle \rangle =$$
$$= \langle f(u), \langle g(v), -\varphi'_v(u+v) \rangle \rangle = \langle f(u), \langle g'_v(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle = \langle f*g', \varphi \rangle ,$$

unde s-a folosit notaţia: $\frac{\partial \varphi(u+v)}{\partial v} = \varphi'_v(u+v)$ *. Avem, de asemenea:*

$$\langle (f*g)', \varphi \rangle = \langle f(u), \langle g(v), -\varphi'_u(u+v) \rangle \rangle = \langle f(u), -\langle g(v), \varphi(u+v) \rangle_u{}' \rangle =$$
$$= \langle f'_u(u), \langle g(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle = \langle f'*g, \varphi \rangle ,$$

întrucât pe baza relaţiei (2.71) produsul direct este comutativ. S-a obţinut un rezultat remarcabil. Derivarea produsului de convoluţie a două distribuţii se realizează derivând oricare din cei doi factori ai acestuia:

$$(f*g)' = f'*g = f*g' \quad . \tag{2.81}$$

Prin inducţie se poate arăta că:

$$(f*g)^{(k)} = f^{(k)}*g = f*g^{(k)} \quad . \tag{2.82}$$

Dar $f*\delta = f$ *şi derivând această relaţie se obţine:*

$$f*\delta' = f' \quad , \tag{2.83}$$

ceea ce înseamnă că derivarea distribuţiei f poate fi realizată prin convoluţia ei cu δ'*, derivata distribuţiei Dirac.*

iii) Dacă f, g $\in D'$ *şi convoluţia* $f*g$ *există, atunci:*

$$f(t-t_1)*g(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)*g(t) = f(t)*g(t-t_1-t_2) \ , \ \forall\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad . \tag{2.84}$$

Demonstraţia este imediată; se aplică definiţia şi proprietăţile convoluţiei. Cazurile particulare remarcabile sunt evidenţiate în continuare:

$$f(t)*\delta(t-t_0) = f(t-t_0) \quad , \quad f(t)*\sum_k \delta(t-t_k) = \sum_k f(t-t_k) \quad ;$$
$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2) \ .$$

iv) Convoluţia distribuţiilor nu este, în general, o operaţie asociativă. Vom

considera pentru exemplificare trei distribuţii: f = 1 , g = δ' şi h = σ(t) , toate din D' . Calculăm: $(f*g)*h = (1*\delta')*\sigma = (1'*\delta)*\sigma = 0*\sigma = 0$. *Dar:* $f*(g*h) = 1*(\delta'*\sigma) = 1*(\delta*\sigma') = 1*(\delta*\delta) = 1*\delta = 1$. *Prin urmare:*

$$(f*g)*h \neq f*(g*h)$$

Regula de asociativitate pentru trei factori se poate aplica numai dacă:
1) cel puţin doi factori au suport compact,
2) toţi trei factorii au suportul de forma [0 , ∞) , de obicei $\mathbb{R}^+$.
În legătură cu sensul noţiunii de regularizare vom da următoarea teoremă:

Teorema 2.2

Pentru orice distribuţie f ∈ D' există un şir $\{\varphi_n\}$ de funcţii din D astfel încât $\varphi_n \to f$ pentru $n \to \infty$.

Demonstrarea teoremei 2.2

Să alegem un δ şir de funcţii din D , $\{\psi_n\}$, cu proprietatea că $\psi_n \to \delta$ atunci când $n \to \infty$. În aceste condiţii $f*\psi_n \in \mathscr{E}$ şi având în vedere continuitatea prin şiruri, $f*\psi_n \to f*\delta = f$, pentru $n \to \infty$.
Trebuie avut însă în vedere faptul că fiecare funcţie indefinit derivabilă şi cu suport infinit, deci fiecare funcţie din $\mathscr{E}$, poate fi considerată ca limită a unei funcţii din D , cu suport compact, căreia i se măreşte, prin trecere la limită, suportul. Pentru ∀ n , există φ_{nm} astfel încât $\varphi_{nm} \to f*\psi_n \in \mathscr{E}$, dacă $m \to \infty$. Pentru a obţine pe f, trebuie ca şi n să tindă spre ∞. În consecinţă se reţin dintre toate funcţiile $\{\varphi_{nm}\}$ numai acelea care au m = n , $\{\varphi_n\}=\{\varphi_{nm}\}$, aşa numitul şir diagonal. Pentru acesta este valabilă concluzia $\varphi_n \to f$, dacă $n \to \infty$ şi, prin urmare şi $\varphi_n \to f$, dacă $n \to \infty$. Se mai spune că spaţiul D este dens în D'. Afirmaţiile din §2.5.2, legate de cazul prezentat în figura 2.20 au acum o justificare teoretică solidă.
Teorema prezentată arată că orice distribuţie f ∈ D' este limita slabă a unui şir de regularizări a ei, $f*\psi_n \in \mathscr{E}$, $\psi_n \in$ D şi $\psi_n \to \delta$, $n \to \infty$. Aceasta înseamnă că distribuţia, chiar şi singulară, poate fi modelată cu o precizie arbitrar de bună cu funcţii uzuale.

Conform ultimei observaţii, nu este o "absurditate tehnică", utilizarea distribuţiilor în teoria semnalelor. Ele reprezintă limite, comode în calcul, dar aproximabile oricât de bine, chiar dacă nu sunt, ca limită, realizabile.

Teorema 2.3, prezentată în continuare, reprezintă o etapă pregătitoare pentru demonstrarea teoremei de reprezentare a sistemelor, extinsă şi la cazul distribuţiilor.

Teorema 2.3

Orice distribuţie este limita unei combinaţii liniare finite de distribuţii Dirac, de forma:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot \delta(t-t_k) \quad .$$

Se mai spune că spaţiul vectorial al combinaţiilor liniare finite de distribuţii Dirac este dens în D' .

Demonstrarea teoremei 2.3

Considerăm o distribuţie cu suportul compact $f \in \mathscr{E}$. Ea este, conform teoremei 2.2 limita în $\mathscr{E}$ a unui şir regularizat cu un δ şir ψ_n , $\varphi_n = f * \psi_n$. Deoarece D este dens în D' , φ_n poate fi privită ca distribuţie în D' , având suportul compact (deci în $\mathscr{E}$). în consecinţă, pentru orice funcţie test $\rho(t) \in D$ avem:

$$\langle \varphi , \rho \rangle = \int_I \varphi_n(t)\, \rho(t)\, dt = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \varphi_n\left(k\frac{T}{m}\right) \rho\left(k\frac{T}{m}\right) \frac{T}{m} \quad ,$$

unde I este compactul ce include suporturile funcţiilor φ_n , supp $\varphi_n \subset I$, iar T este lungimea suportului (măsura sa). Reluăm relaţia anterioară sub forma:

$$\langle \varphi , \rho \rangle = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \varphi_n\left(k\frac{T}{m}\right) \frac{T}{m} \left\langle \delta\left(t-k\frac{T}{m}\right), \rho(t) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \varphi_n\left(k\frac{T}{m}\right) \frac{T}{m}\, \delta\left(t-k\frac{T}{m}\right), \rho(t) \right\rangle \quad , \quad \forall\ \rho(t) \in D \quad ,$$

de unde se deduce egalitatea a.p.t. a distribuţiilor:

$$\varphi_n(t) = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \varphi_n\left(k\frac{T}{m}\right) \frac{T}{m}\, \delta\left(t-k\frac{T}{m}\right) \quad . \qquad \textbf{(2.85)}$$

Conform teoremei 2.2, trecând la limită pentru $n \to \infty$, $\varphi_n \to f$, sau:

$$\lim_{m->\infty} \sum_{k=0}^{m} \varphi_n\left(k\frac{T}{m}\right)\frac{T}{m}\,\delta\left(t-k\frac{T}{m}\right) \xrightarrow{\mathscr{E}'} f \quad , \quad pentru\ n \to \infty \quad . \qquad \textbf{(2.86)}$$

Enunţul teoremei poate fi extins şi la alte tipuri de distribuţii. Să mai menţionăm un aspect practic important al teoremei 2.3. Ea constituie baza pentru modelarea microscopică a semnalelor electrice. De aceea în studiul zgomotelor generate de conducţia electronilor (consideraţi ca parte a curentului electric) se aplică modelul de semnal derivat din teoremă.

Teorema 2.1 poate fi generalizată, extinzând-o şi la cazul distribuţiilor Se obţine, astfel, o descriere exactă a naturii modelului sistemului continuu, liniar şi invariant în timp precum şi o modalitate generală de calcul a răspunsului său.

Teorema 2.4

Un operator S : $\mathscr{E} \to$ D' este liniar, continuu prin şiruri şi invariant la translaţii (deplasare în timp) dacă şi numai dacă este de tip convoluţie. Aceasta înseamnă că există f ∈ D' astfel încât $S = f*$. Această distribuţie f este unică şi egală cu S{δ} .

Demonstrarea teoremei 2.4

Vom considera, pentru început, că operatorul este de tip convoluţie $S = f*$, f ∈ D' . Liniaritatea şi continuitatea unui astfel de operator sunt evidente. Rămâne să demonstrăm invarianţa sa la translaţii. Aceasta înseamnă că $(S\{Tr_\tau g\})(t) = Tr_\tau(S\{g(t)\})$ sau, mai explicit:

$$f(t-\tau)*g(t) = (f*g)(t-\tau) \quad , \quad \forall\, g \in \mathscr{E} \quad , \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R} \quad .$$

Pentru orice φ ∈ D avem, aplicând definiţia (2.77):

$$\langle f(t-\tau)*g\,,\,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f(t-\tau)\,x\,g(v)\,,\,\alpha(t,v)\,\varphi(t+v)\rangle =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\langle f(t-\tau)\,,\langle g(v)\,,\,\alpha(t,v)\,\varphi(t+v)\rangle\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f(t)\,,\langle g(v)\,,\,\alpha(t+\tau)\,\varphi(t+\tau\,,\,v$$

De asemenea:

$$\langle (f*g)(t-\tau)\,,\,\varphi\rangle = \langle f*g\,,\,\varphi(t+\tau)\rangle =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\langle f(t)\,,\langle g(v)\,,\,\alpha(t+\tau\,,v)\,\varphi(t+\tau+v)\rangle\rangle \quad ,$$

şi se deduce că: $f(t-\tau)*g(t) = (f*g)(t-\tau)$ a.p.t. , ceea ce înseamnăcă operatorul convoluţie $S = f*$ este invariant la translaţie.

Este evident că $S\{\delta\} = f*\delta = f$, distribuţia Dirac fiind elementul neutru al

produsului de convoluţie. Demonstrarea reciprocei porneşte de la construcţia operatorului $M = S - f*$ .Se urmăreşte să se arate că M este un operator identic nul. În primul rând S este presupus liniar, continuu şi invariant la translaţie (prin ipoteza reciprocă), iar în al doilea rând $f*$ este un operator cu aceleaşi proprietăţi. Rezultă că M este şi el liniar, continuu (prin şiruri) şi invariant la translaţie. Dar, conform teoremei 2.3 pentru $\forall\ \varphi \in D$, cu suportul de măsură T avem:

$$\lim_{m->\infty} \frac{T}{m} \sum_{k=0}^{m} \varphi\left(k\frac{T}{m}\right)\delta\left(t-k\frac{T}{m}\right) = \varphi(t) \quad .$$

Operatorul M : $\mathscr{E} \rightarrow$ D' fiind liniar, continuu şi invariant la deplasare, se poate scrie:

$$M\{\varphi\} = M\{\lim_{m->\infty} \frac{T}{m} \sum_{k=0}^{m} \varphi\left(k\frac{T}{m}\right)\delta\left(t-k\frac{T}{m}\right)\} = \lim_{m->\infty} \frac{T}{m} \sum_{k=0}^{m} \varphi\left(k\frac{T}{m}\right) M\{\delta\left(t-k-\right.$$

Dar:

$$M\left\{\delta\left(t-k\frac{T}{m}\right)\right\}(t) = M\{\delta(t)\}\left(t-k\frac{T}{m}\right) = \left[(S-f*)\{\delta(t)\}\right]\left(t-k\frac{T}{m}\right) =$$

$$= \left(S\{\delta\}-f*\delta\right)\left(t-k\frac{T}{m}\right) = (f-f)\left(t-k\frac{T}{m}\right) = 0 \quad .$$

Am reuşit să demonstrăm că: $M\{\varphi\} = 0$, $\forall\ \phi \in D$ ceea ce înseamnă că M este operator nul sau că: $S = f*$. Unicitatea distribuţiei f este uşor de demonstrat. Fie $f_1 \neq f$ $S = f_1*$, astfel încât pentru $\forall$ g $\in \mathscr{E}$ avem $f*g = f_1*g$. E suficient să luăm g = δ şi avem $f*\delta = f_1*\delta$ sau f = f_1, deci ipoteza $f_1 \neq f$ este absurdă; f este unică. În cazul în care avem de descris matematic un sistem liniar, continuu şi invariant în timp, teorema 2.4 afirmă că operatorul ce modelează sistemul este de tip convoluţie. Distribuţia f $\in$ D' ce defineşte operatorul sistemului este tot conform teoremei, f = S{δ} sau, ceea ce corespunde terminologiei utilizate în cadrul sistemelor, **răspunsul la impulsul unitar** (distribuţia Dirac δ). Această distribuţie este în mod curent notată cu h, astfel că operatorul S ce modelează sistemul este:

$$S = h* \quad , \quad unde \quad h = S\{\delta\} \quad , \quad si\ este\ unic \ . \qquad \textbf{(2.87)}$$

Aplicând relaţiile de la sisteme - vezi şi figura 2.15 - răspunsul sistemului la semnalul de intrare x este, conform teoremelor 2.1 şi 2.4 :

$$y = S\{x\} = h * x \quad . \tag{2.88}$$

Se pune problema dacă h , răspunsul la o distribuţie, nerealizabilă tehnic, poate fi determinat experimental. Aşa cum s-a văzut deja, orice distribuţie, deci şi $\delta \in \mathscr{E} \subset D'$ poate fi aproximată şi deci generată cu o precizie oricât de bună, utilizând semnale (funcţii) uzuale, generablie. Drept urmare şi h ar putea fi determinată experimental, cu o precizie oricât de bună.

Răspunsul indicial s(t) al unui sistem liniar şi invariant în timp este semnalul de ieşire al acestuia atunci când la intrare se aplică distribuţia $x(t) = \sigma(t)$:

$$s(t) = S\{\sigma(t)\} = h * \sigma \quad . \tag{2.89}$$

Răspunsul indicial dă, prin derivare, răspunsul la impulsul unitar:

$$s' = (h * \sigma)' = h * \sigma' = h * \delta = h \quad . \tag{2.90}$$

Din punct de vedere tehnic distribuţia $\sigma(t)$ poate fi mai uşor generată cu o precizie suficientă şi s(t) se determină în consecinţă mai uşor. Relaţia (2.90) permite determinarea aproximaţiei pentru răspunsul la impulsul unitar, h . Utilizând semnalul de probă $x(t) = t\sigma(t)$ se obţine la ieşire răspunsul:

$$y(t) = S\{t\,\sigma(t)\} = h * (t\,\sigma(t)) \quad ,$$

din care, derivând de două ori, rezultă h :

$$y''(t) = h * (t\,\sigma(t))'' = h * \delta = h \quad .$$

Vom remarca faptul că, deşi relaţiile (2.50) şi (2.51) au fost stabilite într-o manieră lipsită de rigoarea prezentării de faţă, ele sunt corecte şi de multe ori suficiente. Oricum completările din §2.5.1 - §2.5.3. conferă un plus de rigoare tratării şi trasează limitele de aplicaţie ale calculului, utilizând produsul de convoluţie.

2.5.4 Condiţia ca un un sistem continuu liniar şi invariant în timp să fie cauzal

Răspunsul la impulsul unitar, h(t), este semnalul obţinut la ieşirea sistemului, atunci când la intrarea sa se aplică impulsul unitar în origine, t = 0, aşa cum se arată în figura 2.23. Evident, dacă sistemul este cauzal, h(t) nu poate apărea înainte ca sistemul să fi fost excitat. În consecinţă:

$$h(t) \equiv 0 \quad , \quad t < 0 \quad , \tag{2.91}$$

este condiţia de cauzalitate a unui SLIT. Ea se mai poate scrie şi sub forma:

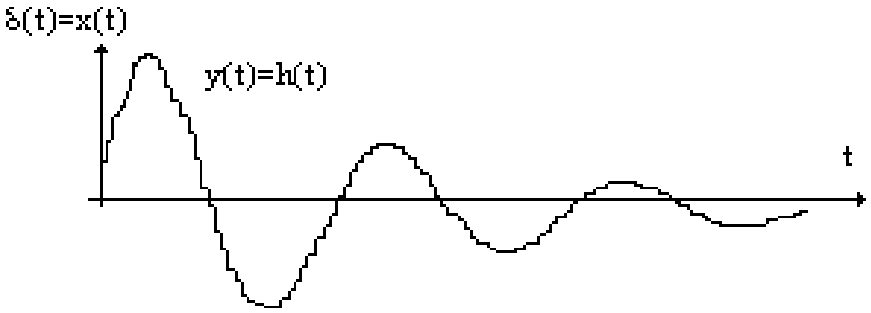


Fig.2.23 La excitarea unui sistem cu impulsul unitar δ(t) se obţine la ieşirea sa funcţia pondere sau răspunsul la impuls, h(t) .

h(t)=h(t)·σ(t). Relaţia (2.50), ce permite calculul răspunsului y(t) la semnalul de intrare x(t) oarecare, devine, pentru un sistem cauzal:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \quad . \tag{2.92}$$

Dacă şi semnalul de intrare satisface o relaţie de forma x(t) = x(t)·σ(t) , se spune şi despre el că este un semnal cauzal. Relaţia (2.92) devine acum:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{0}^{t} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} x(t-\tau) h(\tau)\, d\tau \quad ; \quad y(t) = y(t)\, \sigma(t) \tag{2.93}$$

răspunsul sistemului fiind şi el de tip cauzal.

2.5.5 Condiţia de BIBO stabilitate a sistemelor continue, liniare şi invariante în timp

Se consideră un semnal de intrare x(t) mărginit:

$$|x(t)| \le M \quad , \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad . \tag{2.94}$$

Semnalul de ieşire calculat cu relaţia (2.50), satisface condiţia:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)| \cdot |h(\tau)|\, d\tau \le M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau \quad ,$$

sau:

$$|y(t)| \le M \, \|h(t)\|_1 \quad , \tag{2.95}$$

$\|h(t)\|_1$ fiind norma lui h(t) în L^1. Dar BIBO stabilitatea cere ca $|y(t)|$ să fie şi el mărginit atunci când semnalul de intrare este mărginit. Analizând (2.95) rezultă că o condiţie suficientă pentru aceasta este $\|h(t)\|_1 < \infty$ sau ceea ce este echivalent, $h(t) \in L^1$. Pentru a demonstra necesitatea condiţiei, fie semnalul:

$$x(t) = \operatorname{sgn}\left[h(-t)\right] = \operatorname{sgn}\left[\check{h}(t)\right] \quad . \tag{2.96}$$

şi calculăm răspunsul la momentul t = 0 :

$$\begin{aligned} y(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \operatorname{sgn}\left[\check{h}(-\tau)\right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \operatorname{sgn} h(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \|h(t)\|_1 \quad , \end{aligned} \tag{2.97}$$

unde s-a ţinut seama că $|a| = a \cdot \operatorname{sgn}(a)$. Semnalul de intrare fiind mărginit, întrucât $|\operatorname{sgn}[\check{h}(t)]| \le 1$, este necesar ca şi y(t) să fie mărginit, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ pentru ca sistemul să fie mărginit, ceea ce are loc numai dacă $\|h(t)\|_1 < \infty$ sau, cu alte cuvinte $h(t) \in L^1$. Condiţia este, prin urmare, şi necesară. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul continuu, caracterizat de răspunsul la impulsul unitar h(t) să fie BIBO (MIME) stabil, este ca $h(t) \in L^1$. Nu toate sistemele utilizate în practică satisfac condiţia de BIBO stabilitate. Spre exemplu, sistemul având răspunsul la impuls h(t) = σ(t) , treapta unitară, nu este stabil deoarece $\sigma(t) \notin L^1$. Răspunsul său este, conform cu (2.92):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \quad , \tag{2.98}$$

şi reprezintă ieşirea integratorului ideal, cu simbolul din figura 1.64 c.

Dacă semnalul x(t) supus integrării este cauzal, în cazul condiţiilor iniţiale nule, la ieşirea integratorului se obţine:

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\, d\tau \quad , \tag{2.99}$$

şi limitând superior durata t de utilizare, y(t) rămâne finit.

2.5.6 Semnificaţia practică a proprietăţilor produsului de convoluţie

Considerăm două sisteme stabile caracterizate prin răspunsurile la impuls $h_1(t)$ şi $h_2(t)$ şi conectate în cascadă ca în figura 2.24 a. Evident, h_1 , $h_2 \in L^1$. Deoarece semnalul de intrare x(t) este mărginit, conform condiţiei 4 (§ 2.5.1) semnalul $x_1(t) = h_1(t) * x(t)$ există şi, ceea ce este important, este mărginit. Cel de al doilea sistem, şi el stabil, are la intrare un semnal şi el mărginit . Prin urmare , $y(t) = h_2(t) * x_1(t) = h_2(t) * (h_1(t) * x(t))$ există, şi este mărginit. În concluzie, cele două sisteme stabile conectate în serie formează un sistem echivalent stabil. În măsura în care este permisă asocierea în convoluţia ce furnizează expresia semnalului de ieşire y(t) , adică:

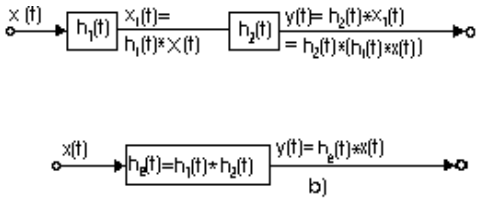


Fig. 2.24 (a) Două sisteme continue conectate în cascadă; (b) Sistemul continuu, echivalent celor două sisteme conectate în serie..

$$y(t) = h_2(t) * (h_1(t) * x(t)) = (h_2(t) * h_1(t)) * x(t) = h_e(t) * x(t) \quad , \tag{2.100}$$

se poate defini un sistem echivalent, având răspunsul la impuls $h_e(t)$:

$$h_e(t) = h_2(t) * h_1(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad . \tag{2.101}$$

Deoarece produsul de convoluţie este comutativ, succesiunea de interconectare în serie a celor două sisteme este indiferentă. Dacă la intrare se aplică x(t), la ieşire apare acelaşi semnal y(t) , indiferent de succesiunea sistemelor.

Prin definiţie, un sistem având răspunsul la impuls $h_1(t)$ este inversul unui sistem cu răspunsul la impuls h(t) dacă conectându-le în cascadă semnalul de ieşire este identic cu semnalul de intrare: $y(t) = x(t) = x(t) * \delta(t)$, sau:

$$h_1(t) * h_2(t) = \delta(t) \quad . \tag{2.102}$$

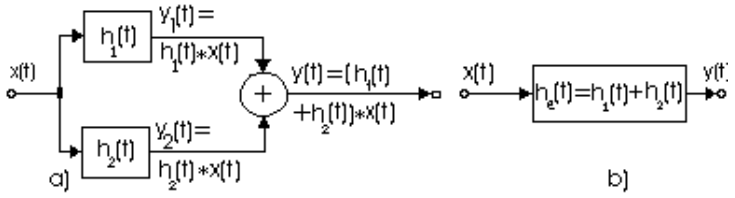


Fig. 2.25 (a) Două sisteme continue conectate în paralel; (b) Sistemul continuu echivalent celor două sisteme conectate în paralel.

Convoluţia este distributivă în raport cu adunarea. În cazul a două sisteme conectate în paralel, ca în figura 2.25 a, cu acelaşi semnal la intrare x(t) şi furnizând la ieşire semnalele $y_1(t)$ şi $y_2(t)$ care se însumează, avem:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t) = (h_1(t) + h_2(t)) * x(t) = h_e(t) * x(t)$$

unde răspunsul la impuls al sistemului echivalent celor două sisteme este:

$$h_e(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad . \tag{2.103}$$

2.5.7 Răspunsul unui sistem continuu liniar şi invariant în timp la treapta unitate. Răspunsul indicial.

Aşa cum s-a afirmat deja în §2.5.3, este mai uşor de generat experimental un semnal apropiat de modelul x(t) = σ(t). Aplicând un semnal treaptă unitară la intrarea sistemului cu răspunsul la impuls h(t) se obţine aşa numitul răspuns indicial s(t). Conform cu (2.50):

$$s(t) = h(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \quad .$$

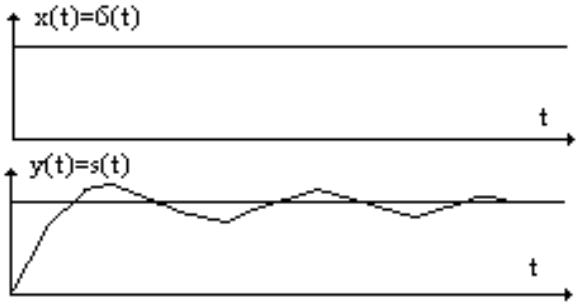


Fig.2.26 Răspunsul indicial s(t) al unui sistem continuu.

Derivata unui produs de convoluţie se obţine derivând numai unul din factorii acestuia (oricare). Dar, aşa cum s-a văzut σ'(t) = δ(t) şi, prin urmare, este indicat să derivăm cel de al doilea factor:

$$s'(t) = \left(h(t) * \sigma(t)\right)' = h(t) * \sigma'(t) = \\ = h(t) * \delta(t) = h(t) \quad .$$

Derivata răspunsului indicial este răspunsul la impuls al sistemului:

$$s'(t) = h(t) \quad . \qquad \textbf{(2.104)}$$

În figura 2.26 este prezentat răspunsul indicial pentru un SLIT de tip cauzal. Pentru un astfel de sistem, h(t) = h(t)·σ(t) , şi în consecinţă:

$$s(t) = h(t) * \sigma(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau \quad . \qquad \textbf{(2.105)}$$

2.5.8 Implementarea sistemelor continue, liniare şi invariante în timp caracterizate de ecuaţii diferenţiale liniare, cu coeficienţi constanţi

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare ce caracterizează un sistem electric cu constante concentrate este cea dată de relaţia (1.132):

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad a_N \neq 0 \quad , \qquad \textbf{(2.106)}$$

unde s-a pus M = N , subînţelegând că anumiţi coeficienţi sunt nuli.

Implementarea ecuaţiei (2.106) se poate face utilizând circuite (blocuri) de derivare - fig. 1.64 b. Urmând exact aceeaşi cale ca şi în cazul sistemelor discrete se se obţin forme de implementare asemănătoare. Pentru exemplificare, se arată în figura 2.27 forma directă II de implementare care utilizează circute de diferenţiere.

Circuitele de diferenţiere realizabile sunt calitativ mai slabe decât cele de integrare de aceeaşi clasă. Pentru a putea implementa sistemul continuu utilizând circuite (blocuri) de integrare, prezentate simbolic în figura 1.64.c se transformă ecuaţia diferenţială (2.106) într-o ecuaţie integrală. Se notează:

$$y_{(0)}(t) = y(t)$$

$$y_{(1)}(t) = y(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau_1)\, d\tau_1$$

$$y_{(2)}(t) = y(t) * \sigma(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau_2} y(\tau_1)\, d\tau_1 \right) d\tau_2$$

$$\vdots$$

$$y_{(k)}(t) = y_{(k-1)}(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\tau_k} \int_{-\infty}^{\tau_{k-1}} \cdots \int_{-\infty}^{\tau_2} y(\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{k-1}\, d\tau_k \quad ,$$

şi asemănător $x_{(0)}(t) = x(t)$; $x_{(1)}(t) = x(t) * \sigma(t)$ etc.

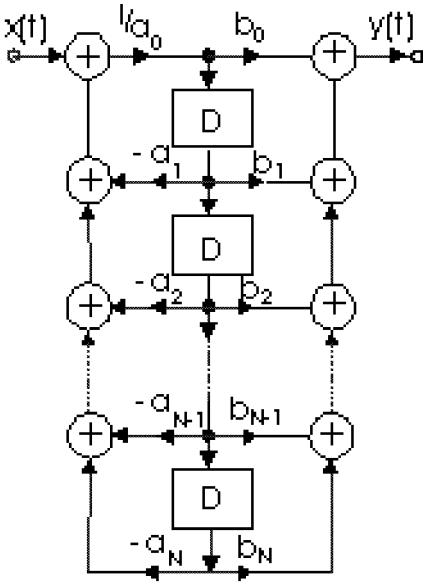


Fig.2.27 Forma directă II de implementare a ecuaţiei (2.106) utilizând circuite de derivare.

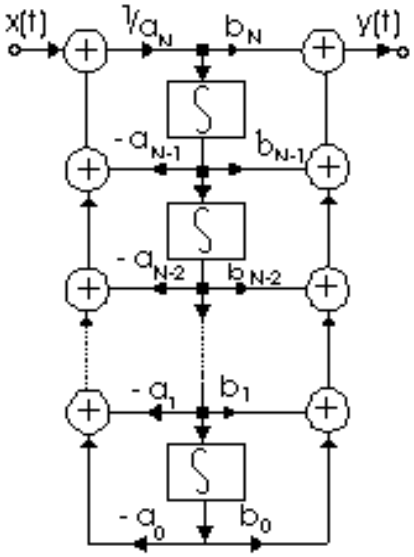


Fig.2.28 Forma directă II de implementare a ecuaţiei (2.107) utilizând integratoare.

Integrând de N ori şi având în vedere condiţia de repaus iniţial (condiţia iniţială nulă) ecuaţia (2.106) conduce la:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k\, x_{(N-k)}(t) \quad . \qquad \textbf{(2.107)}$$

Această ecuaţie poate fi implementată utilizând blocuri de integrare. Inter-

esantă este forma directă II la care se ajunge şi care este prezentată în figura 2.28. Ea diferă de forma II realizată cu circuite de diferenţiere prin schimbarea succesiunii coeficienţilor şi, evident, înlocuirea blocurilor de diferenţiere cu cele de integrare.

Exemple:

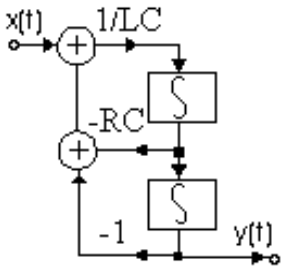


Fig.2.29 Implementarea unui FTJ.

i) Circuitul din figura 1.60 este caracterizat de ecuaţia (1.130). Aceasta se transformă prin procedeul prezentat mai înainte în:

$$LCy_{(0)}(t) + RCy_{(1)}(t) + y_{(2)}(t) = x_{(2)}(t) \ .$$

Coeficienţii ecuaţiei sunt: $a_2 = LC$, $a_1 = RC$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$. Rezultă implementarea din figura 2.29.

ii) În figura 2.30 este prezentat un sistem implementat cu circuite (blocuri) de translaţie cu T, Tr_T (în majoritatea cazurilor se înscrie într-un astfel de bloc numai durata T a translaţiei), denumite şi circuite de întârziere cu T.

Ecuaţia ce leagă semnalele y(t) şi x(t) se poate scrie, urmărind figura:

$$y(t) = x(t)h_0 + x(t-T)h_1 + x(t-2T)h_2 + \ ... \ + x(t-NT)h_N \ .$$

Ţinând cont de proprietăţile convoluţiei cu distribuţia Dirac, relaţia de mai sus devine:

$$y(t) = x(t) * \delta(t)h_0 + x(t) * \delta(t-T)h_1 + x(t) * \delta(t-2T)h_2 + ... + x(t) * \delta(t-NT)h$$

sau:

$$y(t) = x(t) * \sum_{k=0}^{N} h_k \delta(t-kT) = x(t) * h(t) \quad .$$

Se deduce imediat faptul că răspunsul la impuls al sistemului este:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{N} h_k \delta(t-kT) \quad . \qquad \textbf{(2.108)}$$

Alegând în mod corespunzător ponderile h_k şi mărind suficient de mult numărul blocurilor de translaţie (N) se poate aproxima prin h(t) orice distribuţie,

conform teoremei 2.3 (§2.5.3).

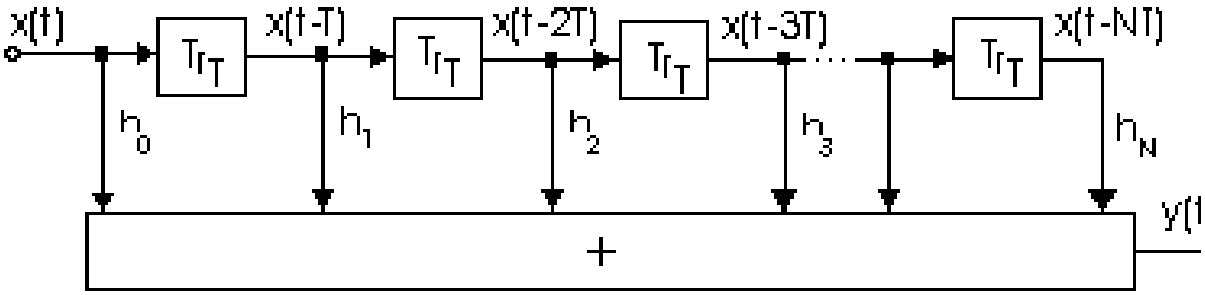


Fig.2.30 Sistem continuu ce utilizează circuite de translaţie în timp cu T , Tr_T .

Un circuit de tipul celui prezentat în figura 2.30 poartă denumirea de structură transversală. Circuitul este similar structurii transversale discrete din figura 2.12.

2. CONVOLUŢIA 73
2.1 Suma de convoluţie. Răspunsul sistemelor discrete liniare şi invariante în timp la un semnal de intrare oarecare. 73
2.1.1 Condiţia de cauzalitate a unui sistem discret 78
2.1.2 Condiţia de BIBO stabilitate a sistemelor discrete, liniare şi invariante în timp 79
2.1.3 Câteva proprietăţi ale convoluţiei şi semnificaţia lor 81
2.2 Răspunsul unui sistem discret, liniar şi invariant în timp la treapta unitară, răspunsul indicial. 84
2.3 Sisteme discrete cu răspuns finit la impuls (FIR) şi sisteme discrete cu răspuns infinit la impuls (IIR) 85
2.4 Implementarea sistemelor discrete liniare şi invariante în timp, caracterizate prin ecuaţii cu diferenţe finite, liniare şi cu coeficienţi constanţi. 86
2.4.1 Implementarea directă I 87
2.4.2 Implementarea directă II 89
2.5 Produsul de convoluţie. Răspunsul sistemelor continue, liniare şi invariante în timp la un semnal de intrare oarecare. (tratarea euristică). 90
2.5.1 Produsul de convoluţie între funcţii 93
2.5.2 Produsul de convoluţie între o distribuţie şi o funcţie. Convoluţia ca operaţie de regularizare a unei distribuţii. 101
2.5.3 Convoluţia distribuţiilor. 105
2.5.4 Condiţia ca un un sistem continuu liniar şi invariant în timp să fie cauzal 115
2.5.5 Condiţia de BIBO stabilitate a sistemelor continue, liniare şi invariante în timp 116
2.5.6 Semnificaţia practică a proprietăţilor produsului de convoluţie 117
2.5.7 Răspunsul unui sistem continuu liniar şi invariant în timp la treapta unitate. Răspunsul indicial. 118
2.5.8 Implementarea sistemelor continue, liniare şi invariante în timp caracterizate de ecuaţii diferenţiale liniare, cu coeficienţi constanţi 119

2. CONVOLUŢIA

Acest capitol este destinat introducerii sumei şi integralei de convoluţie ce permit calcularea răspunsului sistemelor discrete respectiv continue la un semnal de intrare de o formă oarecare, dacă se cunoaşte răspunsul sistemelor la impulsul unitar. Tratarea se va axa pe sistemele liniare şi invariante în timp, prescurtat SLIT. Se vor aborda şi problemele legate de implementarea în formele directe I şi II ale sistemelor descrise prin ecuaţii cu diferenţe finite sau diferenţiale, liniare şi cu coeficienţi constanţi. Având în vedere tratarea mai simplă din punct de vedere matematic, vom începe cu suma de convoluţie, utilizată în cazul sistemelor discrete.

2.1 Suma de convoluţie. Răspunsul sistemelor discrete liniare şi invariante în timp la un semnal de intrare oarecare.

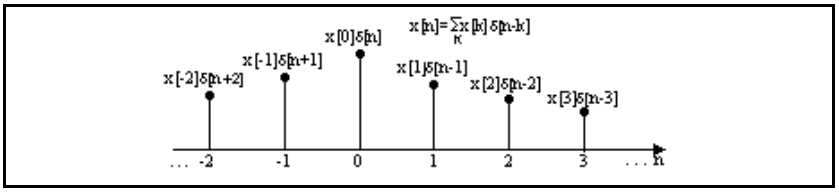


Fig.2.1 Reprezentarea semnalului x[n] ca o sumă ponderată de impulsuri unitare δ[n-k].

După cum s-a arătat în capitolul I - relaţia (1.56) - conform definiţiei impulsului δ[n] avem x[n]δ[n]= =x[0]δ[n] . Considerând acum versiunea deplasată cu k a impulsului unitar δ[n-k], ne propunem să calculăm produsul x[n]δ[n-k] . Conform relaţiei de definiţie (1.53):

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1 \ , & n-k = 0 \ , \ n = k \\ 0 \ , & n-k \neq 0 \ , \ n \neq k \end{cases} . \qquad \textbf{(2.1)}$$

Ţinând seama de (2.1) rezultă imediat că:

$$x[n]\cdot\delta[n-k] = \begin{cases} x[k] \ , & n = k \\ 0 \ , & n \neq k \end{cases} ,$$

ceea ce se scrie şi sub forma:

$$x[n]\cdot\delta[n-k] = x[k]\cdot\delta[n-k] \ . \qquad \textbf{(2.2)}$$

Produsul x[k]δ[n-k] extrage din întregul semnal discret x[n] numai eşantionul x[k], plasându-l în poziţia n = k, aşa cum rezultă şi din figura 2.1. În consecinţă se poate scrie:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \quad , \tag{2.3}$$

relaţie valabilă pentru orice $n \in Z$. Pentru exemplificare vom da variabilei n din membrul drept al sumei (2.3) trei valori. Pentru n=0 suma din membrul drept este:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[-k] = \ldots\, x[-2] \cdot \delta[2] + x[-1] \cdot \delta[1] + x[0] \cdot \delta[0] +$$
$$+ x[1] \cdot \delta[-1] + x[2] \cdot \delta[-2] + \ldots = x[0] \cdot 1 = x[0] \quad .$$

Fie acum n = 1 :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[1-k] = \ldots\, x[-2] \cdot \delta[3] + x[-1] \cdot \delta[2] + x[0] \cdot \delta[1] +$$
$$+ x[1] \cdot \delta[0] + x[2] \cdot \delta[-1] + \ldots = x[1] \cdot 1 = x[1] \quad ,$$

respectiv n = -1 :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[-1-k] = \ldots\, x[-2] \cdot \delta[1] + x[-1] \cdot \delta[0] + x[0] \cdot \delta[-1] +$$
$$+ x[1] \cdot \delta[-2] + x[2] \cdot \delta[-3] + \ldots = x[-1] \cdot 1 = x[-1] \quad .$$

Relaţia (2.3) este, prin urmare, verificată pentru n = 0 , n = 1 şi n = -1 . Demonstraţia este completă. Ceea ce s-a făcut a fost o simplă exemplificare a aplicării relaţiei şi nu o inducţie incompletă. Fie un sistem liniar (aditiv şi omogen) la intrarea căruia se aplică semnalul discret x[n], exprimat sub forma (2.3). Operatorul $\mathbf{S_d}$ ce modelează sistemul discret este liniar. Avem:

$$y[n] = S_d\{x[n]\} = S_d\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \right\} \quad , \tag{2.4}$$

variabila pentru operator ce depinde de n, fiind δ[n-k] . În consecinţă, x[k] se poate considera coeficient al impulsului unitar δ[n-k], dependent de n. Aplicând în relaţia (2.4) proprietăţile de aditivitate şi omogenitate ale operatorului $\mathbf{S_d}$, obţinem:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot S_d\{\delta[n-k]\} \quad . \tag{2.5}$$

Dacă la intrarea sistemului se aplică semnalul δ[n-k] se obţine răspunsul:

$$h_k[n] = S_d\{\delta[n-k]\} \quad . \tag{2.6}$$

Variabila curentă în semnalul discret $h_k[n]$ este n, iar k este un parametru ce arată momentul de aplicare al impulsului unitar la intrare. Relaţia (2.5) devine:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_k[n] \quad . \tag{2.7}$$

Dacă se cunosc toate funcţiile $h_k[n]$, $\forall k \in Z$, se poate calcula răspunsul sistemului discret, liniar şi omogen, la orice semnal de intrare, aplicând relaţia (2.7).

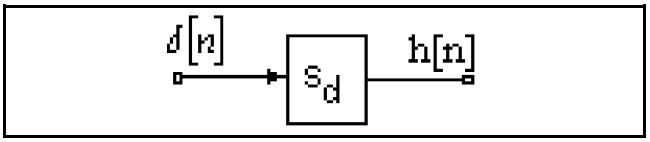


Fig. 2.2.a Răspunsul sistemului S_d la impulsul unitar aplicat în origine.

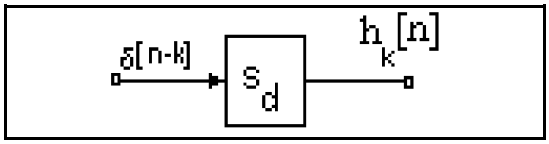


Fig. 2.2.b Răspunsul sistemului S_d la impulsul unitar aplicat la momentul discret k.

Dacă sistemul considerat este şi invariant în timp, notând cu h[n] răspunsul sistemului la impulsul unitar aplicat în origine - figura 2.2.a:

$$h[n] = S_d\{\delta[n]\} \quad , \tag{2.8}$$

avem:

$$h_k[n] = S_d\{\delta[n-k]\} = h[n-k] \quad . \tag{2.9}$$

Răspunsul la impulsul unitar deplasat cu k este versiunea deplasată cu k a răspunsului la impulsul unitar aplicat în origine. Funcţia h[n] , răspunsul la impulsul unitar, este denumită şi "funcţie pondere". Ea caracterizează complet un SLIT. Ţinând seama de (2.9), relaţia (2.7) devine:

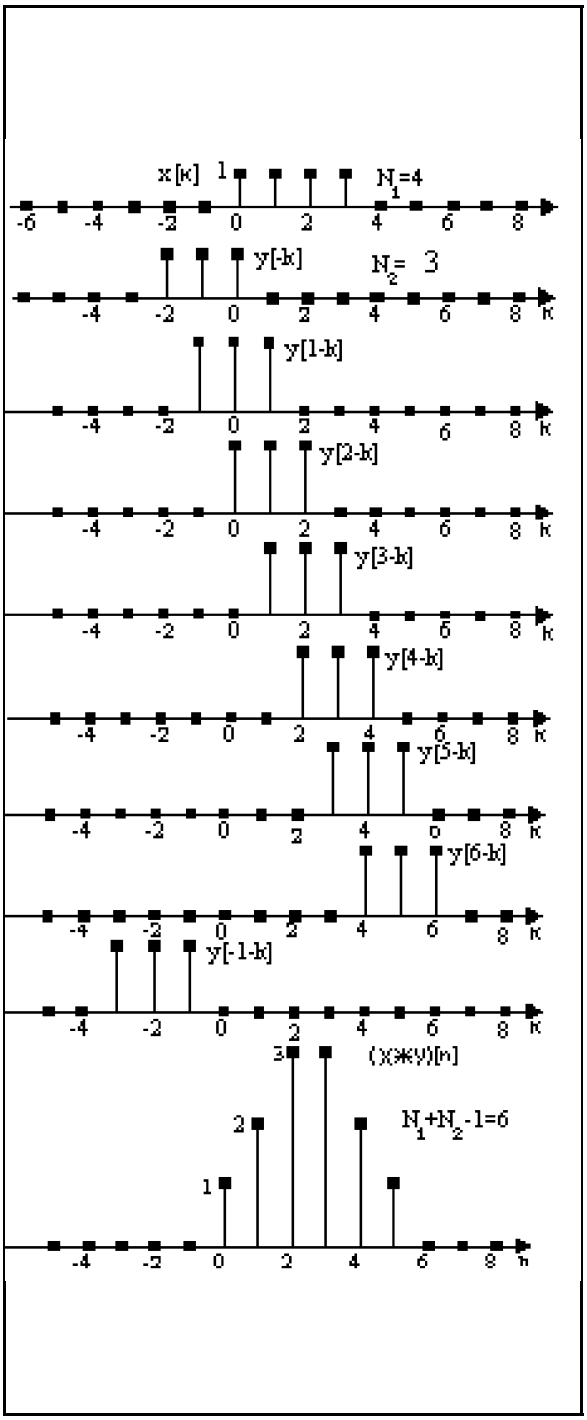


Fig.2.3 Convoluţia a două semnale, de durate N_1 respectiv N_2. Convoluţia are durata N_1+N_2-1.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] \quad . \quad \textbf{(2.10)}$$

Este suficientă cunoaşterea funcţiei pondere pentru a determina răspunsul sistemului LIT la orice semnal de intrare, prin aplicarea relaţiei (2.10). Suma din membrul drept se mai numeşte şi suma de convoluţie a semnalului x[n] cu funcţia pondere h[n] (pe scurt convoluţia). Se scrie:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] \quad .$$

Existenţa sumei de convoluţie este, evident legată de convergenţa seriei infinite (2.10) pentru toate valorile $n \in Z$. Este uşor de verificat, prin simpla schimbare de variabilă n-k = m în relaţia (2.10) că:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m-k] \cdot h[m] = h[n] * x[n] \quad .$$

S-a obţinut astfel:

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad , \qquad \textbf{(2.11)}$$

ce arată faptul că suma de convoluţie este comutativă.

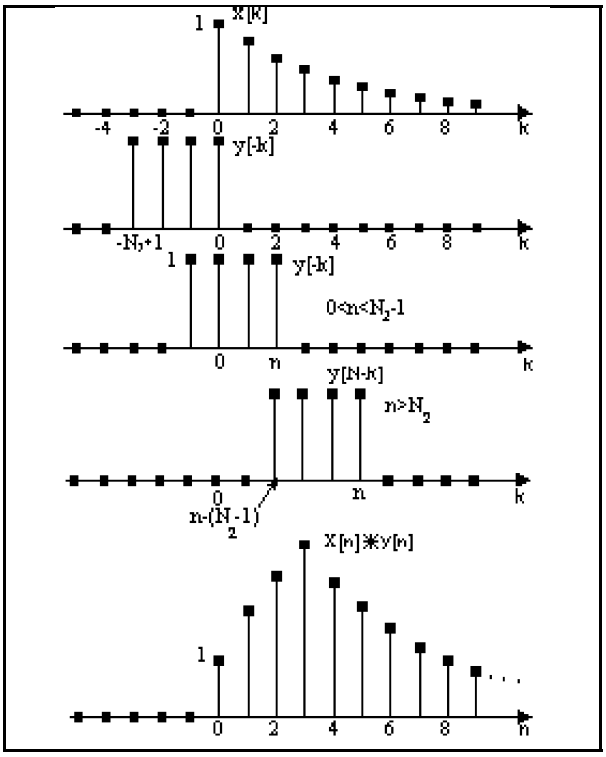


Fig.2.4 Convoluţia cu un semnal discret de durată infinită . Ultimul desen are scara verticală modificată.

Calculul sumei de convoluţie a două semnale oarecare x[n] şi y[n] se poate urmări pe exemplul din figura 2.3. Unul dintre semnale - în figură y - este reprezentat reflectat. Se obţine astfel y[-k] , care este, în continuare, deplasat cu n. Pentru n > 0 , y[n-k] este deplasat spre dreapta iar pentru n<0 spre stânga. Se efectuează, pentru o valoare n dată, produsele eşantioanelor celor două semnale şi se însumează apoi, produsele.

Spre exemplu, după cum rezultă din figura 2.3, pentru n = 0 , numai o pereche de eşantioane din cele două semnale dau un produs nenul, astfel că pentru n = 0 rezultatul convoluţiei este 1. Pentru n = 2 există două perechi de eşantioane ce dau fiecare prin produs 1, suma produselor fiind 2. Valoarea convoluţiei la n = 2 este, prin urmare, 2. ş.a.m.d.

Dacă semnalele sunt de durate finite, având N_1 respectiv N_2 eşantioane, convoluţia lor are durată finită, constând din N_1+N_2-1 eşantioane - vezi şi figura 2.3.

Nu se pune, prin urmare, problema convergenţei convoluţiei dacă ambele semnale au durată finită şi, evident, fiecare dintre ele este mărginit: $|x[n]| \le M_1$, $\forall n \in Z$ şi $|y[n]| \le M_2$, $\forall\ n \in Z$.

Un al doilea exemplu este prezentat în figura 2.4. Unul dintre semnale, x[n], este de durată nemărginită: $x[n] = a^n\sigma[n]$ iar al doilea: $y[n] = \sigma[n]-\sigma[n-N_2]$ este nenul doar pentru n = 0, 1, ..., N_2-1, adică are lungimea N_2 . În consecinţă şi convoluţia are durată infinită şi, prin urmare, se va pune şi problema convergenţei seriei ce reprezintă convoluţia, pentru toate valorile n.

Din figură se observă că pentru n < 0 : $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,y[n-k] = 0$.

Dacă $0 \le n \le N_2-1$: $(x*y)[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

În fine, pentru $n \ge N_2$ rezultă:

$$(x*y)[n] = \sum_{k=n-N_2+1}^{n} a^k = a^{n-N_2+1} + a^{n+1-N_2+1} + \ldots a^n =$$

$$= a^{n-N_2+1}\left(1 + a + a^2 + \ldots + a^{N_2-1}\right) = a^{n-N_2+1}\frac{1-a^{N_2}}{1-a} \quad .$$

Sintetic se poate scrie că:

$$x[n]*y[n] = \begin{cases} 0 & , \quad n < 0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & , \quad 0 \le n \le N_2+1 \\ a^{n-N_2+1}\dfrac{1-a^{N_2}}{1-a} & , \quad n \ge N_2 \end{cases} .$$

2.1.1 Condiţia de cauzalitate a unui sistem discret

Răspunsul unui sistem cauzal la impulsul δ[n], aplicat la momentul n = 0 nu poate începe anterior aplicării acestuia, aşa cum s-a arătat în primul capitol. Prin urmare, pentru un sistem cauzal:

$$h[n] \equiv 0 \quad , \quad n < 0 \quad \Leftrightarrow \quad h[n] = h[n]\,\sigma[n] \quad , \quad \forall\, n \in Z \quad . \qquad \textbf{(2.12)}$$

Se obişnuieşte ca semnalele x[n] ce au proprietatea (2.12), şi anume x[n] ≡ 0 la n < 0 , să fie denumite semnale cauzale, chiar dacă denumirea nu are un suport fizic. Forma convoluţiei pentru un sistem cauzal excitat cu un semnal x[n] devine:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\,h[k] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]\,h[k] \quad ,$$

sau:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\,h[n-k] \quad .$$

În concluzie:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]\,h[k] \quad . \tag{2.13}$$

Dacă şi sistemul şi semnalul de intrare sunt cauzale, relaţia (2.13) devine:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[n-k]\,h[k] \;;\; y[n] = y[n]\,\sigma[n] \quad , \tag{2.14}$$

răspunsul y[n] fiind şi el cauzal.

2.1.2 Condiţia de BIBO stabilitate a sistemelor discrete, liniare şi invariante în timp

Fie sistemul discret LIT, caracterizat prin răspunsul său la impuls, h[n]. La intrare se aplică un semnal x[n] mărginit, ce satisface condiţia:

$$|x[n]| \le M \qquad \forall\, n \in Z \quad . \tag{2.15}$$

Pentru ca sistemul să fie stabil este necesar ca răspunsul să fie finit. Dar: $y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$. Avem succesiv:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] \;;$$

$$|y[n]| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \cdot |x[n-k]| \le M \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad .$$

Conform condiţiei (2.15), dacă $h[n] \in l^1$ adică:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad , \tag{2.16}$$

sistemul este stabil. Condiţia $h[n] \in l^1$ s-a dovedit a fi suficientă. Pentru a arăta că este şi necesară vom considera semnalul x[n] limitat de M = 1 şi definit prin relaţia următoare:

$$x[n] = sgn(h[-n]) \quad . \tag{2.17}$$

Se calculează y[0] :

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[0-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} sgn(h[-k])\, h[-k] \quad .$$

Având în vedere că $|a| = a[sgn(a)]$, rezultă:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[-k]| \;\; ; \;\; k \rightarrow -k \;\; \Rightarrow \;\; y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \quad .$$

Deoarece y[n] trebuie să fie limitat pentru orice n, el va fi limitat (finit) şi pentru n = 0 , $|y[0]| < \infty$. Cum însă y[0] este o sumă de numere pozitive, el este pozitiv şi prin urmare, $|y[0]| = y[0]$. În consecinţă, rezultă drept necesară condiţia:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \;\; \Leftrightarrow \;\; h[n] \in l^1 \quad . \tag{2.16}$$

Dacă $h[n] \in l^1$, eşantioanele sale sunt şi mărginite: $|h[n]| \leq K$. Dacă cel puţin o valoare ar fi nemărginită, h[n] nu ar mai fi absolut sumabilă. Sistemul având funcţia pondere $h[n] = \sigma[n]$ nu este un sistem stabil. Evident, $\sigma[n] \notin l^1$. Pentru un semnal x[n] oarecare aplicat la intrarea sa, răspunsul, conform relaţiei (2.13), este:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad . \tag{2.18}$$

Se observă că $h[n] = \sigma[n]$ implementează sumatorul discret, denumit şi acumulator. Dacă şi x[n] este cauzal, atunci conform relaţiei (2.14), y[n] se calculează cu:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k] \quad . \tag{2.19}$$

Deşi acumulatorul nu satisface condiţia de stabilitate, el poate fi utilizat, limitând superior valoarea lui n prin folosirea unor semnale de intrare de durată finită.

2.1.3 Câteva proprietăţi ale convoluţiei şi semnificaţia lor

Vom începe prin a remarca că δ[n] este element neutru pentru convoluţie:

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] = \ldots + x[n-1]\,\delta[1] + x[n]\,\delta[0] + x[n+1]\,\delta[-1] + \ldots = x[n]$$

$$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = x[n] \quad . \qquad \textbf{(2.20)}$$

În cazul unui sistem discret, dacă la intrare se aplică semnalul x[n] = δ[n] , la ieşire se obţine răspunsul y[n] conform cu: $y[n] = \delta[n] * h[n] = h[n]$, ceea

ce era de aşteptat, deoarece h[n] este chiar răspunsul la impuls unitar. Este uşor de arătat că:

$$x[n] * \delta[n-n_o] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-n_o-k] = \ldots + x[n-n_o-1]\,\delta[1] + x[n-n_o]\,\delta[0] + x[n-n_o+1]\,\delta[-1] + \ldots = x[n-n_o]$$

$$x[n] * \delta[n-n_o] = x[n-n_o] \quad . \qquad \textbf{(2.21)}$$

Un sistem având răspunsul la impuls (funcţia pondere) h[n] = δ[n] nu modifică semnalul de intrare. Pentru un astfel de sistem: y[n] = x[n] . Sistemul având

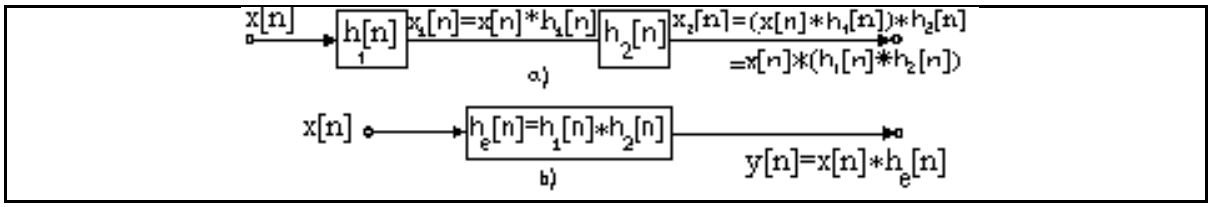


Fig.2.5 (a) Două sisteme discrete conectate în cascadă; (b) Sistemul discret echivalent celor două sisteme conectate în cascadă.

răspunsul la impuls h[n] = δ[n-n_o] furnizează la ieşire semnalul y[n] = x[n-n_o], versiunea deplasată cu n_o a semnalului de intrare. Să considerăm problema conectării în cascadă (serie) a două sisteme, având răspunsurile la impuls h_1[n], respectiv h_2[n] (vezi fig.2.5 a). Dacă la intrarea primului sistem se aplică

semnalul x[n] , la ieşirea acestuia se obţine:

$x_1[n] = x[n] * h_1[n]$, semnal ce se aplică la intrarea celui de-al doilea sistem. La ieşirea acestuia apare semnalul:

$y[n] = x_1[n] * h_2[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$. Se poate scrie:

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_1[n-k] \right) * h_2[n] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_1[m-k] \right) h_2[n-m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1[m-k] \cdot h_2[n-m] \right) .$$

Se pune în ultima sumă: m - k = l ; m = k + l şi se obţine:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1[l] \cdot h_2[n-k-l] \right) .$$

Se notează:

$$h_e[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1[l] \cdot h_2[n-l] \quad ; \quad h_e[n-k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1[l] \cdot h_2[n-k-l] \quad ,$$

notaţie cu care răspunsul y[n] devine:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_e[n-k] = x[n] * h_e[n] \qquad \textbf{(2.22)}$$

$$h_e[n] = h_1[n] * h_2[n] \qquad \textbf{(2.23)}$$

S-a obţinut concluzia că suma de convoluţie este asociativă:

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \quad , \qquad \textbf{(2.24)}$$

Relaţiile (2.22) şi (2.23) ne arată că cele două sisteme pot fi înlocuite cu un singur sistem, echivalent celor două, având răspunsul la impuls $h_e[n]$, convoluţia celor două răspunsuri la impuls - vezi figura 2.5. Să examinăm conectarea în cascadă a două sisteme BIBO stabile, ceea ce înseamnă: $h_1[n] \in l^1$ şi $h_2[n] \in l^1$. Dacă $|x[n]| \leq M$ rezultă că: $|x_1[n]| < K$. $x_1[n]$ fiind semnalul de intrare mărginit, pentru cel de-al doilea sistem, şi el stabil, semnalul de ieşire al acestuia este, la rândul său, tot mărginit: $|y[n]| \leq U$. În consecinţă, sistemul echivalent este BIBO stabil, deoarece fiind excitat cu un semnal

răspunsul său este mărginit. Rezultă, prin urmare imediat: $h_1[n] * h_2[n] \in l^1$. S-a demonstrat indirect faptul că prin convoluţia a două semnale din l^1 rezultă tot un semnal din l^1. Cu alte cuvinte: prin conectarea în cascadă a două sisteme stabile se obţine tot un sistem stabil.

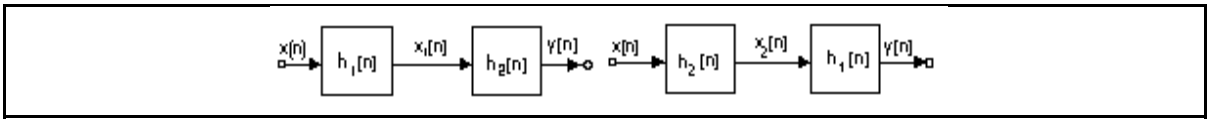


Fig. 2.6 Sistemele $h_1[n]*h_2[n]$ şi $h_2[n]*h_1[n]$ sunt sisteme echivalente. Semnalul de ieşire y[n] este acelaşi, dar $x_1[n] \neq x_2[n]$.

Luând în considerare comutativitatea sumei de convoluţie, rezultă că $h_e[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$. Concluzia prezentată şi în figura 2.6 este că, din punctul de vedere al intrării şi ieşirii generale x[n], respectiv y[n], ordinea de conectare în cascadă a celor două sisteme nu contează. Introducem, în contextul studiului conectării în cascadă a sistemelor, noţiunea de sistem invers unui sistem discret. Se spune că sistemul caracterizat de $h_1[n]$ este invers sistemului cu răspunsul la impuls h[n] dacă semnalul y[n] ce apare la ieşirea celor două sisteme conectate în serie este chiar semnalul de intrare x[n]. Răspunsurile la impuls ale sistemului h[n], şi ale inversului său $h_1[n]$ satisfac, prin urmare, relaţia:

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n] \quad . \qquad \textbf{(2.25)}$$

Figura 2.7 reprezintă două sisteme conectate în paralel. Semnalul de intrare x[n] se aplică ambelor sisteme iar semnalele lor de ieşire, $y_1[n]$ şi $y_2[n]$, se însumează, astfel că $y[n] = y_1[n]+y_2[n]$:

$$y_1[n] = x[n] * h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_1[n-k]$$

$$y_2[n] = x[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_2[n-k] \quad .$$

Însumând cele două relaţii, rezultă:

$$y_1[n] + y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](h_1[n-k] + h_2[n-k]) \quad ,$$

sau:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h_e[n-k] \quad ; \quad h_e[n] = h_1[n] + h_2[n] \quad . \qquad \textbf{(2.26)}$$

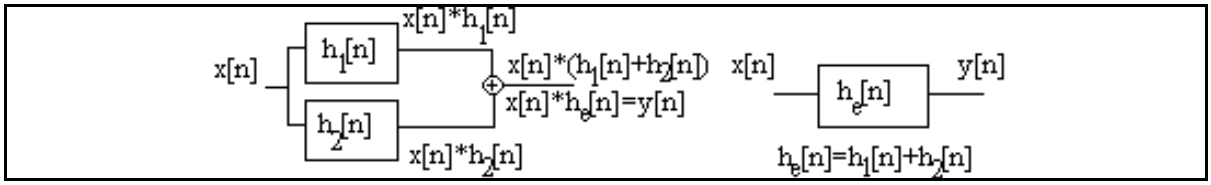


Fig. 2.7 (a) Două sisteme discrete conectate în paralel; (b) Sistemul discret echivalent a două sisteme conectate în paralel..

Conform relaţiei (2.26), suma de convoluţie este distributivă în raport cu adunarea:

$$x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) \quad . \qquad \textbf{(2.27)}$$

În plus, aşa cum rezultă şi din figura 2.7, răspunsul la impuls al sistemului echivalent $h_e[n]$ celor două sisteme conectate în paralel, este egal cu suma răspunsurilor la impuls, $h_1[n] + h_2[n]$.

2.2 Răspunsul unui sistem discret, liniar şi invariant în timp la treapta unitară, răspunsul indicial.

Unul din semnalele de testare utilizate în caracterizarea SLIT discrete este treapta unitară, $x[n] = \sigma[n]$. Răspunsul SLIT la acest semnal se numeşte răspuns la treapta unitară sau răspuns indicial (funcţie indicială). Notaţia utilizată curent este $y[n] = s[n]$ sau $y[n] = r[n]$. Avem:

$$s[n] = h[n] * \sigma[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[n] \quad . \qquad \textbf{(2.28)}$$

Cunoscând s[n], poate fi determinat răspunsul la impulsul unitar, h[n], prin:

$$h[n] = s[n] - s[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} h[k] \quad . \qquad \textbf{(2.29)}$$

Dacă sistemul este cauzal, $s[n] \equiv 0$ pentru $n < 0$ şi relaţia devine:

$$s[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k] \quad . \tag{2.30}$$

2.3 Sisteme discrete cu răspuns finit la impuls (FIR) şi sisteme discrete cu răspuns infinit la impuls (IIR)

Fie sistemul discret caracterizat de ecuaţia cu diferenţe finite liniară şi cu coeficienţi constanţi (1.140), rescrisă cu coeficienţii A_k şi B_k notaţi cu a_k şi b_k:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad . \tag{2.31}$$

În ipoteza că $a_0 \neq 0$ dar $a_1 = a_2 = ... = a_N = 0$, forma ecaţiei devine:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \tag{2.32}$$

Se compară răspunsul y[n] cu răspunsul obţinut prin suma de convoluţie:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] \quad .$$

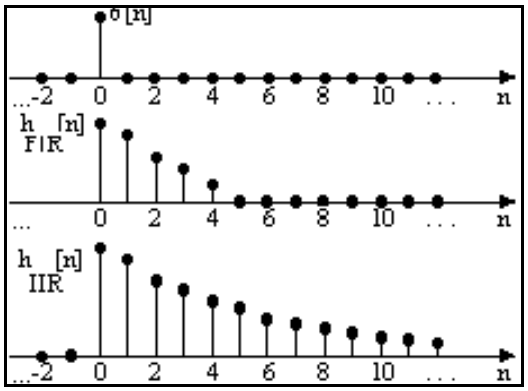


Fig. 2.8 Răspunsul la impuls al unui sistem discret FIR, $h_{FIR}[n]$ şi al unui sistem discret IIR, $h_{IIR}[n]$.

Deoarece răspunsul este acelaşi, rezultă prin identificare:

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{b_n}{a_0}, 0 \le n \le M \\ 0, \hat{i}n\ rest \end{cases} , \tag{2.33}$$

ceea ce înseamnă că răspunsul la impuls este finit. La excitarea sistemului cu impulsul unitar δ[n], răspunsul are M+1 eşantioane, după care este sigur nul. Astfel de sisteme sunt denumite sisteme cu răspuns finit la impuls sau FIR (**F**inite **I**mpulse **R**esponse Systems). În figura 2.8 este prezentat răspunsul la impuls al unui sistem FIR, $h_{FIR}[n]$ cu M = 4, având M + 1 = 5 valori nenule în secvenţă.

Un exemplu de sistem cu răspuns la impuls finit, FIR, este sistemul de mediere a ultimelor M + 1 eşantioane ale semnalului de intrare. Dacă în ecuaţia (2.31) cel puţin încă un termen din membrul stâng este nenul:

$$y[n] - 0{,}5\, y[n-1] = x[n] \quad , \tag{2.34}$$

se obţine, cu rare excepţii un răspuns la impuls infinit. Motivul este acela că odată excitat, sistemul recirculă o parte a semnalului de ieşire, întreţinându-l şi după ce excitaţia a dispărut. Astfel de sisteme sunt denumite sisteme cu răspuns la impuls infinit sau sisteme IIR (**I**nfinite **I**mpulse **R**esponse Systems). Forma răspunsului la impuls a unui sistem IIR, $h_{IIR}[n]$, este prezentată în figura 2.8. Vom considera sistemul descris de ecuaţia (2.34), pentru a determina, răspunsul său la impulsul unitar, considerând îndeplinită condiţia de repaus iniţial:

$$\begin{aligned}
&y[-1] = 0 \\
&y[0] - 0{,}5\, y[-1] = x[0] = 1 \quad \Rightarrow \quad y[0] = 1 \quad \Rightarrow \quad y[0] = h[0] \\
&y[1] - 0{,}5\, y[0] = x[1] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[1] = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad y[1] = h[1] \\
&y[2] - 0{,}5\, y[1] = x[2] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[2] = 0{,}5^2 \quad \Rightarrow \quad y[2] = h[2] \\
&y[3] - 0{,}5\, y[2] = x[3] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[3] = 0{,}5^3 \quad \Rightarrow \quad y[3] = h[3] \quad .
\end{aligned}$$

Se poate arăta, completând inducţia, că:

$$h[n] = 0{,}5^n \sigma[n] \quad , \tag{2.35}$$

evident un răspuns de durată infinită, IIR.

2.4 Implementarea sistemelor discrete liniare şi invariante în timp, caracterizate prin ecuaţii cu diferenţe finite, liniare şi cu coeficienţi constanţi.

Prezentul paragraf abordează problema implementării sistemelor discrete descrise prin ecuaţii cu diferenţe finite, liniare şi cu coeficienţi constanţi, de tipul (2.31). Elementele constructive necesare implementării sunt, aşa cum s-a arătat şi în capitolul 1, blocurile de întârziere cu un eşantion a semnalului, D, blocurile de multiplicare cu o constantă şi blocurile de însumare. Schemele de implementare care se vor obţine pot constitui o bază atât pentru implementarea hard dar pot fi, de asemenea, privite drept modalităţi de derulare a algoritmilor.

2.4.1 Implementarea directă I

Vom porni cu un exemplu, care va fi generalizat în continuare, în ideea uşurării înţelegerii procedeului de implementare a sistemelor prezentat.

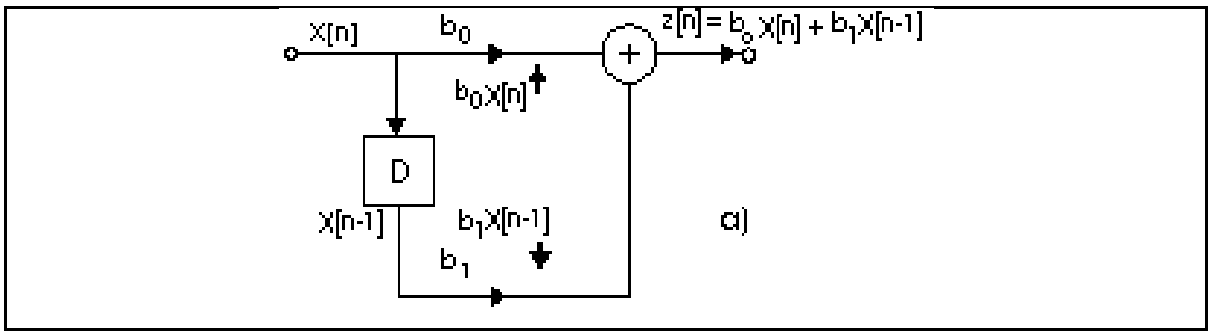


Fig. 2.9.a Sistem nerecursiv ce generează semnalul discret z[n].

Fie sistemul descris de ecuaţia de ordinul I:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \ . \qquad \textbf{(2.36)}$$

Notând:

$$z[n] = b_0 x[n] + b_1 y[n-1] \quad , \qquad \textbf{(2.37)}$$

ecuaţia (2.36) devine:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}(z[n] - a_1 y[n-1]) \quad . \qquad \textbf{(2.38)}$$

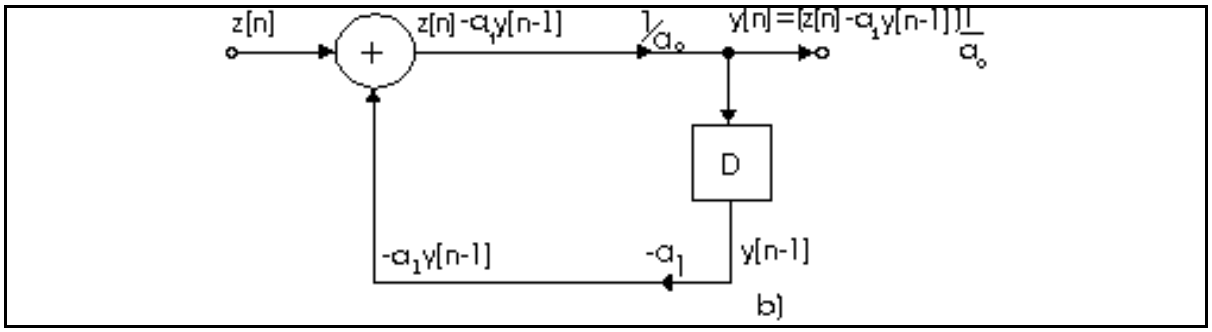


Fig.2.9.b Sistem recursiv ce generează semnalul discret z[n].

Ecuaţia de tip nerecursiv (2.37) se implementează prin schema din figura 2.9.a. Semnalul ei de ieşire este z[n] .

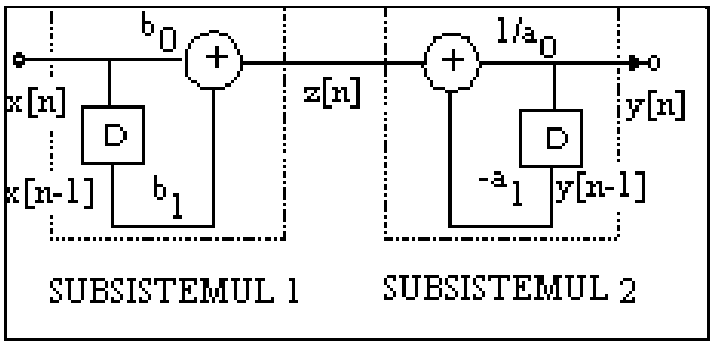


Fig.2.10 Implementarea în forma directă I a ecuaţiei cu diferenţe finite:
$a_0y[n]+a_1y[n-1] = b_0x[n]+b_1x[n-1]$.

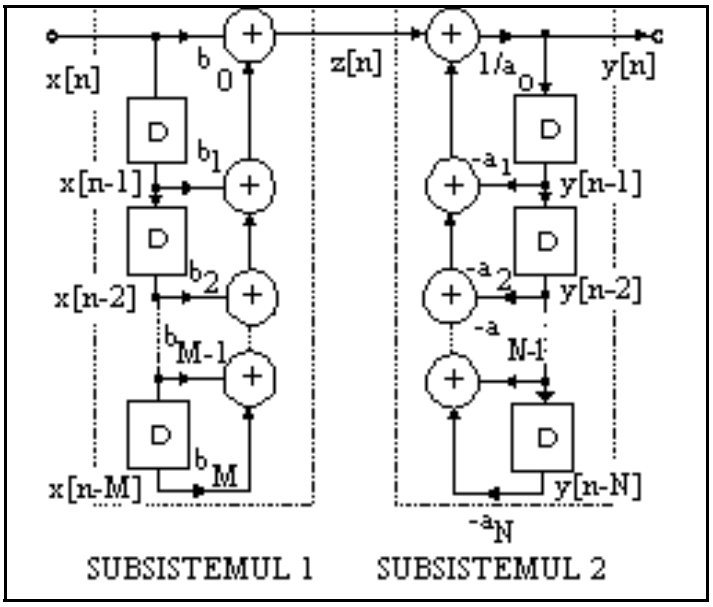


Fig.2.11 Implementarea în forma directă I a ecuaţiei cu diferenţe finite
$\Sigma a_k y[n-k] = \Sigma b_k x[n-k]$.

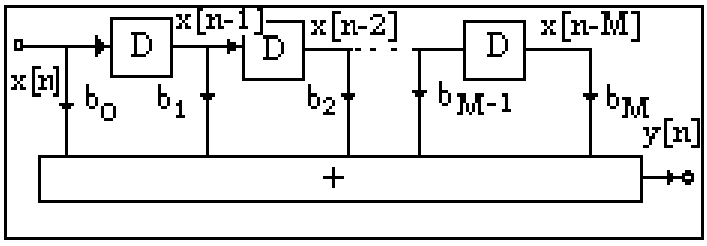


Fig.2.12 Structura unui sistem discret FIR de tip transversal (filtru transversal).

Ecuaţia (2.38) este de tip recursiv. Ea dă naştere unei structuri de implementare ce conţine o buclă de reacţie, prezentată în figura 2.9.b. Prin intermediul acestei bucle, o parte a semnalului de ieşire revine la intrare, conferind răspunsului la impuls caracterul infinit.

Conectând în cascadă cele două scheme parţiale din figura 2.9, conectate între ele prin semnalul intermediar, se obţine schema din figura 2.10. Aceasta implementează ecuaţia cu diferenţe finite (2.36) în aşa numita "formă de implementare directă I".

Se observă faptul că structura schemei este alcătuită prin înserierea a două subsisteme.

Forma de implementare directă I poate fi destul de uşor generalizată pentru cazul ecuaţiei (2.31). Se obţine schema din figura 2.11. Se remarcă şi aici prezenţa celor două subsisteme conectate în cascadă.

În schema din figura 2.11 s-au utilizat mai multe sumatoare pe cele două coloane. În fond este vorba numai de două sumatoare, prevăzut fiecare dintre ele, cu două sau mai multe intrări.

În ceea ce priveşte sistemele FIR, implementarea lor este ceva mai simplă. Ea

rezultă din forma de implementare din figura 2.11, considerând că $a_0 \neq 0$ dar $a_1=a_2= ... =a_N=0$. Rezultă structura de implementare a unui sistem discret FIR din figura 2.12 în care, pentru simplificare, s-a considerat $a_0 = 1$ şi s-a reprezentat un singur sumator cu mai mult de două intrări.

Forma geometrică pe care o ia schema de implementare din figura 2.12 face ca schema aceasta să fie cunoscută şi sub numele de formă "transversală" sau "filtru discret transversal".

2.4.2 Implementarea directă II

Se cunoaşte deja faptul că la conectarea în cascadă a două (sub)sisteme, succesiunea lor nu este importantă din punct de vedere al semnalelor de intrare

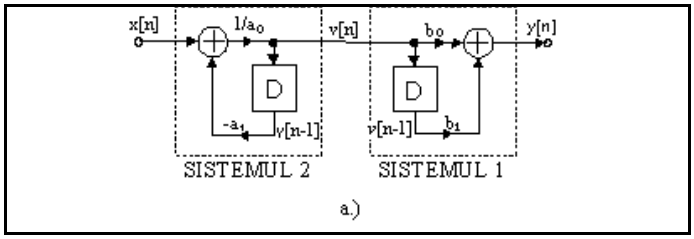


Fig.2.13.a Ca urmare a comutativităţii convoluţiei succesiunea subsistemelor 1 şi 2 din fig. 2.10 poate fi inversată.

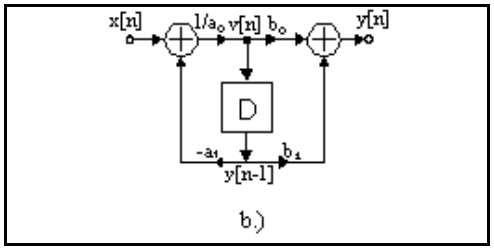


Fig.2.13.b Implementarea în forma directă II a ecuaţiei cu diferenţe finite (2.36).

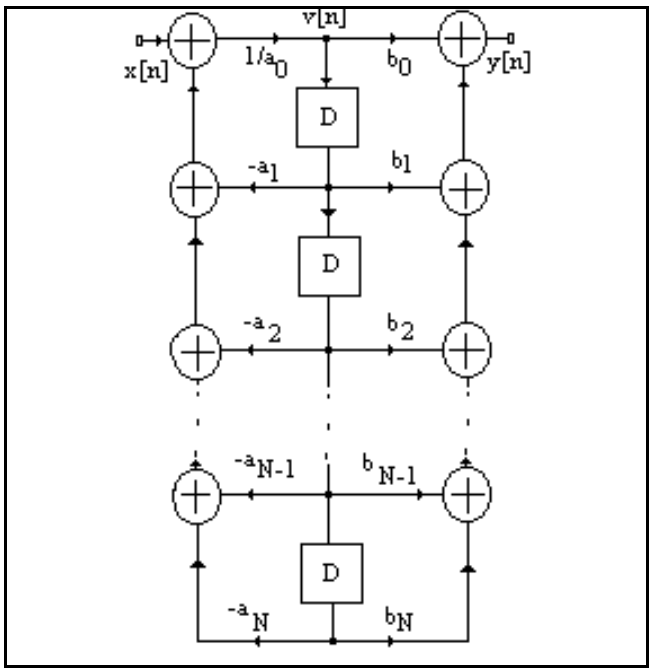


Fig.2.14 Implementarea în forma directă II a ecuaţiei (2.31).

şi de ieşire. În consecinţă, referindu-ne la figura 2.10, ordinea de conectare a celor două subsisteme poate fi inversată, rezultând structura din figura 2.13 a. Semnalul v[n] dintre cele două subsisteme nu mai este acelaşi cu z[n] din figura 2.10 dar acest lucru nici nu interesează întrucât contează doar semnalul de ieşire, y[n]. Se poate remarca imediat faptul că cele două blocuri D au la intrarea şi ieşirea lor aceleaşi semnale, v[n] respectiv v[n-1] . Drept urmare se poate renunţa la prezenţa unuia, rezultând structura din figura 2.13 b, cunoscută sub numele de "forma directă II" de implementa-

re a ecuaţiei (2.36). Necesitând un număr mai mic de circuite de întârziere, ea este mai simplă decât forma directă I, dar structura nu rezultă, în mod firesc, ca în primul caz. Forma directă I de implementare a ecuaţiei (2.31) - reprezentată în figura 2.11 poate fi şi ea transformată în forma directă II, rezultând schema din figura 2.14. Pentru simplificarea reprezentării s-a considerat M = N , ceea ce înseamnă că anumiţi coeficienţi vor fi nuli, lipsin legăturile respective.

2.5 Produsul de convoluţie. Răspunsul sistemelor continue, liniare şi invariante în timp la un semnal de intrare oarecare. (tratarea euristică).

Să considerăm sistemul continuu modelat de operatorul liniar S, ce are pe x(t) - semnal de intrare - şi pe y(t) - semnal de ieşire - vezi figura 2.15.

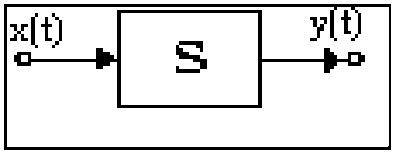


Fig. 2.15 Sistem continuu cu semnalul de intrare x(t).

În cazul sistemelor discrete LIT s-a văzut că este suficientă cunoaşterea răspunsului la impuls, h[n] (obţinut atunci când la intrarea sistemului se aplică δ[n]), pentru a putea calcula semnalul de ieşire y[n] , dacă la intrare se aplică semnalul x[n].

Se pune întrebarea dacă sistemele continue nu au o proprietate similară sistemelor discrete.

Figura 2.16 prezintă un semnal x(t) ce poate fi aproximat cu semnalul $\hat{x}(t)$ în scară având expresia:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\,\Delta)\, dir_{\Delta}(t - k\,\Delta) \quad ; \quad \hat{x}(t) \cong x(t) \quad , \qquad \textbf{(2.39)}$$

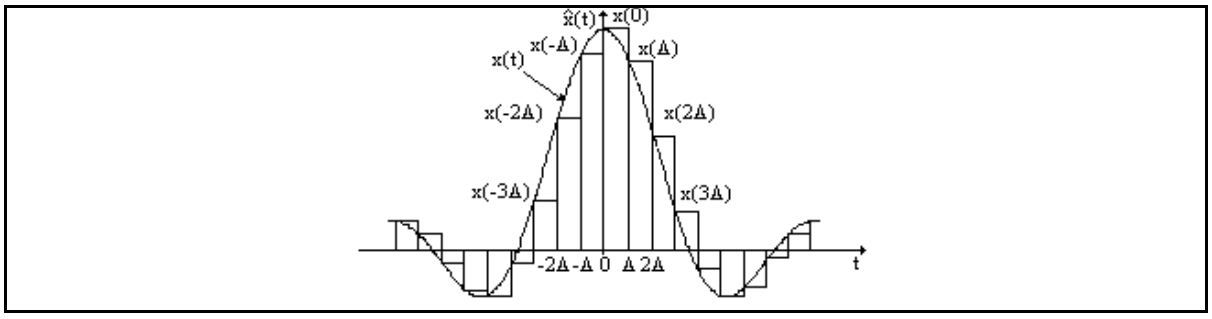


Fig. 2.16 Reprezentarea aproximativă a unui semnal x(t) printr-o sumă scalată de impulsuri de arie unitară, deplasate în timp.

unde prin $dir_{\Delta}(t)$ s-a notat şirul de impulsuri de arie unitară:

$$dir_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} & , \ 0 < t < \Delta \\ 0 & , \ \hat{i}n \ rest \end{cases} , \qquad \textbf{(2.40)}$$

impulsuri indexate după Δ. Atunci când Δ —> 0 , este îndeplinită condiţia (1.114):

$$\lim_{\Delta \to 0} \int_a^b dir_\Delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 & , \ a < 0 < b \\ 0 & , \ a < b < 0 \ \ sau \ \ 0 < a < b \end{cases} ,$$

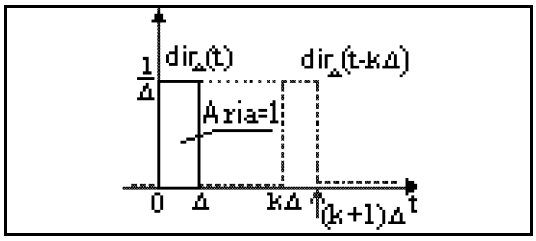


Fig. 2.17 Impulsul $dir_\Delta(t)$, indexat după Δ, este un δ şir.

şi de aceea $dir_\Delta(t)$ este un şir reprezentativ pentru distribuţia Dirac (de unde şi denumirea sa "dir"). Impulsul de arie unitară $dir_\Delta(t)$ precum şi versiunea sa deplasată $dir_\Delta(t-k\Delta)$ sunt prezentate în figura 2.17. Se poate, prin urmare, scrie:

$$\lim_{\Delta \to 0} dir_\Delta(t) = \delta(t) \ , \qquad \textbf{(2.41)}$$

convergenţa fiind slabă. Considerăm semnalul $\hat{x}(t)$ aplicat la intrarea sistemului modelat de operatorul liniar S_d. Având în vedere proprietăţile de liniaritate şi omogenitate, semnalul de la ieşirea sistemului, $\hat{y}(t)$, ce aproximează pe y(t) se calculează astfel:

$$\hat{y}(t) = S\Big\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\, dir_\Delta(t - k\Delta)\, \Delta \Big\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\, S\Big\{ dir_\Delta(t - k\Delta) \Big\} \Delta \ .$$

(2.42)

Deoarece nici x(kΔ) şi nici Δ nu depind de variabila t, ei sunt coeficienţi consideraţi constanţi. De aici forma (2.42). Vom accepta faptul că pe măsură ce Δ tinde spre zero, $\hat{x}(t)$ "aproximează tot mai bine" semnalul x(t). Vom scrie:

$$\lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = x(t) \ . \qquad \textbf{(2.43)}$$

De asemenea, $\hat{y}(t)$ "aproximează tot mai bine" semnalul y(t) = S{x(t)} :

$$\lim_{\Delta \to 0} \hat{y}(t) = y(t) \ . \qquad \textbf{(2.44)}$$

Se explicitează relaţia (2.44), ţinând cont de forma (2.42) şi de continuitatea operatorului S , $\lim S\{x\} = S\{\lim x\}$, precum şi de faptul că produsul $k\Delta$ tinde spre o valoare τ (continuă) , $k\Delta \to \tau$ iar $\Delta \to d\tau$:

$$y(t) = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ k\Delta \to \tau}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) S\{dir_{\Delta}(t-k\Delta)\}\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) S\{\delta(t-\tau)\} d\tau \quad . \tag{2.45}$$

Se notează răspunsul sistemului la impulsul Dirac $\delta(t-\tau)$ cu $h_{\tau}(t)$:

$$S\{\delta(t-\tau)\} = h_{\tau}(t) \quad , \tag{2.46}$$

astfel încât, răspunsul y(t) se scrie sub forma:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_{\tau}(t)\, d\tau \quad . \tag{2.47}$$

Relaţia (2.47), similară relaţiei (2.7) obţinută în cazul sistemelor discrete, ne arată că, în măsura în care este cunoscut răspunsul în timp al sistemului excitat la momentul τ cu un impuls unitar $h_{\tau}(t)$, $\forall\, \tau \in \mathbb{R}$, poate fi calculat răspunsul y(t) pentru orice semnal de intrare, x(t). Dacă, în plus, sistemul este şi invariant în timp (la translaţie), notând cu h(t), răspunsul la impuls unitar aplicat în origine:

$$h(t) = S\{\delta(t-\tau)\} \quad , \tag{2.48}$$

relaţia (2.46) devine:

$$h_{\tau}(t) = S\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau) \quad . \tag{2.49}$$

În consecinţă, răspunsul (2.47) ia forma produsului de convoluţie:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t) \quad . \tag{2.50}$$

Pentru a putea calcula, în cazul sistemelor SLIT, răspunsul acestora, y(t), la un semnal oarecare aplicat la intrare, x(t), este suficientă cunoaşterea răspunsului sistemului la un impuls unitar aplicat la intrare la momentul $t = 0$, $\delta(t)$.

În condiţiile anterior stabilite, trecem şi în relaţia (2.39) la limită. Obţinem astfel, o altă relaţie importantă:

$$\lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ k\Delta \to 0}} \hat{x}(t) = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau \quad ,$$

sau:

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau \quad . \qquad \textbf{(2.51)}$$

Relaţia precizează faptul că distribuţia Dirac reprezintă elementul neutru pentru produsul de convoluţie. Importanţa operaţiei de convoluţie precum şi o seamă de consideraţii făcute anterior, nu tocmai corect fundamentate, pretind o tratare mai riguroasă a convoluţiei, ceea ce vom întreprinde în paragraful care urmează.

2.5.1 Produsul de convoluţie între funcţii

Fie f(t) , g(t) $\in L^1_{loc}$ două funcţii local integrabile, definite pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{C}$. Prin definiţie se numeşte convoluţia celor două funcţii, notată cu $(f*g)(t)$, integrala:

$$(f*g)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau \quad , \qquad \textbf{(2.52)}$$

în măsura în care ea există. Operaţia de convoluţie este comutativă a.p.t. adică:

$$(f*g)(t) = (g*f)(t) \quad . \qquad \textbf{(2.53)}$$

Vom enunţa, în continuare, câteva condiţii în care convoluţia considerată există:

1. **Dacă f , g $\in L^1$; f , g : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ atunci $(f*g)(t)$ există a.p.t. şi avem:**

$$\textit{i)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\, dv$$

$$\textit{ii)} \quad f*g \in L^1 \qquad \textbf{(2.54)}$$

$$\textit{iii)} \quad \|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

S-a notat cu $\|f\|_1$ norma în L^1, calculată cu:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty \quad , \tag{2.55}$$

normă finită, deoarece $f \in L^1$. Demonstrarea afirmaţiei este simplă, dacă se are în vedere teorema lui Fubini. Conform acesteia dacă f şi $g \in L^1$ atunci produsul fg este integrabil pe $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, şi avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int f(u)\,g(v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\,dv \quad .$$

Se face schimbarea de variabilă $u = t - \tau$; $v = \tau$, şi cum Jacobianul transformării este unitar, rezultă:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\,dv \ .$$

Identificând funcţii egale a.p.t. , rezultă că există:

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau \quad a.p.t. \quad ,$$

şi că:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\,dv \quad .$$

Condiţia i) este prin urmare justificată. Verificăm în continuare apartenenţa convoluţiei a două funcţii din L^1 la clasa de funcţii L^1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(t)|\,dt \le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|\,|(g(t-\tau)|\,d\tau\,dt \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|\,d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)|\,dt = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \quad ,$$

sau:

$$\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \quad ,$$

ceea ce implică că şi convoluţia este din L^1, deci şi condiţiile ii) şi iii) sunt verificate.

2. **Dacă f , g $\in L^2$; f , g : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ atunci $(f*g)(t)$ există, este mărginită şi continuă, având proprietatea de distributivitate.**

Ne vom limita la a demonstra existenţa şi mărginirea convoluţiei funcţiilor din L^2:

$$|(f*g)(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \cdot |g(t-\tau)|\, d\tau = (|f| * |g|)(t) \quad .$$

Aplicăm inegalitatea lui Schwartz:

$$|(f*g)(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \cdot |g(t-\tau)|\, d\tau \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du\right)^{\frac{1}{2}} , \ \forall t$$

şi obţinem în final că:

$$|(f*g)(t)| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < \infty \quad , \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad . \qquad \textbf{(2.56)}$$

Prin urmare, integrala de definiţie a produsului de convoluţie este convergentă pentru orice t $\in \mathbb{R}$, deci acest produs există. Mai mult, el este o funcţie mărginită. În demonstraţia anterioară s-a folosit definiţia normei:

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \qquad \textbf{(2.57)}$$

În ceea ce priveşte ultima afirmaţie, privind distributivitatea, ea este evidentă. Pentru g_1 , $g_2 \in L^2$ şi a_1 , $a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1g_1+a_2g_2 \in L^2$. Prin urmare convoluţia $f*(a_1 g_1 + a_2 g_2)$ este definită, iar prin calcul direct rezultă:

$$f*(a_1 g_1 + a_2 g_2) = a_1 f*g_1 + a_2 f*g_2 \quad . \qquad \textbf{(2.58)}$$

3. **Dacă $f \in L^2$ şi $g \in L^1$; $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ atunci $(f*g)(t)$ există şi este din L^2.**

Calculăm modulul produsului de convoluţie a celor două funcţii:

$$|(f*g)(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \cdot |g(t-\tau)| \, d\tau \quad ;$$

$$|(f*g)(t)|^2 \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \cdot |g(t-\tau)|^{\frac{1}{2}} \cdot |g(t-\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau \right)^2 \quad ,$$

şi aplicăm în continuare inegalitatea lui Schwartz:

$$|(f*g)(t)|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 |g(t-\tau)| \, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)| \, d\tau = \|g\|_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 \, |g(t-\tau)|$$

Pe baza relaţiei anterioare, continuăm prin a calcula pătratul normei convoluţiei în L^2:

$$\|(f*g)(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(t)|^2 dt \le \|g\|_1 \int\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 \, |g(t-\tau)| \, d\tau \, dt \le$$

$$\le \|g\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| \, du = \|g\|_1 \cdot \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_1 = \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_1^2 \quad ,$$

sau:

$$\|f*g\|_2 \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_1 < \infty \quad . \qquad \textbf{(2.59)}$$

Ultima relaţie probează atât existenţa convoluţiei cât şi apartenenţa ei la spaţiul de funcţii L^2.

4. **Dacă $f \in L^1$, iar g este o funcţie mărginită pe $\mathbb{R}$, $|g| \le M$; $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ atunci $(f*g)(t)$ există, este mărginită şi continuă pe $\mathbb{R}$.**

Verificăm proprietatea enunţată:

$$|(f*g)(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \cdot |g(t-\tau)| \, d\tau \le M \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \, d\tau = M \|f\|_1 \quad .$$

Convoluţia există.

5 **Dacă f , g $\in L^1_{loc}$; f , g : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dar una are suportul compact I (de exemplu f), atunci $(f*g)(t)$ există şi este din L^1_{loc} , dar nu are, în general, suportul compact. Numai dacă ambele funcţii au suportul compact, convoluţia are suport compact.**

Pentru a arăta existenţa convoluţiei calculăm modulul acesteia:

$$|(f*g)(t)| \le \int_I |f(\tau)|\,|g(t-\tau)|\,d\tau < \infty \quad .$$

6 **Dacă f , g $\in L^1_{loc}$; f , g : A $\to \mathbb{R}$, A $\subset [0, \infty)$, atunci $(f*g)(t)$ există şi este din L^1_{loc} , a.p.t. Suportul convoluţiei este inclus în A,** $\operatorname{supp}(f*g) \subset A$.

În cazul de faţă avem f(t) ≡ 0 pentru t < a sau f(t) = f(t)σ(t-a) şi g(t) ≡ 0 , t<a, adică: g(t) = g(t)σ(t-a) , a ≥ 0. Rezultă că:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau \quad ,$$

şi, prin urmare, convoluţia există.

Exemple

i) Fie f : $\mathbb{R}^*$ —> $\mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{|t|}}\,\dfrac{1}{|t|+1}$ *. Funcţia aparţine clasei L^1 deoarece* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = 2\int_0^{\infty} |f(t)|\,dt$ *, şi făcând schimbarea de variabilă t = u^2 (t > 0 în cea de a doua integrală), rezultă:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = 2\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = 2\pi \quad ; \quad \|f\|_1 = 2\pi \Rightarrow f \in L^1 \quad .$$

Fie g = f $\in L^1$. Conform condiţiei 1., $(f*g)(t)$ *există a.p.t. şi* $f*g \in L^1$:

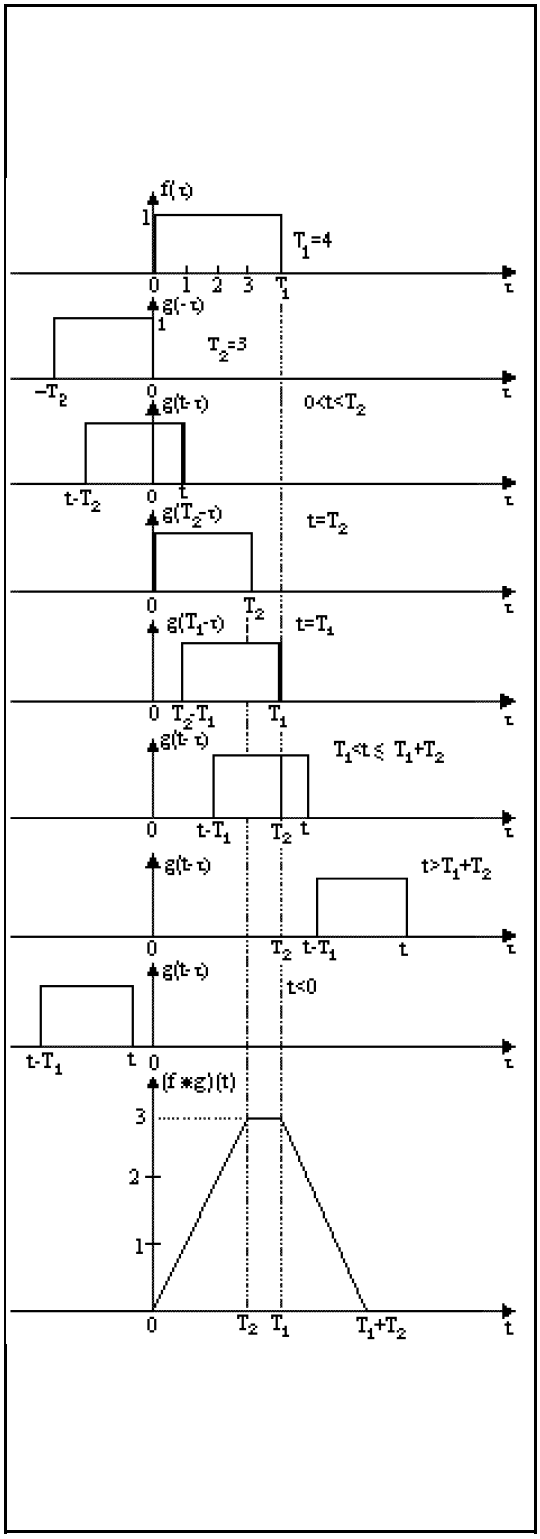


Fig. 2.18 Convoluţia a două semnale dreptunghiulare de durate T_1 şi T_2. Convoluţia are durata $T_1 + T_2$.

$$(f*f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t-\tau)\, d\tau \quad .$$

Pentru t = 0 , integrandul este f(τ)f(t-τ) şi este uşor de verificat că este par. În consecinţă:

$$(f*f)(0) = 2\int_{0}^{\infty} f(\tau) f(-\tau)\, d\tau =$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau(\tau+1)^2} \quad \longrightarrow \quad \infty \quad .$$

Convoluţia există a.p.t. , dar nu pentru t = 0 .

ii) Fie f(t) = σ(t)-σ(t-T_1) şi g(t)=σ(t)-σ(t-T_2) ; f, g : $\mathbb{R}$ —> $\mathbb{R}$, ambele din L^2. Pentru a înţelege mai bine mecanismul de calcul al convoluţiei se poate urmări figura 2.18.

Se construieşte g(-τ) , reflectatul semnalului g(τ). Uneori pentru g(-τ) se utilizează notaţia ğ(τ):

$$\check{g}(\tau) = g(-\tau) \quad . \quad \textbf{(2.60)}$$

Se procedează, în continuare, la deplasarea semnalului g(-τ) cu t. Pentru t<0 - deplasare spre stânga - produsul f(τ)g(t-τ) este nul. Prin urmare, şi rezultatul convoluţiei este nul.

Pentru t > 0 dar t ≤ T_2 :

$$(f*g)(t) = \int_{0}^{t} d\tau = t \quad .$$

Valorile deplasării $T_2 \le t \le T_1$ *nu modifică integrandul, astfel că:*

$$(f*g)(t) = \int_{t-T_2}^{\cdot} d\tau = T_2 = const \quad .$$

Pentru $T_1 \le t \le T_1+T_2$ *, convoluţia se calculează cu:*

$$(f*g)(t) = \int_{t-T_1}^{T_2} d\tau = T_1+T_2-t \quad .$$

În sfârşit, dacă $t > T_1+T_2$ *, produsul* $f(\tau)f(t-\tau)$ *este nul şi, prin urmare, convoluţia este nulă. Rezultatul este sintetizat sub forma:*

$$(f*g)(t) = \begin{cases} 0 & , \ t > T_1+T_2 \\ T_1+T_2-t & , \ T_1 \le t \le T_1+T_2 \\ T_2 & , \ T_2 \le t \le T_1 \\ t & , \ 0 \le t < T_2 \\ 0 & , \ t < 0 \end{cases} \quad .$$

Rezultatul este, evident, o funcţie din L^2*. Se observă faptul că suportul acestei funcţii, sau durata convoluţiei nenule, este* T_1+T_2*, suma suporturilor semnalelor care intră în convoluţie.*

iii) Un caz interesant îl prezintă convoluţia semnalului dreptunghiular centrat pe origine cu el însuşi:

$$f(t) = \sigma\left(t+\frac{T}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{T}{2}\right) \quad . \qquad \textbf{(2.61)}$$

Este uşor de obţinut că:

$$h(t) = T\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\left(\sigma(t+T)-\sigma(t-T)\right) \quad , \qquad \textbf{(2.62)}$$

un semnal triunghiular de durată 2T (suportul se întinde între -T şi T).

iv) Fie acum convoluţia semnalului (2.61) cu suport finit, din L^2*, cu semnalul:*

$$g(t) = a^t\sigma(t) \ , \ 0 < a < 1 \quad .$$

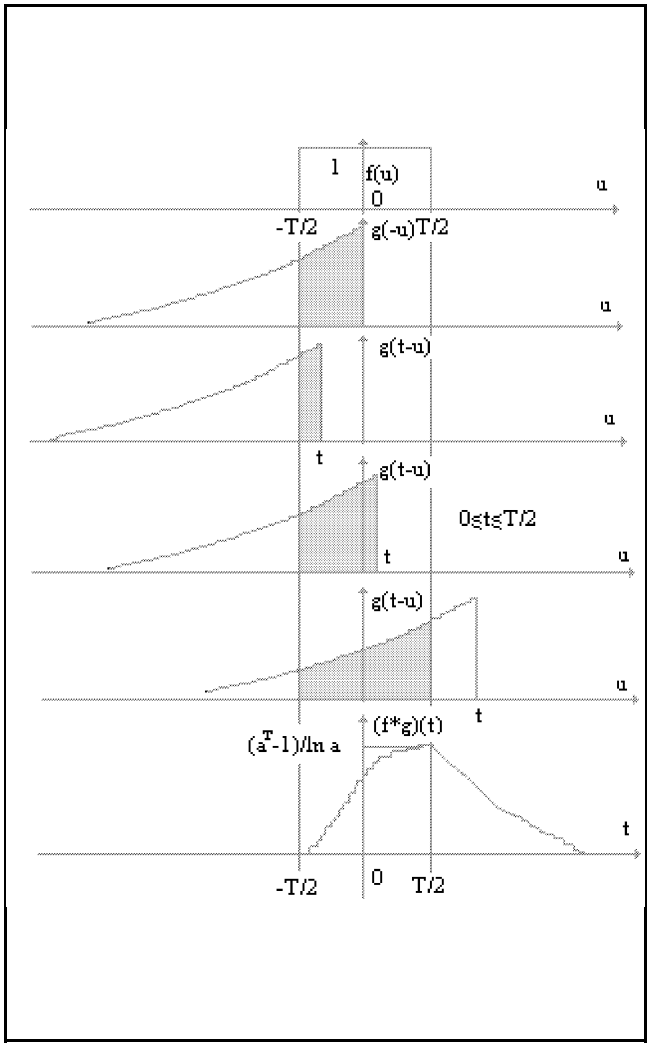


Fig.2.19 Convoluţia semnalului f(t) având durată finită cu un semnal g(t) de durată infinită.

Acesta este un semnal din $L^1 \cap L^2$, aşa că rezultatul aşteptat va fi $f*g \in L_2$ *, un semnal, de data aceasta cu suport infinit.*

Figura 2.19 prezintă modalitatea de calcul a convoluţiei celor două semnale. Rezultatul final poate fi pus sub forma:

$$(f*g)(t) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}\left[\left(1-a^{t+\frac{T}{2}}\right)\sigma\left(t+\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(1-a^{t-\frac{T}{2}}\right)\sigma\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]\right. .$$

v) Convoluţia semnalului f(t) = σ(t) din L^1_{loc} cu el însuşi, are drept rezultat:

$$(\sigma*\sigma)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\sigma(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} t \ , \ t \geq 0 \\ 0 \ , \ t < 0 \end{array}\right\} = t\cdot\sigma(t) \quad .$$

(2.63)

Convoluţia există pentru $\forall\ t \in \mathbb{R}$ *şi este o funcţie local integrabilă.* Distributivitatea convoluţiei faţă de operaţia de adunare a funcţiilor este o proprietate uşor de verificat, în schimb, proprietatea de asociativitate:

$(f(t)*g(t))*h(t) = f(t)*(g(t)*h(t))$ este asigurată numai în cazurile:

1) f, g şi h sunt din L^1 ;
2) f, g şi h sunt din L^1_{loc} şi două dintre ele au suport compact;
3) f, g şi h sunt din L^1_{loc} şi toate trei au drept suport o mulţime închisă, inclusă în [0 , ∞).

Problema 1.

Calculaţi convoluţia semnalelor:

a). $\boldsymbol{x(t) = t \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sigma(t)}$ *şi* $\boldsymbol{h(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot \sigma(t)}$ *cu* $\alpha > 0$ *şi* $\beta > 0.$

b). $\boldsymbol{x(t) = t \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sigma(t)}$ *şi* $\boldsymbol{h(t) = t \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sigma(t)}$ *cu* $\alpha > 0$ *şi* $\beta > 0.$

c). $\boldsymbol{x(t) = e^{-t} \cdot \sigma(t)}$ *şi* $\boldsymbol{h(t) = e^{t} \cdot \sigma(-t)}$ *cu* $\alpha > 0$ *şi* $\beta > 0.$

Rezolvare:

a). $\boldsymbol{x(t) = t \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sigma(t)}$, $\boldsymbol{h(t) = e^{-\beta \cdot t} \cdot \sigma(t)}$ *cu* $\alpha > 0$ *şi* $\beta > 0.$ *Graficele necesare pentru calculul convoluţiei sunt prezentate în figura următoare.*

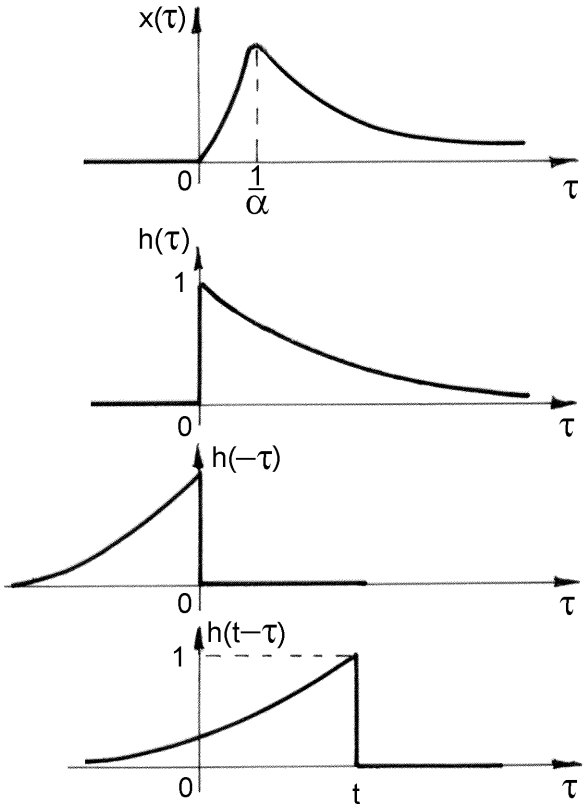


Fig.1.1. Graficele necesare calculului convoluţiei.

I. $t < 0$ $\quad y(t) = 0$

II. $t \geq 0$ $\quad \boldsymbol{y(t) = \int_{0}^{t} \tau \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot e^{-\beta(t-\tau)} d\tau = e^{-\beta t} \int_{0}^{t} \tau \cdot e^{-(\alpha-\beta)\tau} d\tau =}$

$$= \frac{e^{-\beta \cdot t}}{\beta - \alpha} \left[t \cdot e^{(\beta-\alpha)t} - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{0}^{t} d\left[e^{(\beta-\alpha)\tau} \right] \right] =$$

$$= \frac{e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}\left[t \cdot e^{(\beta-\alpha)t} - \frac{1}{\beta-\alpha}\left(e^{(\beta-\alpha)t} - 1\right)\right] = \frac{e^{-\beta \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t}}{(\beta-\alpha)^2} + t\frac{e^{-\alpha \cdot t}}{\beta-\alpha}$$

$$y(t) = \left[\frac{e^{-\beta \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t}}{(\beta-\alpha)^2} + t \cdot \frac{e^{-\alpha \cdot t}}{\beta-\alpha}\right] \cdot \sigma(t)$$

b). $x(t) = t \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sigma(t)$, $h(t) = t \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sigma(t)$ *cu* $\alpha > 0$ *şi* $\beta > 0$.

Graficele necesare calculului convoluției sunt prezentate în figura următoare.

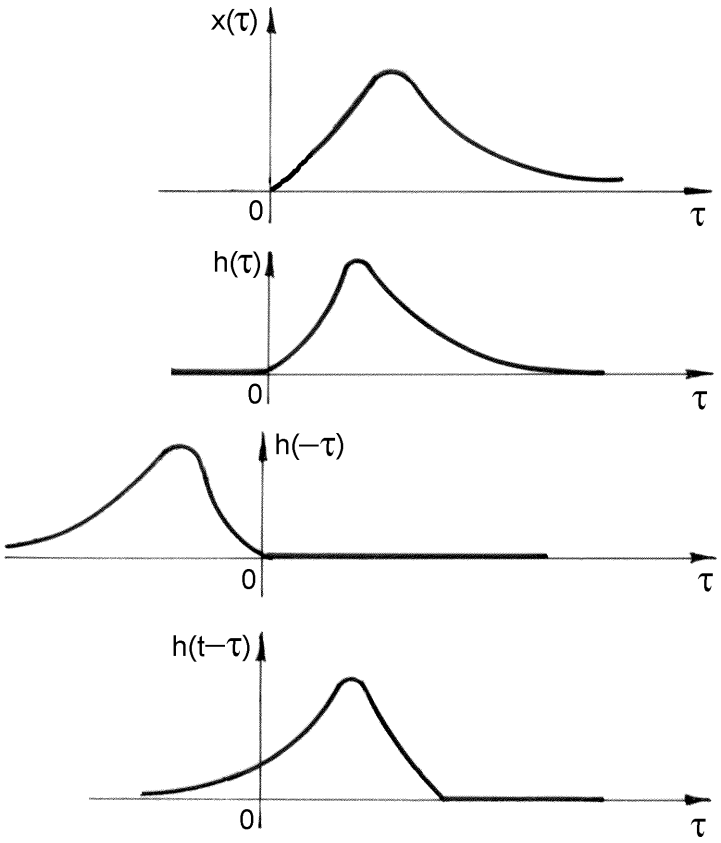


Fig.1.2. Calculul convoluției din cel de al doilea exemplu.

I. $t < 0$ $\quad y(t) = 0$

II. $t \geq 0$ $\quad y(t) = \int_0^t \tau \cdot e^{-\alpha\tau}(t-\tau)e^{-\beta(t-\tau)}d\tau =$

$$= e^{-\beta \cdot t}\left[\int_0^t \tau \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot t \cdot e^{\beta \cdot \tau} d\tau - \int_0^t \tau^2 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} e^{\beta \cdot \tau} d\tau\right]$$

Cele două integrale din membrul drept de mai sus s-au notat cu I_1 şi I_2 şi s-au calculat pe rând:

$$I_1 = \left[\int_0^t \tau \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot t \cdot e^{\beta \cdot \tau} d\tau \right] =$$

$$= t \int_0^t \tau \cdot e^{-(\alpha - \beta)\tau} d\tau = \frac{t}{(\beta - \alpha)} \left[t \cdot e^{(\beta - \alpha)t} - \frac{1}{(\beta - \alpha)} \left(e^{(\beta - \alpha)t} - 1 \right) \right]$$

unde s-a făcut notația:

$$I_3 = \int_0^t \tau \cdot e^{(\beta - \alpha)\tau} d\tau = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_0^t \tau \cdot d\left[e^{(\beta - \alpha)\tau} \right] =$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \left[\tau \cdot e^{(\beta - \alpha)\tau} \Big|_0^t - \int_0^t e^{(\beta - \alpha)\tau} d\tau \right] = \frac{1}{\beta - \alpha} \left[t \cdot e^{(\beta - \alpha)t} - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_0^t d\left(e^{(\beta - \alpha)\tau} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \left[t \cdot e^{(\beta - \alpha)t} - \frac{1}{\beta - \alpha} \left(e^{(\beta - \alpha)t} - 1 \right) \right]$$

$$I_2 = \int_0^t \tau^2 \cdot e^{(\beta - \alpha)\tau} d\tau = \frac{1}{(\beta - \alpha)} \int_0^t \tau^2 \cdot d\left[e^{(\beta - \alpha)\tau} \right] =$$

$$= \frac{1}{(\beta - \alpha)} \left[t^2 \cdot e^{(\beta - \alpha)t} - 2 \int_0^t \tau \cdot e^{(\beta - \alpha)\tau} d\tau = \right]$$

$$= \frac{1}{(\beta - \alpha)} \left\{ t^2 \cdot e^{(\beta - \alpha)t} - 2 \left[\frac{1}{(\beta - \alpha)} \left(t \cdot e^{(\beta - \alpha)t} - \frac{1}{(\beta - \alpha)} \left(e^{(\beta - \alpha)t} - 1 \right) \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{(\beta - \alpha)} \left\{ t^2 \cdot e^{(\beta - \alpha)t} - \frac{2}{(\beta - \alpha)} \left[t \cdot e^{(\beta - \alpha)t} - \frac{1}{(\beta - \alpha)} \left(e^{(\beta - \alpha)t} - 1 \right) \right] \right\}$$

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{(\beta - \alpha)} t^2 \cdot e^{(\beta - \alpha)t} - \frac{t}{(\beta - \alpha)^2} \left[e^{(\beta - \alpha)t} - 1 \right] - \frac{t^2}{(\beta - \alpha)} t^2 \cdot e^{(\beta - \alpha)t} +$$

$$+ \frac{2}{(\beta - \alpha)^2} \left[t \cdot e^{(\beta - \alpha)t} - \frac{1}{(\beta - \alpha)} \left(e^{(\beta - \alpha)t} - 1 \right) \right]$$

$$y(t) = e^{-\beta t} \left[I_1 - I_2 \right] \cdot \sigma(t)$$

c). $\boldsymbol{x(t)=e^{-t}\cdot\sigma(t)}$ *şi* $\boldsymbol{h(t)=e^{t}\cdot\sigma(-t)}$ *cu* $\alpha>0$ *şi* $\beta>0.$

I. $t<0$ $\quad \boldsymbol{y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{2\tau}d\tau = e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} d\left(e^{2\tau}\right)=}$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\cdot e^{2\tau}\Big|_{-\infty}^{t}=\frac{1}{2}e^{-t}\cdot e^{2t}=\frac{1}{2}e^{t}$$

Graficele necesare calculului convoluţiei sunt prezentate în figura următoare.

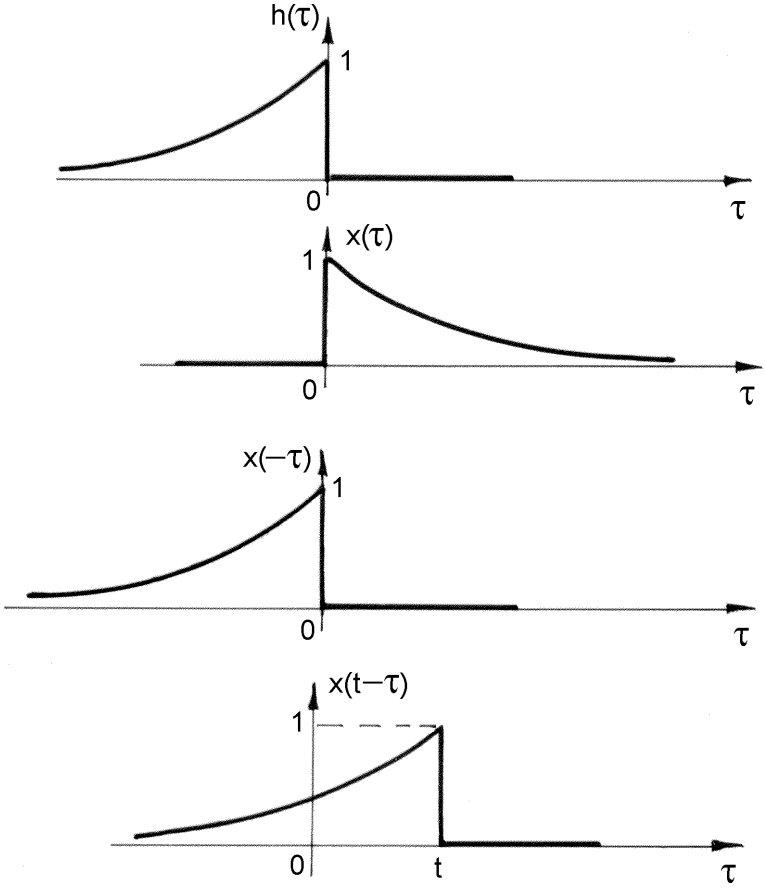


Fig.1.3 Graficele semnalelor din cel de al treilea exemplu.

II. $t\geq 0$ $\quad \boldsymbol{y(t)=\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{2\tau}d\tau = e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} d\left(e^{2\tau}\right)=\frac{e^{-t}}{2}}$

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{t}\cdot\sigma(-t)+\frac{1}{2}e^{-t}\cdot\sigma(t)-\frac{1}{2}$$

În figura următoare se reprezintă grafic rezultatul obținut.

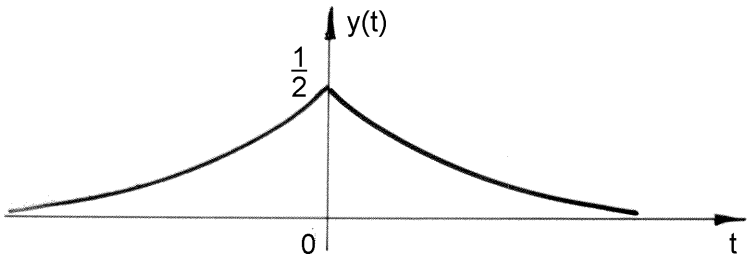


Fig.1.4. Convoluția calculată.

Problema 2.

Calculați convoluția semnalelor:

a). $x[n] = \sigma[n+4] - \sigma[n-4]$ şi $h[n] = \sigma[n+4] - \sigma[n-4]$;

b). $x[n] = \sigma[n+3] - \sigma[n-3]$ şi $h[n] = \sigma[n+5] - \sigma[n-5]$;

Rezolvare:

a). Semnalele $x[n] = \sigma[n+4] - \sigma[n-4]$ şi $h[n] = \sigma[n+4] - \sigma[n-4]$ au graficele din figura următoare.

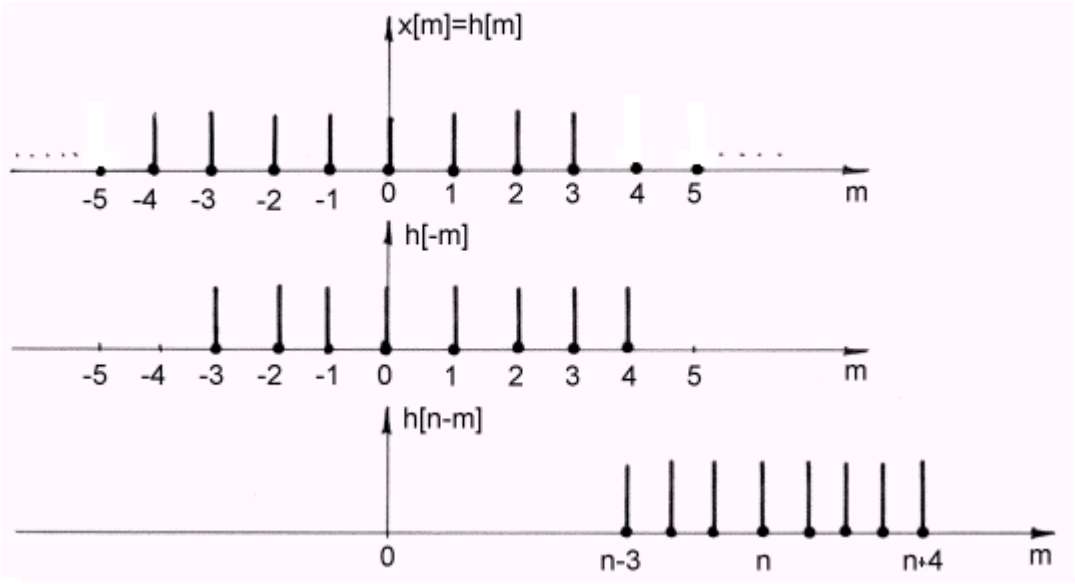


Fig.2.1. Graficele semnalelor a căror convoluție trebuie calculată.

I. $n + 4 < -4$, $y[n] = 0 \Leftrightarrow n < -8$

II. $n + 4 \geq -4$, $n - 3 < -3 \Leftrightarrow -8 \leq n < 0$

$$y[n] = \sum_{m=-4}^{n+4} 1 = \begin{cases} 1\ , & n = -8 \\ 2\ , & n = -7 \\ 3\ , & n = -6 \\ 4\ , & n = -5 \\ 5\ , & n = -4 \\ 6\ , & n = -3 \\ 7\ , & n = -2 \\ 8\ , & n = -1 \end{cases}$$

III. $n - 3 \le 3 \Leftrightarrow n < 6$, $0 \le n < 6$

$y[0] = 7$

$$y[n] = \sum_{m=n-3}^{3} 1 = \begin{cases} 6, & n = 1 \\ 5, & n = 2 \\ 4, & n = 3 \\ 3, & n = 4 \\ 2, & n = 5 \\ 1, & n = 6 \end{cases}$$

IV. $n - 3 > 3$ $y[n] = 0$

Rezultatul obținut este prezentat în figura următoare.

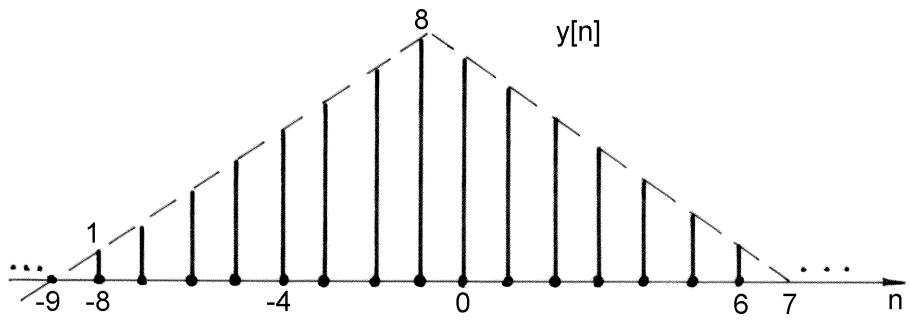


Fig.2.2. Graficul convoluției semnalelor de la punctul a).

b). $x[n] = \sigma[n+3] - \sigma[n-3]$ *şi* $h[n] = \sigma[n+5] - \sigma[n-5]$;

Graficele celor două semnale sunt prezentate în figura 2.3.

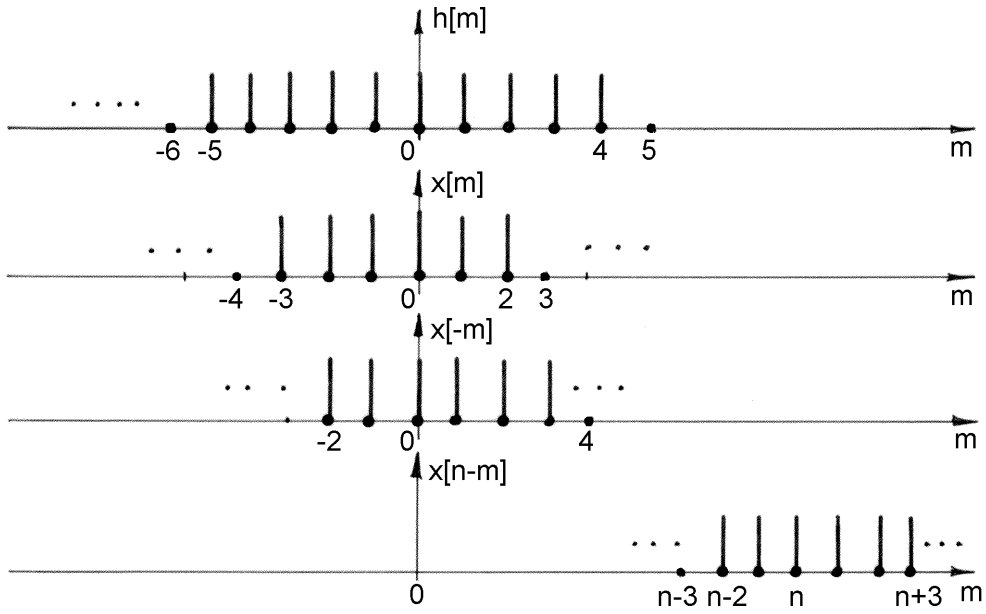


Fig.2.3. Graficele semnalelor a căror convoluție trebuie calculată.

I. $n + 3 < -5 \qquad y[n] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n < -8$

II. $n + 3 \geq -5 \;, \quad n - 2 \leq -5 \quad \Leftrightarrow \quad -8 \leq n \leq -3$

$$y[n] = \sum_{m=-5}^{n+3} 1 = \begin{cases} 1 \;, & n = -8 \\ 2 \;, & n = -7 \\ 3 \;, & n = -6 \\ 4 \;, & n = -5 \\ 5 \;, & n = -4 \\ 6 \;, & n = -3 \end{cases}$$

III. $n - 2 > -5 \;, \quad n + 3 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad n > -3 \;, \; n < 1$

$y[n] = 6$

IV. $n \geq 4 \;, \; n - 2 < 4 \Leftrightarrow n \geq 1 \;, \; n < 6$

$$y[n] = \sum_{m=n-2}^{4} 1 = \begin{cases} 6 \;, & n = 1 \\ 5 \;, & n = 2 \\ 4 \;, & n = 3 \\ 3 \;, & n = 4 \\ 2 \;, & n = 5 \end{cases}$$

$n = 6 \qquad y[n] = 1$

$n > 6 \qquad y[n] = 0$

Rezultatul obținut este reprezentat în figura următoare.

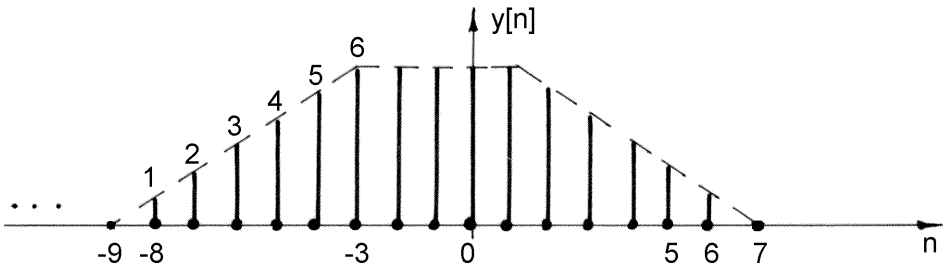


Fig.2.4. Graficul convoluției.

Problema 3.

Fiind date semnalele periodice de perioadã T, $\tilde{x}_1(t)$ *şi* $\tilde{x}_2(t)$*, se numeşte convoluţia lor periodicã (circularã) şi se notează* $\tilde{x}_1(t) \otimes \tilde{x}_2(t)$ *semnalul:*

$$\tilde{y}(t) = \int_T \tilde{x}_1(\tau) \cdot \tilde{x}_2(t-\tau) d\tau$$

a). Calculând

$$\int_a^{a+T} \tilde{x}_1(\tau) \cdot \tilde{x}_2(t-\tau) d\tau$$

şi

$$\int_b^{b+T} \tilde{x}_1(\tau) \cdot \tilde{x}_2(t-\tau) d\tau$$

demonstraţi cã $\tilde{y}(t)$ *are aceeaşi expresie indiferent de intervalul de lungime T pe care se calculează integrala.*

b). Ce puteţi afirma despre periodicitatea semnalului $\tilde{y}(t)$*?*

c). Dacã semnalele $\tilde{x}_1(t)$ *şi* $\tilde{x}_2(t)$ *au expresiile :*

$$\tilde{x}_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\tilde{x}_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

demonstraţi cã $\tilde{y}(t)$ *se poate pune sub forma:*

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Care este relaţia dintre c_k, a_k *şi* b_k *?*

Rezolvare:

a). Se face notația:

$$A(t,u)=\int_{u}^{u+T}\tilde{x}_1(\tau)\cdot\tilde{x}_2(t-\tau)d\tau$$

Produsul $\tilde{x}_1(t)\cdot\tilde{x}_2(t)$ *este o funcție periodică de perioadă T după variabila* τ. *Deci, A (t,u) este integrala unei funcții periodice de perioadă T pe un interval de lungime T. Această integrală are aceeaşi valoare indiferent de punctul de început al intervalului. Deci A (t,a) = A (t,b), adică* $\tilde{y}(t)$ *are aceeaşi expresie indiferent de intervalul de integrare de lungime T.*

b). Pentru a se analiza periodicitatea lui $\tilde{y}(t)$ *se scrie relația:*

$$\tilde{y}(t+T)=\int_{T}\tilde{x}_1(\tau)\cdot\tilde{x}_2(t+T-\tau)d\tau=\int_{T}\tilde{x}_1(\tau)\cdot\tilde{x}_2(t-\tau)d\tau=\tilde{y}(t)$$

În concluzie, $\tilde{y}(t)$ *este periodic de perioadă T.*

c). Funcția $\tilde{y}(t)$ *este convoluția periodică (circulară) a lui* $\tilde{x}_1(t)$ *şi* $\tilde{x}_2(t)$*:*

$$\tilde{y}(t)=\tilde{x}_1(t)\otimes\tilde{x}_2(t)$$

$$\tilde{y}(t)=\int_{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}\tau}\cdot\sum_{l=-\infty}^{\infty}b_l\cdot e^{jl\frac{2\pi}{T}(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\sum_{l=-\infty}^{\infty}b_l\left(\int_{T}e^{j(k-l)\frac{2\pi}{T}\tau}d\tau\right)e^{jl\frac{2\pi}{T}t}$$

Dar:

$$\int_{T}e^{j(k-l)\frac{2\pi}{T}\tau}d\tau=\begin{cases}T\ ,\ k=l\\0\ ,\ in\ rest\end{cases}$$

şi deci:

$$\tilde{y}(t)=T\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\cdot b_k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

unde s-a făcut notația $c_k=Ta_k\cdot b_k$

Problema 4.

Se consideră sistemul cu răspunsul la impuls:

$$h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]\cdot\delta(t-nT)$$

a). Demonstrați că dacă la intrarea acestui sistem se aduce semnalul x(t):

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot\delta(t-nT)$$

atunci la ieşirea sa se obţine semnalul y(t):

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \delta(t - nT)$$

Care este legãtura dintre secvenţele: x[n], h[n] şi y[n] ?

b). În continuare se considerã cã secvenţa h[n] este de duratã limitatã:
h[n] = 0 pentru n < 0 şi n ≥ N. Desenaţi o formã de implementare a sistemului considerat folosind amplificatoare, sumatoare şi linii de întârziere, care realizează o întârziere cu T. Un astfel de sistem se numeşte filtru transversal.

c). Care este legãtura dintre semnalele de la intrarea şi ieşirea filtrului transversal de la punctul b)., dacã toate valorile nenule ale secvenţei h[n] sunt egale cu 1/N ? Cum aţi denumi un astfel de sistem?

d). Reprezentaţi grafic rãspunsul sistemului de la punctul c)., pentru N = 3 la semnalul: $x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T)$

Rezolvare:

a).

$$y(t) = x(t) * h(t) = \sum_{n} x[n] \cdot h(t - nT) = \sum_{n} x[n] \sum_{m} h[m] \cdot \delta\left(t - mT - nT\right) \overset{m+n=p}{=}$$

$$= \sum_{n} x[n] \sum_{p} h[p - n] \cdot \delta(t - pT) = \sum_{p} \left(\sum_{n} x[n] \cdot h[p - n] \right) \cdot \delta\left(t - pT\right)$$

Dacã se face notaţia:

$$y[p] = \sum_{n} x[n] \cdot h[p - n]$$

rezultã:

$$y(t) = \sum_{p} y[p] \cdot \delta\left(t - pT\right)$$

Relaţia de legãturã dintre secvenţele x[n], h[n] şi y[n] este urmãtoarea:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

b).

$$h(t) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] \cdot \delta(t - nT)$$

Implementarea sistemului considerat folosind amplificatoare, sumatoare şi linii de

întârziere cu T este prezentatã în figura 4.1.

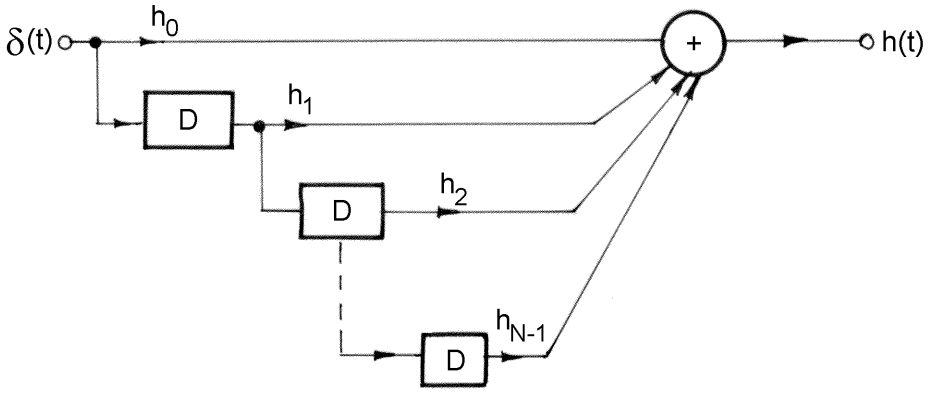


Fig.4.1. O formă de implementare a mediatorului.

c). Relaţia de legãturã dintre semnalele de la ieşirea şi intrarea filtrului transversal de la punctul b)., este de forma:

$$y(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(t - nT)$$

Un astfel de sistem s-ar putea numi "mediator".
d).

$$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T)$$

Rãspunsul sistemului de la punctul c). la semnalul x(t), definit cu relaţia de mai sus, şi pentru N = 3, este urmãtorul:

$$y(t) = \frac{1}{3}\left[x(t) + x(t - T) + x(t - 2T)\right]$$

Reprezentarea graficã a lui y(t) este cea din figura 4.2.

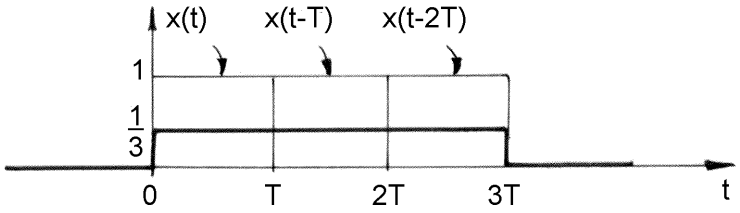


Fig.4.2. Răspunsul sistemului de la punctul c) la semnalul considerat.

Problema 5.

Se considerã sistemul care la fiecare moment de timp "n" rãspunde la semnalul de intrare x[n] cu semnalul y[n], care este media aritmeticã a ultimelor M – 1 eşantioane ale secvenţei de intrare.

a). Specificaţi ecuaţia cu diferenţe finite care caracterizează sistemul descris. Cum aţi numi acest sistem?
b). Este el liniar? Dar cauzal? Dar invariant în timp?
c). Desenaţi forma canonicã I de implementare a sistemului considerat.
d). Desenaţi forma canonicã II de implementare a sistemului considerat.
e). Desenaţi o formã de implementare a sistemului folosind un singur sumator cu mai multe intrãri.

Rezolvare.

a). Ecuaţia cu diferenţe finite care caracterizează sistemul descris este urmãtoarea:

$$y[n] = \frac{1}{M-1} \sum_{k=0}^{M-2} x[n-k]$$

b). Sistemul este liniar, cauzal şi invariant în timp.
c). ,d). Formele canonice I şi II sunt identice. Structura corespunzãtoare lor este prezentatã în figura 5.1.

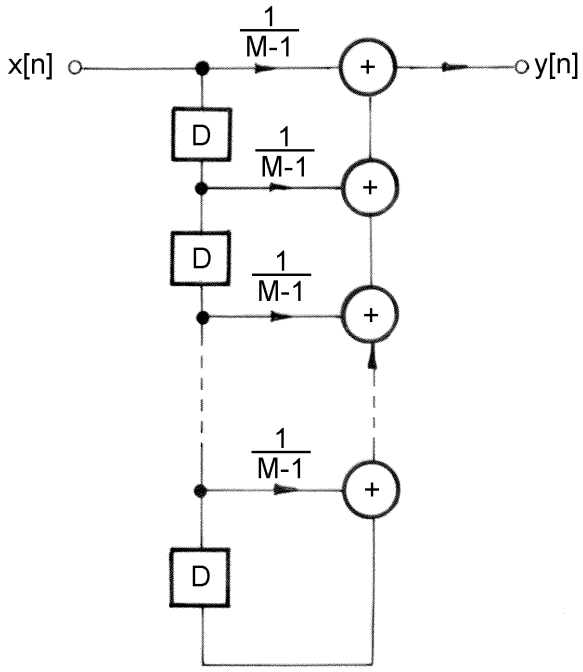


Fig.5.1. Implementarea sistemului considerat în formă canonică.

e). O formã posibilã de implementare a sistemului folosind un singur sumator cu mai multe intrãri este cea din figura 5.2.

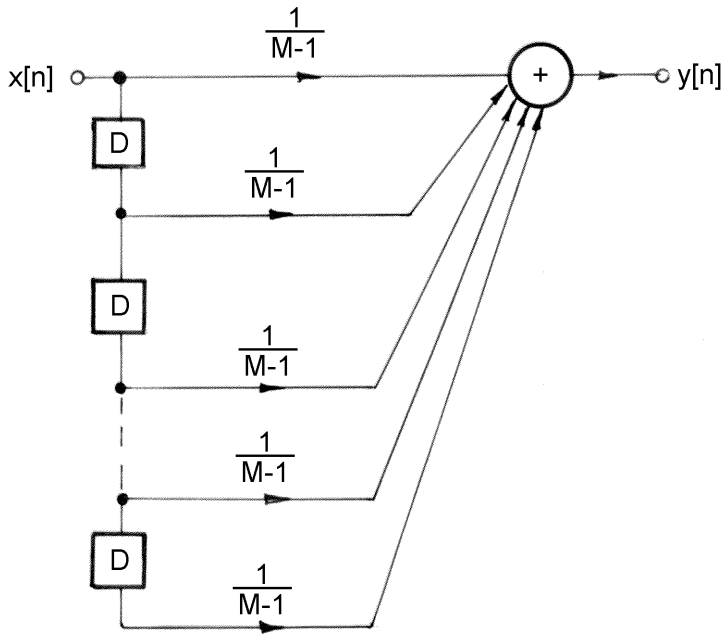


Fig. 5.2. O implementare folosind un singur sumator.

3 SERII FOURIER. ANALIZA SPECTRALĂ A SEMNALELOR PERIODICE 123
3.1 Răspunsul sistemelor continue liniare şi invariante în timp la exponenţiala complexă de modul unitar 124
3.2 Transformări ortogonale 125
3.2.1 Spaţiul Hilbert 127
3.2.2 Aproximarea optimală în spaţiul Hilbert 131
3.2.3 Reprezentarea semnalelor periodice 138
3.3 Serii trigonometrice 139
3.3.1 Seria Fourier trigonometrică 139
3.3.2 Seria Fourier armonică 142
3.3.3 Seria Fourier exponentială 142
3.3.4 Diagramele spectrale ale semnalelor periodice 144
3.3.5 Fenomenul Gibbs 150
3.4 Proprietăţile seriei Fourier exponenţiale 157
3.5 Serii polinomiale 162
3.6 Serii cu funcţii constante pe subintervale 165
Tabelul 3.1 Proprietăţile seriei Fourier exponenţiale 170

3 SERII FOURIER. ANALIZA SPECTRALĂ A SEMNALELOR PERIODICE

În capitolul 2 am arătat - vezi relaţia (2.3) - că un semnal discret poate fi reprezentat ca o sumă ponderată de impulsuri discrete de amplitudine unitară şi deplasate în timp. Pentru semnalele în timp continuu reprezentarea obţinută a fost cea a unei sume ponderate de impulsuri de arie unitară deplasate în timp - relaţia (2.39)- care prin trecere la limită a furnizat reprezentarea integrală (2.51). Integrala ce reprezintă semnalul este o sumă de integrale ale unor impulsuri unitare, distribuţii Dirac, deplasate în timp şi ponderate. Aceste modalităţi de reprezentare a semnalelor constituie în fond "descompu-neri" după trenuri de impulsuri, descompuneri ce permit determinarea unor relaţii de calcul pentru semnalele de la ieşirea sistemelor. S-au introdus astfel suma şi integrala de convoluţie. Se pune întrebarea dacă semnalele nu pot fi descompuse şi în alte feluri, obţinând eventuale facilităţi în ceea ce priveşte aproximarea lor sau calculul răspunsului sistemelor? Astfel de descompuneri există şi una dintre ele este cea care utilizează ca funcţii de bază funcţiile trigonometrice, sau, ceea ce este echivalent, exponenţiala cu coeficient imaginar. Nu este singura posibilitate de descompunere dar este cea mai utilizată la ora actuală şi pare a avea şi cea mai mare vechime. Există informaţii că vechii babilonieni utilizau ceva în genul sumelor trigonometrice pentru a prezice evenimente astronomice periodice! Dar istoria mai recentă a acestei abordări începe cu Leonard Euler care în 1748 studia vibraţia coardelor. El a remarcat existenţa unor moduri "normale" de vibraţie. Elongaţia verticală a coardei la un moment de timp dat t, este o funcţie de distanţa l de la un punct origine, de fixare a coardei, $f_t(l)$. Funcţiile $f_t(l)$ s-au dovedit a fi fragmente de sinusoidă având "frecvenţele" în relaţie armonică. Ceea ce a remarcat însă în mod deosebit Euler este faptul că dacă elongaţia la un moment de timp, într-un punct dat, este o combinaţie liniară a valorilor cauzate de modurile "normale" atunci această combinaţie se păstrează în timp şi spaţiu. Mai mult încă, el a reuşit să calculeze coeficienţii modurilor într-o manieră asemănătoare cu cea care se utilizează încă şi astăzi. În 1753 Daniel Bernoulli a stabilit din considerente fizice că orice mişcare a unei coarde poate fi reprezentată ca o combinaţie liniară a modurilor normale. Dar aceste căi au fost abandonate, mai ales că în 1759 o autoritate ştiinţifică de talia lui Lagrange a supus unei critici extrem de aspre utilizarea seriilor trigonometrice în studiul mişcării coardei. Convingerea sa era aceea că nu puteau fi reprezentate prin serii trigonometrice formele ce prezintă discontinuităţi, cum ar fi de exemplu "ciupirea" unei coarde. Lagrange considera seriile trigonometrice ca un instrument matematic de utilitate redusă. Studiind propagarea căldurii, prefectul de Grenoble, Jean Baptiste Fourier, a ajuns la anumite concluzii care au fost prezentate în 1807 la "Institut de France". Fourier a constatat că seriile de

sinusoide aflate în relaţie armonică sunt utile pentru prezentarea distribuţiei căldurii într-un corp. În plus el a afirmat că "orice" funcţie periodică poate fi reprezentată prin "seriile lui Fourier". Examinarea lucrării sale a fost încredinţată unei comisii formate din patru eminenţi oameni de ştiinţă. Trei dintre ei şi anume : Lacroix, Monge şi Laplace s-au pronunţat pentru publicarea lucrării. Al patrulea însă Lagrange a rămas de neclintit, ca şi în urmă cu 50 de ani! Ca urmare a opoziţiei lui Lagrange, lucrarea lui Fourier nu a fost niciodată publicată. În urma mai multor tentative nereuşite de a-şi face acceptată lucrarea de către "Institut de France", Fourier o publică într-o carte în 1822. Numai spre sfârşitul vieţii Fourier şi-a văzut recunoscute meritele. Instrumentele de reprezentare a semnalelor prin serii trigonometrice s-au dovedit a fi extrem de utile, fiind folosite şi azi chiar şi în cazul semnalelor în timp discret.

3.1 Răspunsul sistemelor continue liniare şi invariante în timp la exponenţiala complexă de modul unitar

Vom considera un SLIT caracterizat de răspunsul la impuls h(t), la intrarea căruia se aplică semnalul exponenţială complexă având modulul unitar:

$$x(t) = e^{j\omega_o t} \quad \omega_o \in R \ , \ t \in R \ . \tag{3.1}$$

La ieşirea sistemului se obţine răspunsul y(t), calculabil prin integrala de convoluţie, (2.50):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_o(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_o \tau} d\tau \ .$$

Dacă se notează :

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = |H(\omega)| e^{j\Phi(\omega)} \ , \tag{3.2}$$

funcţie ce depinde numai de răspunsul la impuls al sistemului şi are ca variabilă independentă frecvenţa ω, expresia răspunsului devine:

$$y(t) = e^{j\omega_o t} H(\omega_o) = |H(\omega_o)| e^{j(\omega_o t + \Phi(\omega_o))} \ . \tag{3.3}$$

Se observă că semnalul de ieşire este de aceeaşi natură ca şi semnalul de intrare, tot o exponenţială complexă de modul constant şi de frecvenţă ω_o . Este

adevărat că modulul ei nu mai este 1 ci $|H(\omega_o)|$, iar faza la t = 0 nu mai este 0 ci $\Phi(\omega_o) = \mathrm{Arg}H(\omega_o)$ dar forma este aceeaşi. "Amprenta" pe care o pune sistemul pe semnalul de intrare este dată de $H(\omega_o)$.

Se spune că $e^{j\omega_o t}$ este o funcţie proprie a SLIT, constanta complexă $H(\omega_o)$ fiind valoarea proprie asociată respectivei funcţii proprii:

$$S\{e^{j\omega_o t}\} = H(\omega_o)e^{j\omega_o t} \quad . \tag{3.3'}$$

Având în vedere această constatare, devine interesantă posibilitatea de a exprima un semnal x(t) oarecare ca o combinaţie liniară de astfel de funcţii proprii. Fie semnalul de intrare în sistem:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{j\omega_k t} \quad . \tag{3.4}$$

Având în vedere că este vorba despre un sistem liniar şi invariant în timp rezultă că operatorul care îl modelează este liniar şi că semnalul de ieşire este:

$$y(t) = S\left\{ \sum_k a_k e^{j\omega_k t} \right\} = \sum_k a_k S\{e^{j\omega_k t}\} \quad ,$$

şi conform relaţiei (3.3) se obţine :

$$y(t) = \sum_k a_k H(\omega_k) e^{j\omega_k t} \quad . \tag{3.5}$$

Această relaţie evidenţiază faptul că dacă semnalul de intrare este o combinaţie liniară de exponenţiale complexe (nu neapărat aflate în relaţie armonică!), este suficientă cunoaşterea funcţiei $H(\omega)$ ce caracterizează sistemul pentru a calcula semnalul de ieşire. Forma sa este aceeaşi cu cea a semnalului de intrare, atât doar că în locul coeficienţilor a_k trebuie trecuţi coeficienţii $a_k H(\omega_k)$.

3.2 Transformări ortogonale

Deoarece se pune problema de a reprezenta semnale prin sume de exponenţiale complexe sau de alte semnale, se poate ridica în mod firesc problema calităţii reprezentării. Cât de "bine" aproximează o sumă de funcţii alese un semnal dat, este o întrebare la care se poate răspunde în mai multe feluri. În toate cazurile însă, este necesară introducerea unei "distanţe" între semnalul x(t) ce urmează a fi aproximat şi semnalul $x_n(t)$ ce serveşte la aproximare. În teoria semnalelor se utilizează distanţa definită pentru funcţiile

din L^p prin:

$$d[x(t), x_n(t)] = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} . \qquad \textbf{(3.6)}$$

De cele mai multe ori $x(t) \in L^1$ sau $x(t) \in L^2$ deci p = 1 sau 2 . Se spune că şirul de funcţii cu suport compact $x_n(t)$ din L^p converge la funcţia x(t) din L^p , atunci când n tinde la infinit oricare ar fi t din I, (suportul comun al tuturor acestor funcţii) dacă şirul numeric $d[x(t),x_n(t)]$ este convergent la 0. Distanţa unui semnal pînă la funcţia identic nulă este chiar norma acestui semnal în L^p. Din (3.6) cu $x_n(t)$ identic nul rezultă:

$$d[x(t),0] = \|x(t)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p 1 dt \right)^{\frac{1}{p}} . \qquad \textbf{(3.7)}$$

Atragem atenţia asupra faptului că ecuaţia :

$$\lim_{n->\infty} d[x(t), x_n(t)] = \left(\lim_{n->\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = 0 , \qquad \textbf{(3.8)}$$

aduce după sine egalitatea celor două semnale doar "aproape peste tot":

$$x(t) = \lim_{n->\infty} x_n(t) \quad a.p.t. \quad . \qquad \textbf{(3.9)}$$

Ele pot să difere într-o mulţime de puncte a căror măsură Lebesgue este nulă. Aceasta înseamnă că pot diferi într-o mulţime numărabilă de puncte (care poate fi şi infinită) dar nu pe un interval. În cazul semnalelor de energie finită adică din L^2, $x(t) - x_n(t)$ este diferenţa celor două semnale iar $d^2(x , x_n)$ energia semnalului diferenţă. În consecinţă, convergenţa în L^2, numită şi convergenţă in medie patratică, motiv pentru care se scrie:

$$\lim_{n->\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_n(t)|^2 dt = 0 \iff \operatorname*{l.i.m.}_{n->\infty} x_n(t) = x(t) . \qquad \textbf{(3.10)}$$

arată că energia semnalului diferenţă se anulează când n tinde la infinit. Aceasta nu înseamnă că cele două semnale nu pot diferi în anumite puncte a căror "bază" pe axa timpului este nulă şi deci aportul lor energetic este nul.

3.2.1 Spaţiul Hilbert

Având în vedere faptul că multe semnale cu care lucrăm sunt de energie finită, sau sunt periodice cu energia într-o perioadă finită, considerăm utilă reamintirea faptului că mulţimea L^2 are o structură de spaţiu Hilbert. Produsul scalar a oricăror doi vectori x şi y dintr-un spaţiu vectorial este o regulă de asociere a dubletului (x,y) la o valoare complexă <x,y> . Această regulă satisface următoarele condiţii:

$$
\begin{aligned}
&i)\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^* \\
&ii)\ \langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \\
&iii)\ \langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \ ;\ \langle x, \lambda y\rangle = \lambda^* \langle x, y\rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
&iv)\ \langle x, x\rangle > 0 \ ,\ \forall x \neq 0 \ \ si \ \ \langle x, x\rangle = 0 <=> x = 0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.11)}
$$

Se notează prin $\|x\|^2$ produsul < x , x > . Din i)-iv) rezultă:

$$
v)\ \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \sum_{l=1}^{m} \beta_l y_l \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \alpha_k \beta_l^* \langle x_k, y_l\rangle \qquad \textbf{(3.12)}
$$

Un spaţiu vectorial cu norma definită printr-un produs scalar se numeşte spaţiu Hilbert.

Exemple de produse scalare

1. Dacă vectorii x şi y sunt n dimensionali $x = (x_1,x_2,...,x_n)^T$, $y = (y_1,y_2,...,y_n)^T$ atunci produsul lor scalar are expresia:

$$
\langle x, y\rangle = x^T y^* = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^* \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k^* \ , \qquad \textbf{(3.13)}
$$

iar norma devine:

$$\| x \|^2 = \langle x , x \rangle = \sum_{k=1}^{n} | x_k |^2 \quad . \tag{3.14}$$

2. Dacă vectorii sunt funcţii din $L^2_{[a,b]}$, deci funcţii de pătrat integrabil pe un compact (intervalul [a,b]), produsul scalar se defineşte prin :

$$\langle x(t) , y(t) \rangle = \int_a^b x(t)\, y^*(t)\, dt \quad . \tag{3.15}$$

În consecinţă norma are expresia (deja binecunoscută) :

$$\| x(t) \|^2 = \int_a^b | x(t) |^2 \, dt \quad . \tag{3.16}$$

În legătură cu produsul scalar se introduce şi noţiunea de ortogonalitate. Se spune că doi vectori x şi y sunt ortogonali şi se notează $x \perp y$ dacă:

$$\langle x , y \rangle = 0 \quad a.p.t. \quad <=> \quad x \perp y \quad . \tag{3.17}$$

Un sistem $U = \{u_k\}_{k \in I}$ (unde I este o mulţime de indici) de vectori ortogonali doi câte doi, se numeşte complet în spaţiul Hilbert H dacă nu există nici un alt vector $x \in H$, care să fie ortogonal pe toţi vectorii din sistemul U. Prin urmare, condiţia ca U să fie un sistem complet se exprimă prin:

$$\langle u_n , x \rangle = 0 <=> x = 0 \quad , \quad daca: x \in H \quad si \quad x \notin U \quad . \tag{3.18}$$

Un sistem U complet în H, formează o bază în spaţiul Hilbert în sensul că pentru orice x din H există o dezvoltare de forma:

$$x = \sum_{i \in I} a_i u_i \quad , \tag{3.19}$$

şi ea este unică.

Dacă mulţimea de indici I (numărabilă) este finită, având n elemente, se spune că spaţiul Hilbert este finit-dimensional, de dimensiune n. Dacă mulţimea de indici are un număr infinit de elemente se spune că spaţiul Hilbert corespunzător este infinit dimensional.

Relaţia între distanţă şi produsul scalar. Teorema lui Pitagora.

Fie x şi y două elemente din H. Prin definiţie distanţa dintre x şi y este dată de relaţia:

$$d^2(x,y) = \|x-y\|^2 \quad , \tag{3.20}$$

compatibilă cu relaţia (3.6) pentru p = 2 . Avem:

$$d^2(x,y) = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \quad .$$

Dar conform condiţiilor (3.11) $\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle^*$ şi deci:

$$d^2(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \left(\langle x,y\rangle + \langle x,y\rangle^*\right)$$

sau:

$$d^2(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle\} \quad . \tag{3.21}$$

Dacă x şi y sunt vectori ortogonali, <x , y> = 0 , obţinem:

$$d^2(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad , \tag{3.22}$$

relaţie cunoscută sub numele de teorema lui Pitagora în spaţiul Hilbert.

Inegalitatea lui Schwartz în spaţiul Hilbert

Vom determina distanţa între vectorii x şi ky din H:

$$d^2(x,ky) = \langle x-ky, x-ky\rangle = \|x\|^2 + |k|\,\|y\|^2 - \left(k^*\langle x,y\rangle + k\langle x,y\rangle^*\right) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{C}. \tag{3.23}$$

Se poate pune problema determinării valorii constantei complexe k care minimizează distanţa între cei doi vectori. Notăm k = $a\cdot e^{j\phi}$ şi avem :

$$d^2 = \|x\|^2 + a^2\|y\|^2 - a\left(e^{-j\phi}\langle x,y\rangle + e^{j\phi}\langle x,y\rangle^*\right) \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} d^2 = 2a\|y\|^2 - \left(e^{-j\phi}\langle x,y\rangle + e^{j\phi}\langle x,y\rangle^*\right) = 0 \quad ,$$

relaţie ce determină modulul lui k şi anume:

$$a = \frac{e^{-j\phi}\langle x, y\rangle + e^{j\phi}\langle x, y\rangle^*}{2\|y\|^2} \quad . \tag{3.25}$$

Se substituie a în relaţia (3.24) rezultând :

$$d_{\min}^2 = \|x\|^2 - \frac{1}{4\|y\|^2}\left(e^{-j\phi}\langle x, y\rangle + e^{j\phi}\langle x, y\rangle^*\right)^2 \quad .$$

Cu notaţia <x , y> = b·e$^{j\psi}$ pătratul distanţei minime devine:

$$d_{\min}^2 = \|x\|^2 - \frac{b^2}{4\|y\|^2}\left(e^{-j\phi}e^{j\psi} + e^{j\phi}e^{-j\psi}\right)^2 \quad .$$

şi deci:

$$\frac{\partial}{\partial\phi} d_{\min}^2 = -\frac{b^2}{2\|y\|^2}\left(e^{-j\phi}e^{j\psi} + e^{j\phi}e^{-j\psi}\right)\left(-je^{-j\phi}e^{j\psi} + je^{j\phi}e^{-j\psi}\right) =$$
$$= -\frac{b^2}{2\|y\|^2} j\left(e^{2j(\phi-\psi)} - e^{-2j(\phi-\psi)}\right) = 0 \quad ,$$

din care rezultă $\phi = \psi$. Se substituie în (3.25) şi se obţine:

$$a = \frac{e^{-j\psi}be^{j\psi} + e^{j\psi}be^{-j\psi}}{2\|y\|^2} = \frac{b}{\|y\|^2} = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|^2} \quad .$$

Rezultă, în, final că valoarea lui k ce minimizează distanţa dintre x şi ky este:

$$k = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} \quad . \tag{3.26}$$

Substituind această valoare în (3.23) rezultă :

$$\left[d^2(x, ky)\right]_{\min} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0 \quad . \tag{3.27}$$

sau:

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \textbf{(3.28)}$$

care reprezintă inegalitatea lui Schwartz. Normele sunt calculate în L^2 [a,b] .

3.2.2 Aproximarea optimală în spaţiul Hilbert

Spaţiul Hilbert este un spaţiu complet. Orice vector x are o reprezentare unică ca o combinaţie liniară (3.19) a elementelor bazei ortogonale U. Fie pentru început cazul spaţiului n-dimensional (finit dimensional), cu U = $\{u_1,u_2,...u_n\}$. Coeficienţii a_k din dezvoltarea :

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \quad , \qquad \textbf{(3.29)}$$

se determină prin calculul produsului scalar dintre x şi u_k , ţinând seama de ortogonalitatea vectorilor bazei:

$$\langle u_k, u_i\rangle = \begin{cases} \|u_i\|^2 \ , & k = i \\ 0 \ , & k \neq i \ . \end{cases} \qquad \textbf{(3.30)}$$

Avem: $\langle x, u_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k \langle u_k, u_i\rangle = a_i \|u_i\|^2$ sau, revenind de la i la k:

$$a_k = \frac{\langle x, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} \quad , \quad k \in \{1,2,...,n\} \quad , \quad \forall\, x \in H \quad . \qquad \textbf{(3.31)}$$

Dacă baza u este ortonormală atunci vectorii care o compun au cu toţii norma unitară, $\|u_k\| = 1$, şi expresia coeficienţilor devine:

$$a_k = \langle x, u_k\rangle \quad , \quad k \in \{1,2,...,n\} \quad , \quad \forall\, x \in H \quad . \qquad \textbf{(3.31')}$$

Uneori, din considerente practice, suntem constrânşi să nu utilizăm pentru reprezentarea unui vector x din H toţi cei n vectori ai bazei,ci numai o parte a lor $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$, m < n. Se pune întrebarea : Cum anume trebuie să alegem coeficienţii λ_k pentru ca $\tilde{x}$ calculat cu relaţia:

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k \qquad \textbf{(3.32)}$$

să fie "cea mai bună aproximare" a vectorului x, n dimensional? Dar eroarea poate fi considerată chiar distanţa între vectorii x şi $\tilde{x}$. Se notează e = x-$\tilde{x}$. Atunci: $d^2(x,\tilde{x}) = \|x-\tilde{x}\| = \|e\|^2$. Se calculează :

$$d^2(x,\tilde{x}) = \|e\|^2 = \left\langle x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k \, , \, x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \right\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle u_k, x\rangle - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \langle x, u_k\rangle + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \lambda_k \lambda_i^* \langle u_k, u_i\rangle \quad ,$$

şi, de aici:

$$\epsilon = \|e\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} \left(\lambda_k \langle x, u_k\rangle^* + \lambda_k \langle x, u_k\rangle \right) + \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^2 \|u_k\|^2 \quad , \qquad \textbf{(3.33)}$$

în care s-a ţinut cont de (3.30). Dar problema minimizării erorii ε se reduce la anularea tuturor derivatelor sale parţiale în raport cu coeficienţii λ_k. Problema a fost rezolvată în fond în §3.2.1, iar rezultatul obţinut acolo este cel din relaţia (3.26). Procedând, pentru λ_k , în acelaşi mod în care s-a dedus (3.26) se obţin:

$$\lambda_k = \frac{\langle x, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} = a_k \quad , \quad k \in \{1,2,...,m\} \quad , \quad m < n \quad . \qquad \textbf{(3.34)}$$

Substituind aceste valori ale coeficienţilor în (3.23) se obţine eroarea ε_{min}:

$$\epsilon_{min} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle x, u_k\rangle|^2}{\|u_k\|^2} \quad ; \quad \epsilon_{min} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |a_k|^2 \|u_k\|^2 \quad . \qquad \textbf{(3.35)}$$

Analizând relaţia (3.34) rezultă că cea mai bună aproximare $\tilde{x}$, a vectorului x n dimensional în subspaţiul m dimensional este dată de proiecţia vectorului x pe respectivul subspaţiu. Altfel spus, expresia (3.32) ce dă cea mai bună aproximare a lui x se obţine reţinând primii m termeni din relaţia (3.29), fără a modifica valorile coeficienţilor a_k. Eroarea ε se mai numeşte şi eroare medie pătratică. Calculul prezentat este valabil pe spaţiul Hilbert $L^2[a,b]$. În legătură cu cu cea mai bună aproximare a unui vector într-un spaţiu Hilbert se dă

următoarea teoremă :

Teorema proiecţiei

Fie H un spaţiu Hilbert şi H_s un subspaţiu Hilbert închis al acestuia. Oricare ar fi vectorul x din H există un vector $\tilde{x}$ din H_s care reprezintă cea mai bună aproximare a lui x cu elemente din H_s care are proprietăţile:

- distanţa de la x la $\tilde{x}$ este mai mică decât distanţa de la x la oricare alt element din H_s ;

- eroarea comisă e = x - $\tilde{x}$ este ortogonală pe subspaţiul H_s.

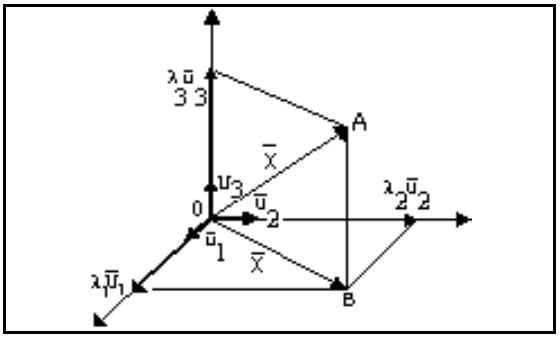


Fig.3.1 Cea mai bună aproximare a unui vector tridimensional cu unul bidimensional.

Pentru a înţelege mai bine semnificaţia acestei teoreme se prezintă în figura 3.1. un vector x tridimensional. Cea mai bună aproximare a sa printr-un vector bidimensional, din subspaţiul generat de vectorii $\{u_1 = \bar{i}\ ,\ u_2 = \bar{j}\}$ este cea pentru care diferenţa celor doi vectori are lungimea $|AB|$ minimă. Dar această situaţie se obţine numai atunci când AB este perpendicular pe planul $\{\bar{i}\ ,\ \bar{j}\}$ în care se face aproximarea. Se poate deci modifica, în acest sens, enunţul teoremei. Pentru demonstraţie, fie $\tilde{x}$ vectorul ce satisface teorema proiecţiei, dând eroarea pătratică, ε, minimă. Pentru el:

$$\langle e, u_k\rangle = \langle x-\tilde{x}, u_k\rangle = \langle x, u_k\rangle - \langle \tilde{x}, u_k\rangle = a_k\|u_k\|^2 - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\langle u_k, u_i\rangle = a_k\|u_k\|^2 - \lambda_k\|u_k\|^2 \quad .$$

Dar s-a arătat că $\lambda_k = a_k$, $k \in \{1, 2, ..., m\}$ - relaţia (3.34) astfel că se obţine:

$$\langle\ e\ ,\ u_k\ \rangle = 0 \quad , \quad k \in \{1,2,...,m\} \quad , \qquad \textbf{(3.36)}$$

ceea ce înseamnă că dacă eroarea este minimă, atunci ea este ortogonală pe toţi vectorii bazei subspaţiului, deci este ortogonală pe subspaţiu. Să arătăm că nici o altă combinaţie liniară nu are această proprietate. Fie:

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^{m}\mu_k u_k \quad . \qquad \textbf{(3.37)}$$

Ca proprietate a distanţei avem :

$$d(x-a, y-a) = \|(x-a)-(y-a)\| = \|x-y\| = d(x,y) \quad . \qquad \textbf{(3.38)}$$

Aplicăm (3.38) şi obţinem, ţinând seama şi de (3.21):

$$d^2(x,\hat{x}) = d^2(x-\tilde{x},\hat{x}-\tilde{x}) = \|x-\tilde{x}\|^2 + \|\hat{x}-\tilde{x}\|^2 - 2\mathrm{Re}\{\langle x-\tilde{x},\hat{x}-\tilde{x}\rangle\} \quad .$$

Dar:

$$\langle x-\tilde{x},\hat{x}-\tilde{x}\rangle = \langle x-\tilde{x},\sum_{k=1}^{m}(\mu_k-\lambda_k)u_k\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}(\mu_k-\lambda_k)^*\langle x-\tilde{x},u_k\rangle = \sum_{k=1}^{m}(\mu_k-\lambda_k)^*\langle e,u_k\rangle = 0 \quad ,$$

conform observaţiei (3.36). Rămâne deci:

$d^2(x,\hat{x}) = \|x-\tilde{x}\|^2 + \|\hat{x}-\tilde{x}\|^2 \geq \|x-\tilde{x}\|^2$, egalitate satisfăcută numai dacă $\hat{x} = \tilde{x}$. Teorema este complet demonstrată.

Eroarea medie pătratică a aproximării optime

Pentru cazul aproximării optime am stabilit relaţia (3.35). Deoarece în suma $\sum_{k=1}^{m}|a_k|^2\|u_k\|^2$ nu există decât termeni pozitivi, rezultă că eroarea aproximării optime scade pe măsură ce creşte m, dimensiunea subspaţiului în care se face aproximarea. Se ţine cont de:

$$\|\tilde{x}\|^2 = \langle\tilde{x},\tilde{x}\rangle = \sum_{k=1}^{m}|a_k|^2\|u_k\|^2 \;;\; \|x\|^2 = \langle x,x\rangle = \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\|u_k\|^2 \quad , \quad \textbf{(3.39)}$$

astfel că:

$$\epsilon_{\min} = \|e\|^2_{\min} = \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 \;;\; \epsilon_{\min} = \|e\|^2_{\min} = \sum_{k=1}^{m}|a_k|^2\|u_k\|^2 - \sum_{k=1}^{m}|a_k|^2\|u_k\|^2 \quad .$$

(3.40)

Eroarea de aproximare minimă nu spune prea mult despre calitatea aproximării decât că este în sensul definit, cea mai bună posibilă. Eroarea minimă relativă este un indicator de calitate mai bun decât valoarea ei absolută:

$$\frac{\|e\|_{min}^2}{\|x\|^2} = 1 - \frac{\|\tilde{x}\|^2}{\|x\|^2} \quad .$$

Cazul spaţiilor de dimensiune infinită

Mulţimea $L^2[a,b]$ are o structură de spaţiu Hilbert. Produsul scalar şi norma în acest spaţiu sunt definite în relaţiile (3.15) şi (3.16). Fie o mulţime $U = \{u_k(t)\}_{k \in Z}$ ortogonală şi completă în acest spaţiu. Orice semnal x(t) din $L^2[a,b]$ se poate exprima ca o combinaţie liniară de elemente ale mulţimii U, adică:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k u_k(t) \quad . \qquad \textbf{(3.41)}$$

Expresia coeficienţilor a_k , $k \in Z$ se poate determina pe baza următorului calcul:

$$\langle x(t), u_i(t) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \langle u_k(t), u_i(t) \rangle = a_i \|u_i(t)\|^2 \quad ,$$

adică:

$$a_k = \frac{\langle x(t), u_k(t) \rangle}{\|u_k(t)\|^2} \quad , \quad k \in Z \quad . \qquad \textbf{(3.42)}$$

Fie mulţimea $U_N = \{u_k(t) , k = -N , N\}$ completă şi ortogonală într-un spaţiu finit dimensional (de dimensiune 2N+1) $L_N^2[a,b]$, subspaţiu al lui $L^2[a,b]$. În continuare se determină semnalul $\tilde{x}_{2N+1}(t)$, cea mai bună aproximare cu elemente din $L_N^2[a,b]$, a lui x(t). Fie semnalul $x_{2N+1}(t)$ din $L_N^2[a,b]$. Descompunerea sa în baza U_N a acestui spaţiu este:

$$x_{2N+1}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k u_k(t) \quad . \qquad \textbf{(3.43)}$$

Coeficienţii λ_k se pot determina ca mai sus:

$$\lambda_k = \frac{\langle x_{2N+1}, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} \quad , \quad k = \overline{-N , N} \quad .$$

Eroarea de aproximare a semnalului x(t) prin semnalul $x_{2N+1}(t)$ este:

$$\epsilon = \| e \|^2_{L^2[a,b]} = \int_a^b | x(t) - \tilde{x}(t) |^2 dt \geq 0 \quad . \tag{3.44}$$

Dacă în membrul drept al ultimei relaţii ar exista în faţa integralei factorul 1/(b-a), atunci ar fi vorba despre o eroare medie pătratică. Deşi acest factor nu există, vom folosi şi pentru ε denumirea de eroare medie pătratică. Valoarea ei este:

$$\epsilon = \| x - x_{2N+1} \|^2 = \langle x - x_{2N+1}, x - x_{2N+1} \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle - \langle x, x_{2N+1} \rangle - \langle x_{2N+1}, x \rangle + \langle x_{2N+1}, x_{2N+1} \rangle \quad .$$

Dar:

$$\| x \|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k u_k \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \langle x, u_k \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* a_k \| u_k \|^2 = \tag{3.45}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} | a_k |^2 \| u_k \|^2 \ ;$$

$$\langle x, x_{2N+1} \rangle = \langle x, \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k u_k \rangle = \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k^* \langle x, u_k \rangle = \sum_{k=-N}^{n} \lambda_k^* a_k \| u_k \|^2 \ ; \tag{3.45'}$$

$$\langle x_{2N+1}, x \rangle = \langle x, x_{2N+1} \rangle^* = \Big(\sum_{k=-N}^{N} \lambda_k^* a_k \| u_k \|^2 \Big)^* = \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k a_k^* \| u_k \|^2 \ ; \tag{3.45"}$$

$$\| x_{2N+1} \|^2 = \langle x_{2N+1}, x_{2N+1} \rangle = \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k^* \langle x_{2N+1}, u_k \rangle = \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k^* \lambda_k \| u_k \|^2 = \tag{3.45'''}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} | \lambda_k |^2 \| u_k \|^2 ;$$

De aceea:

$$\| x - x_{2N+1} \|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} | a_k |^2 + \sum_{k=-N}^{N} \left(| \lambda_k |^2 - a_k \lambda_k^* - a_k^* \lambda_k \right) \| u_k \|^2 =$$
$$= \sum_{k=-N}^{N} \left(| a_k |^2 + | \lambda_k |^2 - a_k \lambda_k^* - a_k^* \lambda_k \right) \| u_k \|^2 + \sum_{|k|>N} | a_k |^2 \quad . \qquad \textbf{(3.46)}$$

În continuare se determină coeficienţii λ_k k = -N , N astfel încât ε să aibă o valoare minimă. Termenul $\sum_{|k|>N} | a_k |^2$ din expresia lui ε nu poate fi minimizat

prin alegerea coeficienţilor λ_k . Celălalt termen se mai poate scrie şi sub forma:

$$\sum_{k=-N}^{N} (a_k a_k^* + \lambda_k \lambda_k^* - a_k^* \lambda_k - a_k \lambda_k^*) \| u_k \|^2 = \sum_{k=-N}^{N} (a_k - \lambda_k) (a_k^* - \lambda_k^* - \lambda_k^*) \| u_k \|^2$$

Evident că acest termen se anulează dacă $\lambda_k = a_k$, k = -N, N . Deci cea mai bună aproximare de eroare medie pătratică a lui x(t) cu semnale din $L_N^2[a,b]$ e:

$$\tilde{x}_{2N+1}(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k u_k(t) \quad . \qquad \textbf{(3.46')}$$

Valoarea minimă a erorii medii pătratice de aproximare este:

$$\epsilon_{\min} = \|x\|^2 + \|\tilde{x}_{2N+1}\|^2 - 2 \sum_{k=-N}^{N} | \lambda_k |^2 \| u_k \|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=-N}^{N} | \lambda_k |^2 \| u_k \|^2. \qquad \textbf{(3.47)}$$

Având în vedere că orice normă este pozitivă, pe baza relaţiei (3.47) se obţine:

$$\| \tilde{x}_{2N+1} \|^2 = \sum_{k=-N}^{N} | a_k |^2 \| u_k \|^2 \leq \| x \|^2 \quad . \qquad \textbf{(3.48)}$$

Această relaţie se numeşte inegalitatea lui Bessel. Se observă că :

$$\lim_{N \to \infty} \| x - \tilde{x}_{2N+1} \|^2 = \lim_{N \to \infty} \sum_{|k|>N} | a_k |^2 = 0 \quad .$$

Se spune că şirul $\tilde{x}_{2N+1}(t)$ converge în medie pătratică la semnalul x(t):

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \tilde{x}_{2N+1}(t) = x(t) \quad . \qquad \textbf{(3.49)}$$

Trecând la limită pentru N tinzând la infinit în relaţia (3.48), se obţine chiar relaţia (3.45). Aceasta se numeşte relaţia lui Parseval. Numind reprezentarea semnalului x(t) pe baza elementelor mulţimii U, dezvoltare în serie Fourier, (3.41), şi coeficienţii a_k, coeficienţi Fourier, se poate afirma pe baza relaţiei lui Parseval că energia oricărui semnal se poate calcula prin însumarea pătrarelor modulelor coeficienţilor dezvoltării sale în serie Fourier. Trebuie menţionat că, referitor la spaţiul $L_N^2[a,b]$, relaţia (3.46') reprezintă dezvoltarea în serie Fourier a semnalului $x_{2N+1}(t)$ folosind mulţimea U_N, iar relaţia (3.48) (prima egalitate) reprezintă o egalitate de tip Parseval. Descompunerea semnalelor în serii Fourier de tipul (3.41) sau (3.43) este foarte răspândită în cazul aproximării semnalelor practice cu modele mai simple, datorită volumului de calcul redus, necesar pentru determinarea coeficienţilor a_k (λ_k).

3.2.3 Reprezentarea semnalelor periodice

Un semnal $x_T(t)$ de energie finită, $x_T(t) \in L^2[t_o , t_o+T_o)$, poate fi prelungit prin periodicitate dând naştere semnalului x(t), cu întindere pe întreaga axă reală, ca în figura 3.2. Semnalul x(t) are putere finită, egală cu puterea medie pe o perioadă. Se poate spune că x(t) are energia unei perioade, o mărime finită.

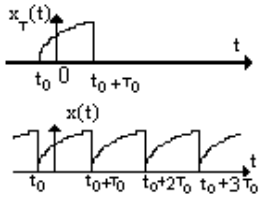


Fig. 3.2 Semnalul de energie finită $x_T(t)$, cu suportul de lungime T_o, dă naştere prin periodizare, semnalului x(t) de putere finită.

Fie familia de funcţii ortogonale, două câte două, în intervalul $[t_o , t_o+T_o]$ şi care sunt periodice, având aceeaşi perioadă T. Atunci ele sunt ortogonale două câte două în orice interval de lungime T_o al axei reale. O astfel de familie de funcţii, dacă formează o bază, este potrivită pentru reprezentarea funcţiilor (semnalelor) periodice, de aceeaşi perioadă T_o. Pentru cazul semnalelor periodice, eroarea de reprezentare poate fi raportată la perioadă, furnizând puterea medie a semnalului eroare:

$$\frac{\|e\|^2}{T_o} = \frac{1}{T_o}\int_{t_1}^{t_1+T_o} |x(t)|^2 dt - \frac{1}{T_o}\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|u_k(t)\|^2 \quad . \qquad \textbf{(3.50)}$$

Relaţia lui Parseval exprimă prin două forme echivalente puterea medie:

$$\frac{1}{T_o}\int_{t_1}^{t_1+T_o}|x(t)|^2dt = \frac{1}{T_o}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\|u_k(t)\|^2 \quad . \qquad \textbf{(3.51)}$$

Lipsa factorului $1/T_o$ nu invalidează relaţia lui Parseval.

3.3 Serii trigonometrice

3.3.1 Seria Fourier trigonometrică

Fie în $L^2[-T_o/2 , T_o/2]$ familia de funcţii $U = \{1 , \cos(k\omega_o t) , \sin(k\omega_o t)\}_{k\in N^*}$. Este uşor de verificat că această mulţime este ortogonală. Ea este şi completă (sau totală) formând o bază. În consecinţă, orice semnal $x_T(t)$, unde $T_o=2\pi/\omega_o$, $x_T(t)\in L^2[-T_o/2 , T_o/2]$ poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară a funcţiilor $u_k(t)\in U$. Deoarece toate funcţiile bazei au perioada T_o, ele pot reprezenta pe toată axa, prelungirea periodică a funcţiei $x_T(t)$, notată x(t). Normele funcţiilor care alcătuiesc baza sunt:

$$\|1\| = \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} 1^2dt = T_o$$

$$\|\cos(k\omega_o t)\|^2 = \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} \cos^2(k\omega_o t)dt = \frac{T_o}{2} \qquad \textbf{(3.52)}$$

$$\|\sin(k\omega_o t)\|^2 = \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} \sin^2(k\omega_o t)dt = \frac{T_o}{2}$$

Semnalul x(t), poate fi exprimat prin seria trigonometrică:

$$x(t) = a_0\cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\omega_o t) + b_k\sin(k\omega_o t)) \quad , \qquad \textbf{(3.53)}$$

coeficienţii fiind calculaţi cu :

$$a_0 = \frac{\langle x(t), 1 \rangle}{\|1\|^2} = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x(t)\,dt = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} x(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{\langle x(t), \cos(k\omega_o t) \rangle}{\|\cos(k\omega_o t)\|^2} = \frac{2}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x(t)\cos(k\omega_o t)\,dt = \frac{2}{T_o} \int_{T_o} x(t)\cos(k\omega_o t)\,dt$$

$$b_k = \frac{\langle x(t), \sin(k\omega_o t) \rangle}{\|\sin(k\omega_o t)\|^2} = \frac{2}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x(t)\sin(k\omega_o t)\,dt = \frac{2}{T_o} \int_{T_o} x(t)\sin(k\omega_o t)\,dt$$

(3.54)

Dirichlet a stabilit condiţiile de convergenţă ale seriei trigonometrice (3.53). Ele au mai multe enunţuri, dintre care vom prezenta două. Vom face întâi precizări privind terminologia utilizată:

- Funcţia x(t) : [$-T_o/2$, $T_o/2$] cu valori în $\mathbb{R}$ se numeşte continuă pe porţiuni în intervalul considerat dacă şi numai dacă este continuă în punctele acestui interval, cu excepţia cel mult a unui număr finit de puncte, în care are limitele laterale finite.
- Funcţia x(t) : [$-T_o/2$, $T_o/2$] cu valori în R se numeşte monotonă pe porţiuni în intervalul dat dacă şi numai dacă este continuă pe porţiuni şi intervalul poate fi descompus într-un număr finit de subintervale pe care x(t) este monotonă.

1. Dacă x(t) : $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$, periodică de perioadă T_o , este monotonă pe porţiuni în orice interval de lungime T_o , atunci seria trigonometrică asociată ei converge în orice punct t către media limitelor laterale ale funcţiei în punct, deci către valoarea $[x(t_+) + x(t_-)]/2$. Pe orice (sub)interval pe care x(t) este continuă, seria trigonometrică converge uniform.
2. Funcţia x(t) trebuie să aibă într-o perioadă T_o un număr finit de maxime şi minime, precum şi un număr finit de discontinuităţi de speţa întâia.

Semnalul (funcţia) x(t) din figura 3.2 îndeplineşte condiţiile lui Dirichlet, având într-o perioadă un singur punct de discontinuitate de speţa întîi şi un singur minim. În figura 3.3 se dau exemple de semnale ce nu îndeplinesc condiţiile lui Dirichlet şi în consecinţă nu pot fi dezvoltate în serie trigonometrică.

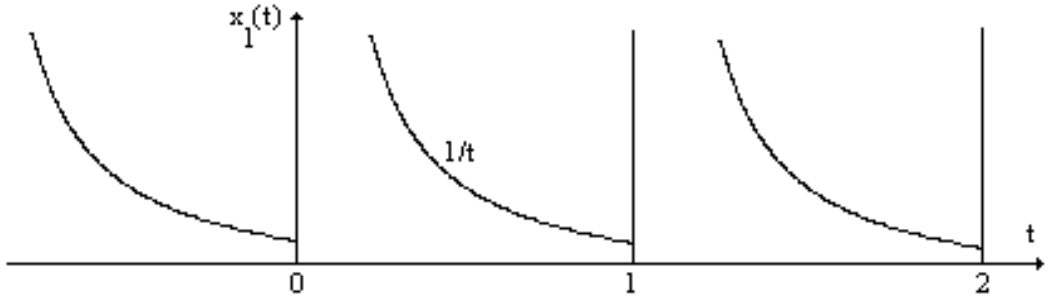


Fig.3.3a Semnalul $x_1(t) = 1/t$, $0 < t \leq 1$ are câte un punct de discontinuitate de speţa a doua în fiecare perioadă.

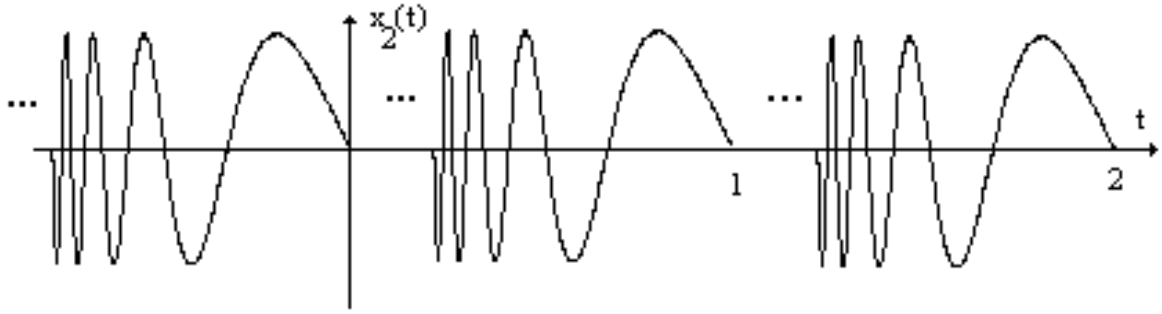


Fig. 3.3b Semnalul $x_2(t) = \sin(2\pi/t)$, $0 < t \leq 1$ are un număr infinit de maxime şi minime într-o singură perioadă.

Seria trigonometrică are anumite particularităţi în funcţie de anumite proprietăţi ale semnalului x(t). Se are în vedere că a_0 este componenta continuă a semnalului. Semnalul $x_1(t) = x(t)-a_0$ nu mai are componentă continuă. Pentru el este valabilă dezvoltarea :

$$x_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_o t + b_k \sin k\omega_o t) \quad . \tag{3.55}$$

Dacă $x_1(t)$ este par atunci toţi coeficienţii b_k sunt nuli:

$$x_1(-t) = x_1(t) <=> x_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_o t \quad . \tag{3.56}$$

Dacă $x_1(t)$ este însă impar, toţi coeficienţii a_k sunt nuli şi:

$$x_1(-t) = -x_1(t) <=> x_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_o t \quad . \tag{3.57}$$

3.3.2 Seria Fourier armonică

Atunci când se urmăreşte realizarea analizei semnalului în domeniul frecvenţă suntem interesaţi de amplitudinea şi faza unei componente de o anumită frecvenţă şi nicidecum de descompunerea ei în cele două părţi, pară şi impară. Se poate face transformarea:

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega_o t = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\cos(k\omega_o t + \varphi_k) \quad ; \quad \operatorname{tg}\varphi_k = -\frac{b_k}{a_k} \quad .$$

Amplitudinea componentei de frecvenţă $k\omega_o$ este $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ iar faza ei iniţială φ_k . Seria trigonometrică (3.53) se scrie sub forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_o t + \varphi_k) \quad , \qquad \textbf{(3.58)}$$

în care:

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \;\; , \;\; \varphi_k = -\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k} \;\; , \;\; k \geq 1 \\ A_0 &= a_0 \qquad\quad , \;\; \varphi_0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.59)}$$

Relaţia (3.58) reprezintă aşa numita serie Fourier armonică. Termenul corespunzător lui k = 0 reprezintă componenta continuă, termenul corespunzător lui k = 1 de frecvenţă $\omega_o = 2\pi/T_o$ reprezintă componenta fundamentală, iar ceilalţi termeni armonicele. Armonica k are frecvenţa $k\omega_o$, un multiplu întreg al frecvenţei fundamentalei.

3.3.3 Seria Fourier exponentială

Dacă în seria trigonometrică (3.53) se fac substituţiile date de formulele lui Euler :

$$\cos k\omega_o t = \frac{e^{jk\omega_o t} + e^{-jk\omega_o t}}{2} \quad ; \quad \sin k\omega_o t = \frac{e^{jk\omega_o t} - e^{-jk\omega_o t}}{2j} \quad ,$$

se obţine:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_o t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_o t} \quad . \qquad \textbf{(3.60)}$$

Se fac notaţiile:

$$\left.\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T_o}\int_{T_o} x(t)\left(\cos k\omega_o t - j\sin k\omega_o t\right)dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_o} x(t)\,e^{-jk\omega_o t}\,dt \\ c_{-k} &= \frac{a_k + jb_k}{2} = \frac{1}{T_o}\int_{T_o} x(t)\left(\cos k\omega_o t + j\sin k\omega_o t\right)dt = \frac{1}{T_o}\int_{T_o} x(t)\,e^{jk\omega_o t}\,dt \end{aligned}\right\},$$

(3.61)

în care s-a ţinut seama de relaţiile (3.54). În cazul în care semnalul x(t) este real atunci $c_{-k} = c_k^*$ şi relaţia (3.60) devine:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-jk\omega_o t} = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\omega_o t} \quad ,$$

şi în final :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_o t} \quad ; \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T_o} \quad , \qquad \textbf{(3.62)}$$

relaţie ce poartă denumirea de serie Fourier exponenţială. Este vorba de descompunerea elementelor spaţiului L^2 [0,T] (restricţiile semnalelor periodice considerate la perioada lor principală) în baza acestuia $V = \left\{e^{jk\omega_o t}\right\}_{k\in Z}$. Coeficienţii dezvoltării sunt:

$$c_k = \frac{1}{T_o}\int_{T_o} x(t)\,e^{-jk\omega_o t}\,dt \quad , \qquad \textbf{(3.63)}$$

şi rezultă din (3.61) pentru k nenul şi direct din (3.54) pentru k nul. Coeficienţii se puteau deduce şi direct:

$$\|e^{jk\omega_o t}\|^2 = \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} |e^{jk\omega_o t}|^2 dt = \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} dt = T_o \; ; \; c_k = \frac{\langle x(t), e^{jk\omega_o t}\rangle}{\|e^{jk\omega_o t}\|^2} = \frac{1}{T_o}\int_{T_o} x(t)\,e^{-jk\omega_o t}\,dt$$

Sunt imediate relaţiile:

$$\left.\begin{array}{lll} |c_k| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2+b_k^2} \;,\; k \geq 1 \;;\; |c_k| = |c_{-k}| \;,\; k \leq -1 \\ \arg c_k = \varphi_k \;,\; k \geq 1 \;;\; \arg c_{-k} = -\varphi_k \;,\; k \leq -1 \\ |c_0| = |a_0| \;;\; \arg c_0 = 0 \end{array}\right| \quad \textbf{(3.64)}$$

3.3.4 Diagramele spectrale ale semnalelor periodice

Pentru a reprezenta semnalul x(t) în planul spectral sau planul coeficienţi-frecvenţă este necesară efectuarea a două reprezentări. Una dintre ele reprezintă modulul coeficienţilor în funcţie de frecvenţă, constituind aşa numitul spectru de amplitudini. Acesta reprezintă dependenţa lui A_k în funcţie de ω ($k\omega_o$) pentru seria Fourier armonică sau dependenţa lui $|c_k|$ în funcţie de ω ($k\omega_o$) pentru seria Fourier exponenţială.

Celălalt grafic reprezintă faza sinusoidelor, φ_k, în funcţie de ω pentru seria Fourier exponenţială sau argumentul coeficienţilor c_k în funcţie de ω pentru seria Fourier armonică. Ea poartă denumirea de spectru de faze.

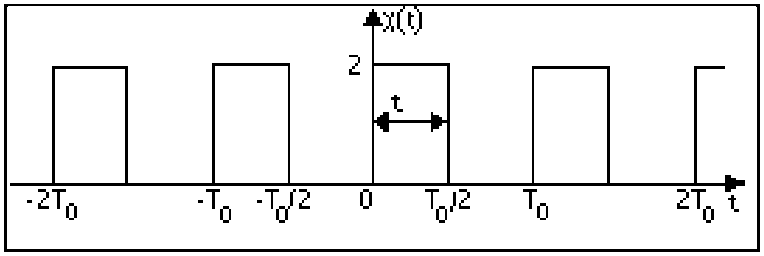


Fig. 3.4 Semnal periodic, rectangular, cu factorul de umplere 0,5.

În afara acestor două diagrame (reprezentări) spectrale, se mai utilizează diagrama de repartizare a puterii în diferitele componente spectrale. Se obţine astfel spectrul de putere. În el se reprezintă $A_k^2/2$ funcţie de ω sau $|c_k|^2$ funcţie de ω. Pentru precizarea ideilor vom recurge la un exemplu. Fie semnalul rectangular din figura 3.4. Este vorba de un semnal periodic având perioada T_o şi expresia restricţiei la perioada principală:

$$x(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t < t_1 \\ 0 & t_1 \leq t < T_o \end{cases} \;;\; t_1 = \frac{T_o}{2} \;. \qquad \textbf{(3.65)}$$

Se numeşte factor de umplere al unui astfel de semnal, raportul t_1/T_o. În exemplul ales, factorul de umplere este 0,5 .

Vom determina coeficienţii seriei Fourier armonice precum şi fazele componentelor. Se observă că semnalul are componentă continuă:

$$a_0 = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} x(t)\,dt = \frac{1}{T_o}\int_0^{\frac{T_o}{2}} 2\,dt = 1 \quad ; \quad A_0 = a_0 \quad . \tag{3.66}$$

Deoarece semnalul fără componentă continuă x(t) - 1 este impar, în seria sa trigonometrică $a_k = 0$, $k \geq 1$. Coeficienţii b_k se calculează folosind relaţiile (3.54) şi având în vedere că $\omega_o T_o = 2\pi$:

$$b_k = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o} x(t)\sin k\omega_o t\,dt = \frac{2}{T_o}\int_0^{\frac{T_o}{2}} 2\sin k\omega_o t\,dt = \frac{4}{T_o}\frac{\cos k\omega_o t}{k\omega_o}\Big|_{\frac{T_o}{2}}^{0} = \frac{4}{T_o}\frac{1-\cos(k\pi)}{k\omega_o}$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right] = \begin{cases} 0 & , \ k - par \\ \dfrac{4}{k\pi} & , \ k - impar \end{cases}$$

Coeficienţii dezvoltării se mai pot pune şi sub forma :

$$b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi} \quad , \quad k \geq 0 \quad . \tag{3.67}$$

Seria Fourier ataşată semnalului este :

$$x(t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\omega_o t \quad .$$

Ea poate fi uşor transformată în seria Fourier armonică (3.58), scriind-o în forma:

$$x(t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\cos\left[(2k+1)\omega_o t - \frac{\pi}{2}\right] \quad . \tag{3.68}$$

În figura 3.5 este reprezentat grafic semnalul x(t). În plane paralele cu planul mărime - timp al semnalului se reprezintă evoluţia componentelor spectrale ale semnalului, în funcţie de timp. Proiecţia lor pe un plan perpendicular pe toate aceste plane, numit şi planul amplitudinii componentelor spectrale, dă chiar spectrul de amplitudini al semnalului. Planele componentelor spectrale sunt paralele şi echidistante, distanţa între ele, măsurată pe axa frecvenţei ω este chiar $\omega_o = 2\pi/T_o$.

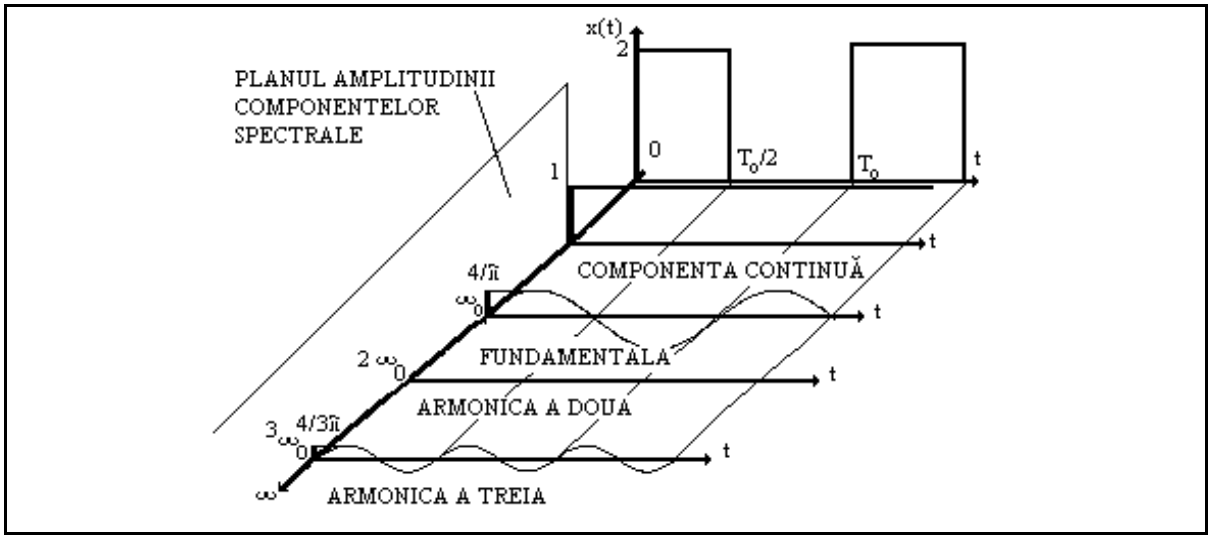


Fig. 3.5 Semnalul periodic x(t) se descompune în componentele seriei armonice ce evoluează în plane paralele.

Se obţine diagrama spectrală din figura 3.6a. Se remarcă lipsa armonicelor pare (dar există componentă continuă, A_0=1). Amplitudinea componentelor spectrale tinde spre 0 pe măsură ce ordinul armonicii creşte. Aceasta este o condiţie absolut necesară pentru ca seria armonică să fie convergentă.

Este posibilă şi scrierea semnalului x(t) sub forma unei serii exponenţiale. Coeficienţii se calculează fie aplicând relaţia (3.59) fie direct cu relaţia (3.63). Rezultă:

$$c_k = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} x(t)\, e^{-jk\omega_o t}\, dt = \frac{1}{T_o}\int_0^{\frac{T_o}{2}} 2\, e^{-jk\omega_o t}\, dt = \frac{2}{T_o}\frac{e^{-jk\omega_o t}}{jk\omega_o}\Big|_{T_o}^{0} = \frac{1-(-1)^k}{j\pi k} \quad , \; k \neq 0$$

$$c_0 = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} x(t)\, dt = \frac{1}{T_o}\int_0^{\frac{T_o}{2}} 2\, dt = 1$$

$$c_{2k+1} = -j\frac{2}{(2k+1)\pi} = \frac{2}{(2k+1)\,\pi)}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad , \; k \geq 0 \quad , \quad c_{2k+1} = \frac{2}{|2k+1|\,\pi}\, e^{j\frac{\pi}{2}} \quad , \; k \leq$$

Modulul coeficienţilor este :

$$|c_k| = \frac{1}{|2k+1|\pi} \quad k \in Z \;\; ; \;\; |c_0| = 1 \;\; , \qquad \textbf{(3.69)}$$

iar argumentul lor:

$$\mathrm{Arg}\{c_k\} = -\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(k) \quad . \qquad \textbf{(3.70)}$$

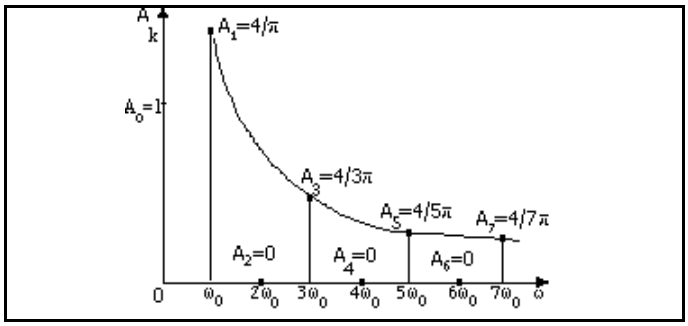


Fig. 3.6 a Spectrul de amplitudini asociat seriei Fourier armonice a semnalului din fig. 3.4.

În figura 3.6 b se prezintă diagrama spectrală a modulului coeficienţilor c_k, spectrul de amplitudini al seriei exponenţiale. Se remarcă, prin comparare cu figura 3.6a, cu care 3.6b este corelată, că $|c_{\pm k}| = A_k/2$, k >0. Numai componenta continuă este aceeaşi în ambele reprezentări. Înjumătăţirea amplitudinii componentelor spectrale în cazul utilizării seriei Fourier exponenţiale în locul celei armonice apare ca urmare a utilizării pe lângă frecvenţele pozitive şi a frecvenţelor negative - vezi şi figura 1.7. Spectrul de faze al celor două reprezentări este arătat în figurile 3.7 a respectiv 3.7 b.Se remarcă faptul că seria exponenţială are acelaşi spectru de faze cu seria armonică pentru frecvenţele pozitive şi spectru de faze simetric în raport cu originea pentru frecvenţele negative. Faza componentei continue este întotdeauna considerată a fi nulă. Proprietatea este generală deoarece $c_{-k} = c_k^*$.

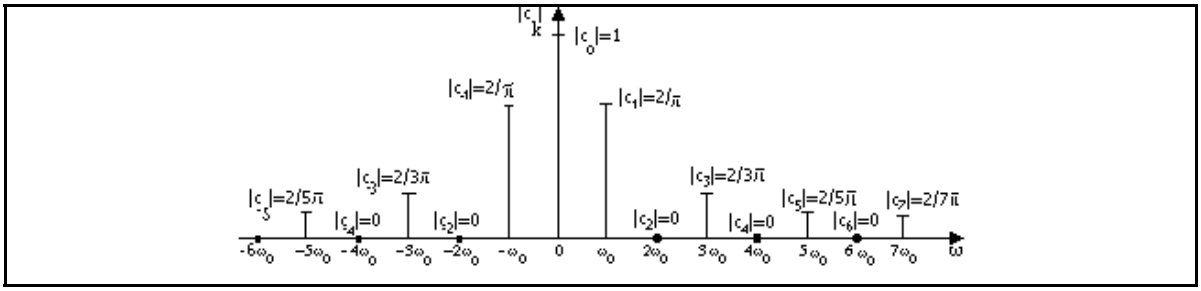


Fig. 3.6 b Spectrul de amplitudini asociat seriei Fourier exponenţiale a semnalului din fig. 3.4.

Ceea ce se poate remarca din reprezentările spectrale este caracterul discret al semnalelor periodice în domeniul frecvenţă. Proprietatea este generală deoarece în expresiile seriilor nu intervin decât frecvenţele $k\omega_o$ cu k natural sau

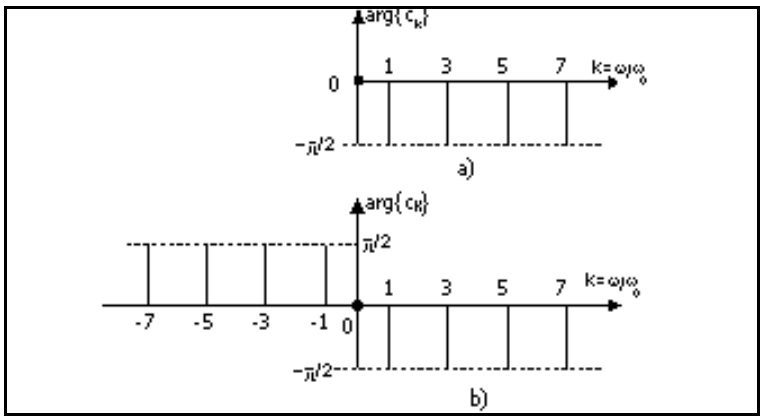


Fig. 3.7 (a) Spectrul de faze al seriei armonice a semnalului din fig. 3.4, (b) Spectrul de faze al seriei exponenţiale a aceluiaşi semnal.

întreg. Liniile spectrale sunt echidistante, distanţa între ele fiind un multiplu întreg al frecvenţei fundamentale ω_o. Liniile spectrale nu pot fi la distanţe mai mici în frecvenţă decât ω_o.

Pe lângă spectrele de amplitudini şi de faze, se mai utilizează în practică şi spectrul de putere. Acesta arată modul de repartizare a puterii semnalului între diferitele componente spectrale.

Considerăm seria Fourier armonică, forma ei generală (3.58). Relaţia lui Parseval, relaţia (3.51) ia forma:

$$\frac{1}{T_o}\int_{T_o}|x(t)|^2dt \;=\; \frac{1}{T_o}\left[A_0^2T_o+\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2\frac{T_o}{2}\right] \;,$$

pătratul normei lui "1" este T_o iar pătratul normei funcţiilor trigonometrice este $T_o/2$. Relaţia de calcul a puterii semnalului periodic, cu cele două forme echivalente este deci:

$$\mathbf{P} \;=\; \frac{1}{T_o}\int_{T_o}|x(t)|^2dt \;=\; A_0^2+\sum_{k+1}^{\infty}\frac{A_k^2}{2} \;. \qquad \textbf{(3.71)}$$

Rezultatul era de aşteptat deoarece puterea componentei continue este chiar pătratul ei iar puterea cosinusoidei $A_k\cos(k\omega_o t+\varphi_k)$ este $A_k^2/2$, independentă de frecvenţa $k\omega_o$sau faza iniţială φ_k - vezi şi relaţia (1.78).

În figura 3.8 se reprezintă spectrul de puteri, A_0^2 , respectiv $A_k^2/2$ în funcţie de ω pentru semnalul considerat ca exemplu. Se observă că puterea componentelor spectrale descreşte foarte repede. Puterea semnalului din figura 3.4 se calculează aplicând relaţia de definiţie şi este:

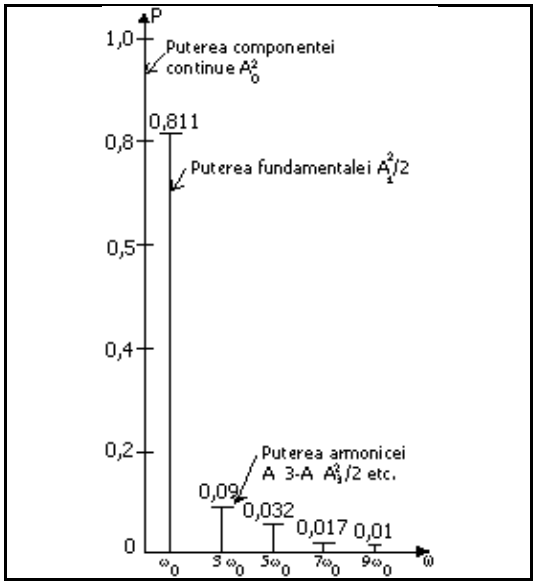


Fig. 3.8 Spectrul de putere provenit din seria armonică a semnalului din fig. 3.4.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_o}\int_0^{\frac{T_o}{2}} 4\,dt = 2 \ .$$

Analizând situaţia expusă în figura 3.8, rezultă că luând în considerare componenta continuă şi armonicele până la a noua inclusiv, puterea obţinută este 1,96. Prin urmare tuturor celorlalte componente le revine o putere de 2-1,96=0,04 care în valoare relativă este de numai (0,04/2)100=2%. Seria considerată converge rapid.

În legătură cu spectrul de putere vom introduce noţiunea de <u>bandă de frecvenţă efectivă</u> a semnalului. După cum se poate observa din exemplul considerat nu toate componentele au acelaşi aport în puterea semnalului. Seria (3.71) fiind convergentă, cel puţin de la un anumit ordin încolo, puterea transportată de fiecare componentă descreşte odată cu ordinul său. Prin definiţie, banda efectivă a semnalului este intervalul de pe axa frecvenţelor pozitive pe care se află acele componente spectrale cărora le revine o fracţie semnificativă din puterea semnalului. Evident noţiunea "semnificativă" este vagă şi depinde de aplicaţie.

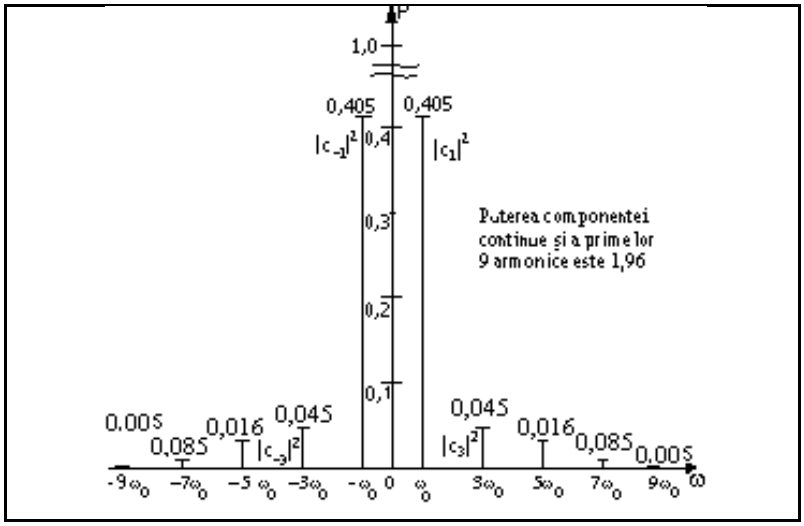


Fig. 3.9 Spectrul de putere provenit din seria exponenţială a semnalului din fig. 3.4.

Se consideră în general că "semnificativă" este 90% din putere deşi nu sunt excluse şi alte valori. În exemplul de faţă banda efectivă la 0,9P este de la 0 la $7\omega_o$. Considerând o bandă efectivă de la 0 la $9\omega_o$, fracţia de putere este ceva mai mare şi anume 0,96. O noţiune asemănătoare, dar care se referă la spectrul de amplitudini este <u>banda de frecvenţă</u> a semnalului sau <u>banda</u>

frecvenţelor utile. Ea este acel interval de pe axa frecvenţelor pozitive în care se află componentele spectrale a căror amplitudini mai au semnificaţie într-o aplicaţie dată. Se poate lua ca şi criteriu condiţia $A_k \geq 0{,}1A_1$. Coeficientul lui A_1 din relaţia anterioară poate diferi de la aplicaţie la aplicaţie. În exemplul considerat armonica a noua are amplitudinea $A_9 = 0{,}111A_1$ iar armonica a 11-a amplitudinea $A_{11}=0{,}09A_1$. Prin urmare banda frecvenţelor utile se întinde de la 0 la $9\omega_o$. Atragem atenţia asupra faptului că nu există un consens în ceea ce priveşte termenii introduşi. Dacă ne referim acum la forma generală (3.62) a seriei Fourier exponenţiale relaţia lui Parseval (3.51) devine:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{T_o}\int_{T_o}|x(t)|^2dt = \frac{1}{T_o}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2\|e^{jk\omega_o t}\|^2 \quad .$$

Dar pătratul normei exponenţialelor fiind T_o, se obţine în final:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{T_o}\int_{T_o}|x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 \quad . \qquad \textbf{(3.72)}$$

Având în vedere că $|c_{-k}| = |c_k|$, ultima relaţie se mai poate scrie:

$$\mathbf{P} = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \quad . \qquad \textbf{(3.73)}$$

Reprezentarea $|c_k|^2$ în funcţie de ω dă spectrul de putere al semnalului, provenit din seria Fourier exponenţială. În figura 3.9 se arată acest spectru de putere pentru exemplul considerat. Componentele cu frecvenţele de la $-9\omega_o$ la $9\omega_o$ transportă o putere de 1,96. Aceasta nu înseamnă că banda efectivă a semnalului este $18\omega_o$. Banda se măsoară numai pe semiaxa pozitivă şi este $9\omega_o$. Ca şi spectrele de amplitudini şi de faze, şi spectrele de putere ale semnalelor periodice sunt discrete, având linii plasate doar la frecvenţele $k\omega_o$, $\omega_o=2\pi/T_o$ fiind frecvenţa fundamentală.

3.3.5 Fenomenul Gibbs

În 1898 fizicianul american Albert Michelson, recunoscut pentru abilitatea sa de experimentator, a construit un analizor armonic care îi permitea să descompună un semnal în armonici, până la a 80-a componentă. În felul acesta Michelson "trunchia" seria armonică, prin neglijarea termenilor având k > 80. Însumând componentele, Michelson a constatat că ceea ce obţinea era "foarte asemănător" cu semnalul iniţial, cu o singură excepţie. Când semnalul analizat era o undă dreptunghiulară, prin recompunere se obţinea un semnal care avea

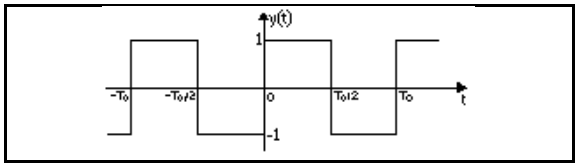


Fig. 3.10 Undă dreptunghiulară cu factorul de umplere 0,5 fără componentă continuă.

"suprapuse" nişte mici oscilaţii în imediata vecinătate a tranziţiei semnalului. Cum nu şi-a putut explica cauza apariţiei oscilaţiilor, Michelson s-a adresat specialistului în fizică matematică J.Gibbs care a studiat fenomenul şi şi-a expus concluziile în 1899. Vom expune fenomenul şi concluziile ce se desprind. Pentru a nu complica lucrurile vom considera semnalul y(t) din figura 3.10. El seamănă cu semnalul x(t) din figura 3.4 dar nu are componentă continuă. Coeficienţii seriei sale trigonometrice sunt:

$$b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi} \qquad k \in N \quad ,$$

aşa că seria trigonometrică se scrie:

$$y(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\omega_o t + \frac{\sin 3\omega_o t}{3} + \ldots + \frac{\sin(2k+1)\omega_o t}{2k+1} + \ldots\right] \quad . \qquad \textbf{(3.74)}$$

Michelson a trunchiat seria trigonometrică înlocuind-o cu o sumă având un număr finit de termeni (n-1):

$$\tilde{y}(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\omega_o t + \frac{\sin 3\omega_o t}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)\omega_o t}{2n-1}\right] \quad . \qquad \textbf{(3.75)}$$

Această sumă se mai scrie şi sub formă integrală:

$$\tilde{y}(t) = \frac{4\omega_o}{\pi}\int_0^t \left[\cos\omega_o\tau + \sin 3\omega_o t + \ldots + \cos(2n-1)\omega_o\tau\right] d\tau \quad .$$

Se ţine seama de identitatea trigonometrică:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+r) + \cos(\alpha+2r) + \ldots + \cos[\alpha+(n-1)r] = \frac{\sin\frac{nr}{2}}{\sin\frac{r}{2}}\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}r\right) \quad ,$$

în care se pune $\alpha = \omega_o\tau$ şi $r = 2\omega_o\tau$ obţinându-se:

$$\cos\omega_o\tau + \cos 3\omega_o\tau + ... + \cos(2n-1)\omega_o\tau = \frac{\sin n\omega_o\tau}{\sin\omega_o\tau}\cos n\omega_o\tau = \frac{\sin 2n\omega_o\tau}{2\sin\omega_o\tau} \quad .$$

(3.76)

Dar "oscilaţiile" au fost observate la tranziţia semnalului. Una dintre tranziţii are loc la momentul t = 0. Limitând timpul la valori t apropiate de zero, $0 \le \tau \le t \ll T_o$ avem $\sin(2\pi\tau/T_o) \simeq 2\pi\tau/T_o$. Cu această observaţie introdusă în relaţia (3.76), relaţia (3.75) devine:

$$\tilde{y}(t) \cong \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\sin\left(2n\cdot 2\pi\frac{\tau}{T_o}\right)}{\tau}d\tau \quad .$$

Se face schimbarea de variabilă $2n\cdot 2\pi\tau/T_o = u$ şi atunci:

$$\tilde{y}(t) \cong \frac{2}{\pi}\int_0^{2n\omega_o t}\frac{\sin u}{u}du = \frac{2}{\pi}\mathrm{Si}(2n\omega_o t) \quad . \qquad \textbf{(3.77)}$$

Funcţia Si(x), sinus integral, de argument x se defineşte prin:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}du \qquad x \ge 0 \quad . \qquad \textbf{(3.78)}$$

Ea are proprietăţile:

$$\mathrm{Si}(-x) = -\mathrm{Si}(x) \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(3.79-80)}$$

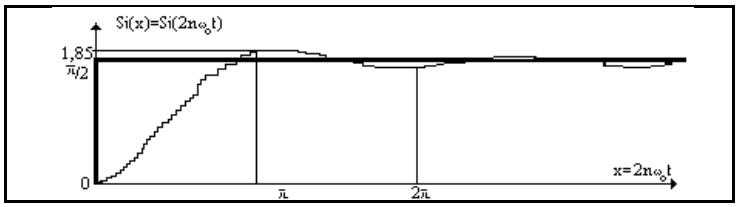


Fig. 3.11. Graficul funcţiei "sinus integral". Primul maxim în valoare de ~ 1,85 apare la valoarea π a argumentului.

Forma de variaţie a curbei Si(x) pentru argumente $x \in [0,7]$ este arătată în figura 3.11. Primul ma-xim are loc pentru $x = \pi$ şi are valoarea de aproximativ 1,852. În consecinţă ỹ(t) va avea un prim maxim pentru $t_m = \pi/(2n\omega_o)$,

valoarea sa fiind $\tilde{y}(t_m) = (2/\pi)1{,}852$ adică aproximativ 1,18. Pentru ca aproximările făcute să fie bune trebuie ca $\omega_o t_m < \pi/36$ (pînă la ~5° sau $\pi/36$ radiani ; sin $\alpha=\alpha$) sau $\pi/(2n) < \pi/36$ deci $n > 18$. Pentru un număr mai redus de termeni, forma analitică nu poate fi uşor stabilită dar relaţia (3.75) ţinând seama de (3.76) poate fi integrată numeric.

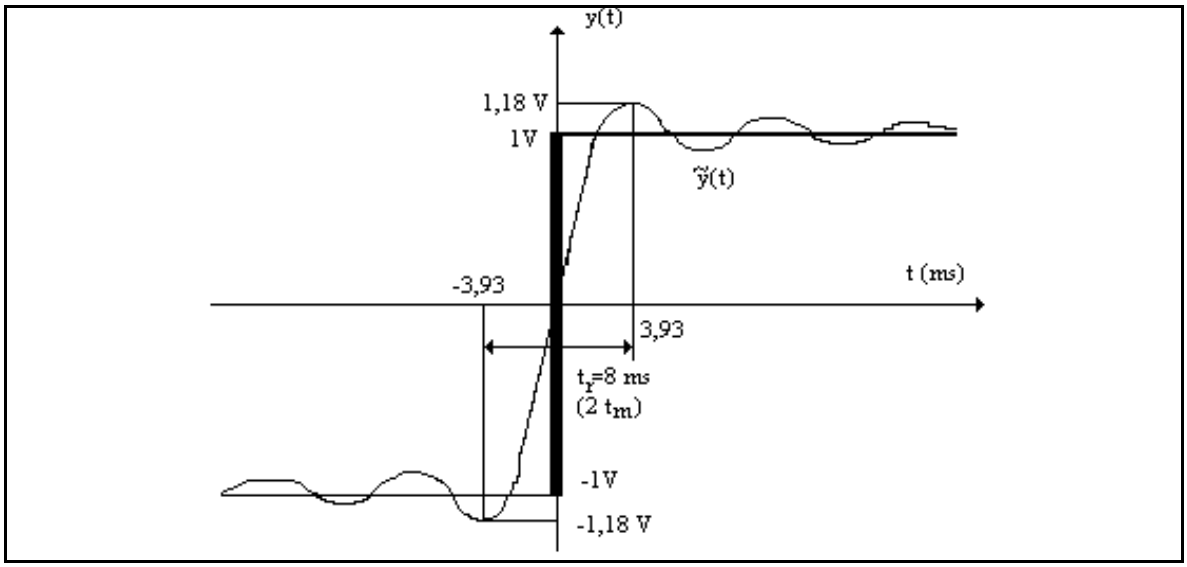


Fig. 3.12. Fenomenul Gibbs pentru o undă rectangulară cu T_o=1ms (factor de umplere 0,5).

Pentru ilustrarea fenomenului s-a reprezentat în figura 3.12 un detaliu pentru o undă rectangulară de tensiune având T_o = 1s (f=1 Hz) ce trece de la -1V la 1V. Trunchierea este făcută pentru n=200. Primul maxim este plasat la $t_m=\pi/(2\cdot 200\cdot 2\pi)=3{,}93$ ms. Al optulea extrem cade la t = 31,44ms.
Pentru acesta $\omega_o \cdot 31{,}44\ 10^{-3}=2\pi\cdot 31{,}44\cdot 10^{-3}=0{,}198$ radiani (aproximativ 3,5°), deci aproximările rămân corecte în întreaga figură. Mărimea primei supracreşteri, atunci când are loc tranziţia de la -1V la 1V este de 0,18V. Tranziţia fiind de 2V, procentual supracreşterea este de $0{,}18/2\cdot 100=9\%$. Ea nu depinde de n, dacă n este suficient de mare. Odată cu creşterea lui n oscilaţiile sunt mai rapide dar amplitudinea lor nu se modifică. În figura 3.13 se poate vedea efectul trunchierii pentru câteva valori mici ale lui n.

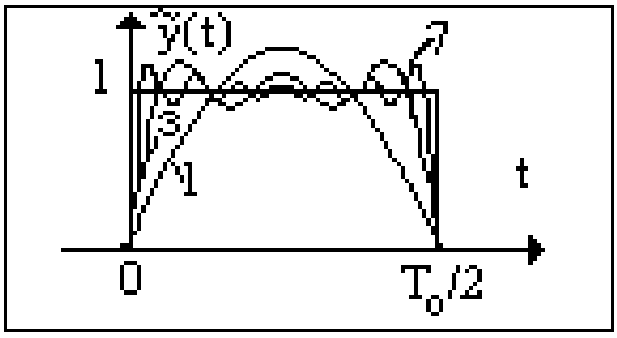


Fig. 3.13 Fenomenul Gibbs pentru valori mici ale lui n.

Constatările făcute mai înainte rămân practic valabile. Se mai poate aprecia şi timpul de tranziţie.
Referindu-ne la figura 3.12, primul

maxim apare la $t_m = \pi/(2n\omega_o)$. Se poate aprecia că timpul de trecere sau de ridicare de la -1 la 1 sau timpul de tranziţie, este ca ordin de mărime $2 \cdot t_m$, deci:

$$t_r = \frac{2\pi}{2n\,\omega_o} = \frac{\pi}{n\,\omega_o} \quad . \tag{3.81}$$

Fenomenul Gibbs ne dă unele informaţii privind convergenţa în $L^2[a,b]$, numită şi convergenţă în medie pătratică. Se poate vedea că nu este vorba despre o convergenţă de tip uniform, deoarece odată cu creşterea lui n mărimea oscilaţiilor nu descreşte. Ele sunt doar "înghesuite" înspre momentul de tranziţie al semnalului. Analizând figura 3.12 rezultă că la t=0:

$$\tilde{y}(0) = 0 = \frac{y(0_+) + y(0_-)}{2} \quad .$$

Indiferent de valoarea lui n, valoarea spre care tinde seria în punctul de discontinuitate a semnalului este media limitelor laterale ale semnalului.

3.3.6 Seria Fourier exponenţială pentru distribuţii

Distribuţiile periodice nu pot avea, ca urmare a periodicităţii, suportul mărginit. Ele sunt deci toate din D'. Prin definiţie, o distribuţie f din D', este periodică de perioadă T, dacă :

$$\langle f(t-T), \varphi(t) \rangle = \langle f(t), \varphi(t) \rangle \quad , \quad \forall\ \varphi \in D \quad . \tag{3.82}$$

Definiţia este echivalentă, dacă se are în vedere relaţia (1.102), cu:

$$\langle f(t), \varphi(t+T) \rangle = \langle f(t), \varphi(t) \rangle \quad , \quad \forall\ \varphi \in D \quad . \tag{3.82'}$$

Dacă g din $\mathscr{E}'$ este o distribuţie cu suportul compact, ea poate fi "periodizată" prin "repetare în timp". Prin definiţie transformata periodică de perioadă T a distribuţiei cu suport compact $g' \in \mathscr{E}'$ este distribuţia $g_T \in D'$ definită prin:

$$\langle g_T, \varphi \rangle = \langle g, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t-kT) \rangle \qquad \forall\ \varphi \in D \quad . \tag{3.83}$$

Se poate demonstra imediat că g_T este periodică. Avem:

$$\left\langle g_T(t)\,,\,\varphi(t+T)\right\rangle \;=\; \left\langle g(t)\,,\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi(t+T-kT)\right\rangle \quad ,$$

şi punând n = k-1:

$$\left\langle g_T(t)\,,\,\varphi(t+T)\right\rangle \;=\; \left\langle g(t)\,,\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(t+T-nT)\right\rangle \;=\; \left\langle g_T(t)\,,\,\varphi(t)\right\rangle \quad ,$$

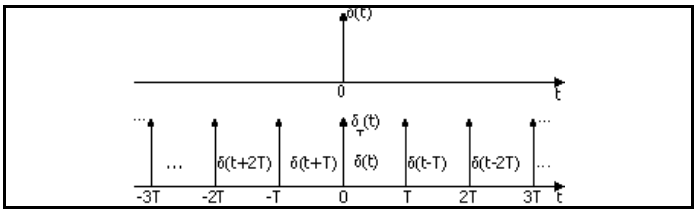


Fig. 3.14. Distribuţia Dirac δ(t) şi transformata ei periodică, distribuţia $\delta_T(t)$.

şi conform definiţiei (3.82') g_T este o distribuţie periodică de perioadă T. În teoria semnalelor şi sistemelor se utilizează transformata periodică a distribuţiei Dirac δ(t) notată $\delta_T(t)$. Ea este cunoscută şi ca distribuţia Dirac periodică. Deoarece $\delta \in \mathscr{E}'$ i se aplică definiţia (3.83):

$$\left\langle \delta_T(t)\,,\,\varphi(t)\right\rangle = \left\langle \delta(t)\,,\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi(t+kT)\right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\langle \delta(t)\,,\,\varphi(t+kT)\right\rangle =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\langle \delta(t-kT)\,,\,\varphi(t)\right\rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\,,\,\varphi(t)\right\rangle \quad \forall\,\varphi \in D \quad ,$$

şi se obţine:

$$\delta_T(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \quad . \qquad \textbf{(3.84)}$$

În figura 3.14 este arătată, prin convenţia de reprezentare admisă, atât distribuţia Dirac cât şi transformata ei periodică. Se defineşte seria Fourier exponenţială ataşată distribuţiei f_T, transformata periodică a distribuţiei f:

$$f_T(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t} \quad , \quad \omega_o \;=\; \frac{2\pi}{T} \quad . \qquad \textbf{(3.85)}$$

La fel ca şi în cazul funcţiilor periodice, coeficienţii seriei sunt calculaţi cu relaţia:

$$c_k = \frac{1}{T}\left\langle f, e^{jk\omega_o t}\right\rangle \quad e^{jk\omega_o t} \in \mathscr{E} \ , \ f \in \mathscr{E}' \ . \qquad \textbf{(3.86)}$$

Coeficienţii seriei asociate distribuţiei Dirac periodice sunt:

$$c_k = \frac{1}{T}\left\langle \delta(t), e^{jk\omega_o t}\right\rangle = \frac{1}{T} \ , \qquad \textbf{(3.87)}$$

şi deci:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_o t} \ . \qquad \textbf{(3.88)}$$

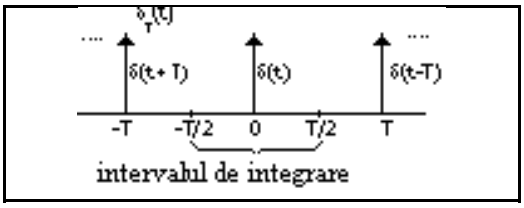


Fig. 3.15. Detaliu pentru calculul prin integrare a coeficienţilor c_k.

O tratare mai puţin riguroasă dar mai sugestivă se poate face considerând distribuţia Dirac periodizată ca pe o funcţie oarecare. Pentru calculul coeficienţilor se aplică relaţia (3.63):

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t)\, e^{jk\omega_o t} dt \ .$$

Se observă însă - vezi şi figura 3.15 - că pe intervalul de integrare [-T/2, T/2] din toată distribuţia periodică rămâne doar distribuţia Dirac. În consecinţă:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\, e^{jk\omega_o t} dt = \frac{1}{T} \ ,$$

valoare ce s-a găsit şi mai înainte. Vom remarca faptul că nu apare scăderea valorilor coeficienţilor odată cu creşterea ordinului lor. Relaţia (3.88) este valabilă numai în sensul distribuţiilor. Atragem atenţia că nu se poate defini, ca la un semnal periodic de tip funcţie, puterea distribuţiei Dirac periodice. Deoarece produsul distribuţiilor nu este definit, nu este definit nici pătratul lor.

sau:

3.4 Proprietăţile seriei Fourier exponenţiale

Seria Fourier exponenţială (ca de altfel şi celelalte forme) poate fi privită ca o transformare ce asociază unui semnal periodic x(t) de perioadă T (s-a renunţat, din comoditate, la notarea cu T_o a perioadei) o transformată constituită din secvenţa discretă a coeficienţilor săi $\{c_k\}$. Cunoscând secvenţa $\{c_k\}$, prin aplicarea transformării inverse se poate recupera semnalul x(t) aproape peste tot. Se poate scrie:

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \{c_k^x\} \quad , \tag{3.89}$$

unde transformările directă şi inversă sunt:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_o t} dt \tag{3.90}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t} \quad a.p.t \tag{3.91}$$

Transformarea ce pune în corespondenţă semnalul periodic cu secvenţa coeficienţilor săi are anumite proprietăti ce vor fi sumar prezentate.

1. **Aditivitatea şi omogenitatea** sunt evidente. Se scrie :

$$\begin{aligned} &x(t) \longleftrightarrow \{c_k^x\} \quad , \quad y(t) \longleftrightarrow \{c_k^y\} \\ &ax(t) + byt) \longleftrightarrow \{ac_k^x + bc_k^y\} \quad , \end{aligned} \tag{3.92}$$

Se subînţelege că ambele semnale considerate au aceeaşi perioadă T.

2. **Deplasarea în timp** Se caută coeficienţii semnalului deplasat $x(t-t_o)$ cunoscând că $x(t) \longleftrightarrow \{c^x{}_k\}$:

$$c_k' = \frac{1}{T}\int_T x(t-t_o)\, e^{-jk\omega_o t} dt = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)\, e^{-jk\omega_o(\tau+t_o)} d\tau = e^{-jk\omega_o t_o} c_k^x \quad ,$$

$$x(t-t_o) \longleftrightarrow \left\{e^{-jk\omega_o t_o} c_k^x\right\} \quad . \tag{3.93}$$

3. **Conjugarea complexă** Se cer coeficienţii semnalului x*(t), conjugatul complex al lui x(t):

$$c_k' = \frac{1}{T}\int_T x^*(t)\, e^{-jk\omega_o t}\, dt = \left(\frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j(-k)\omega_o t}\, dt\right)^* = \left(c_{-k}^{x}\right)^*$$

$$x^*(t) = x(-t) = \longleftrightarrow \left\{c_{-k}^{x}\right\} \quad . \tag{3.94}$$

4. **Reflectarea semnalului** Pentru x̌(t) = x(-t) coeficienţii sunt:

$$c_k' = \frac{1}{T}\int_T x(-t)\, e^{-jk\omega_o t}\, dt = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)\, e^{-j(-k)\omega_o \tau}\, d\tau = c_{-k}^{x}$$

$$\check{x}(t) = x(-t) \longleftrightarrow \left\{c_{-k}^{x}\right\} \quad . \tag{3.95}$$

5. **Scalarea variabilei** Semnalul x(at) ; a > 0 rămâne periodic dar perioada sa este T/a. Pentru acest semnal avem:

$$c_k' = \frac{1}{\frac{T}{a}}\int_{\frac{T}{a}} x(at)\, e^{-jk\omega_o' t}\, dt \quad ; \quad \omega_o' = \frac{2\pi}{\frac{T}{a}} = a\omega_o$$

$$c_k' = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)\, e^{-jk\omega_o \tau}\, d\tau = c_k^{x} \tag{3.96}$$

$$x(at) \longleftrightarrow \left\{c_k^{x}\right\} \quad .$$

Deşi valoarea coeficienţilor nu se modifică, în spectrul semnalului x(at) liniile spectrale au între ele multiplii întregi ai valorii ω_o' = a ω_o.

6. **Modularea semnalului** Înmulţirea semnalului x(t) cu $e^{jk_o\omega_o t}$, semnal şi el periodic, de perioadă T , dă un semnal periodic de aceeaşi perioadă T:

$$c_k' = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{jk_o\omega_o t}\, e^{-jk\omega_o t}\, dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j(k-k_o)\omega_o t}\, dt = c_{k-k_o}^{x}$$

$$x(t)\, e^{jk_o\omega_o t} \longleftrightarrow \left\{c_{k-k_o}^{x}\right\} \quad . \tag{3.97}$$

7. **Produsul a două semnale** Fie x(t) <——> $\{c_k^x\}$ şi y(t) <——>$\{c_k^y\}$ două semnale de aceeaşi perioadă T. Produsul lor are perioada T. Avem:

$$c_k' = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,y(t)\,e^{-jk\omega_o t}\,dt \quad .$$

Se substituie unul din semnale prin forma sa de reconstruire (3.91):

$$c_k' = \frac{1}{T}\int_T x(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^y e^{jn\omega_o t}\right) e^{-jk\omega_o t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^y \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-j(k-n)\omega_o t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^y c_{k-n}^x$$

$$x(t)\,y(t) \;\longleftrightarrow\; \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{k-n}^x c_n^y\right\} = \left\{c_k^x * c_k^y\right\} \quad .$$

(3.98)

Prin urmare semnalul produs are coeficienţii egali cu convoluţia coeficienţilor.

8. **Convoluţia periodică a semnalelor** Este cunoscută şi sub denumirea de convoluţie circulară. Pentru clarificarea noţiunii considerăm două unde rectangulare periodice, x(t) şi y(t), de aceeaşi perioadă T, ca în figura 3.16. Prin definiţie convoluţia circulară z(t) a celor două semnale periodice x(t) şi y(t) este:

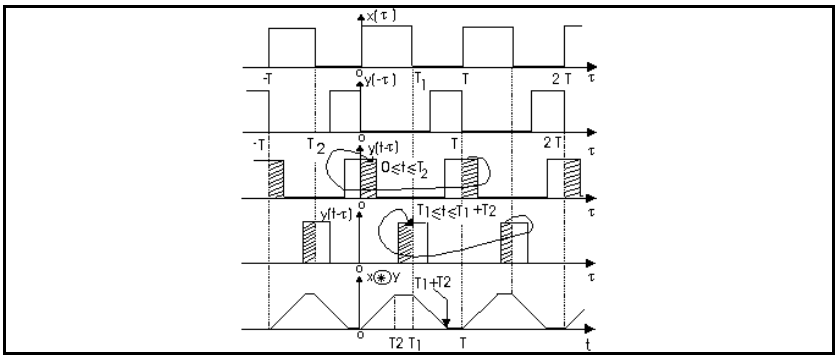


Fig. 3.16 Convoluţia circulară a două unde rectangulare. Se observă efectul de "circularitate".

$$z(t) = \int_T x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau. \qquad \textbf{(3.99)}$$

Se poate arăta că z(t) este un semnal periodic de perioadă T. Într-adevăr avem:

$$z(t+T) = \int_T x(\tau)\,y(t+T-\tau)\,d\tau \;;$$

$$y(t-\tau+T) \;=\; y(t-\tau) \quad ,$$

semnalul y(t) fiind periodic de perioadă T. În consecinţă:

$$z(t+T) = \int_{T} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = z(t) \quad , \qquad \textbf{(3.100)}$$

relaţie ce demonstrează periodicitatea lui z(t). Calculul convoluţiei periodice presupune înmulţirea semnalului x(τ) cu o versiune reflectată şi deplasată cu t a celui de-al doilea semnal y(t-τ), dar integrarea se efectuează pe o singură perioadă. Rezultatul nu depinde de care anume perioadă se alege, motiv pentru care în figura 3.16 am luat în considerare perioada [0,T]. Atunci când semnalul ŷ(τ) se deplasează, urmare a periodicităţii sale, porţiunea din el ce iese prin dreapta intervalului de integrare pare să reintre în acest interval prin stânga sa. De aceea se vorbeşte despre un "efect de circularitate" iar convoluţia se mai numeşte şi circulară. Atragem atenţia că dacă T_1 şi T_2 sunt lungimile suporturilor celor două semnale, într-o perioadă T ($T_1 \le T$, $T_2 \ge T$) atunci suportul lui z(t) este T_1+T_2, într-o perioadă. Dacă $T \ge T_1+T_2$, atunci reţinând din convoluţia circulară numai prima perioadă [0,T] se obţine convoluţia semnalelor aperiodice formate din prima perioadă, [0,T] a celor două semnale. Dacă însă $T < T_1+T_2$, cum este cazul în exemplul prezentat în figura 3.17 segmentele convoluţiei circulare se încalecă şi nu se mai poate găsi în [0,T] rezultatul convoluţiei semnalelor x(t) şi y(t) limitate la prima perioadă [0,T] şi considerate aperiodice. Semnul utilizat în acest curs pentru convoluţia circulară este ⊛ şi se scrie z(t)=x(t)⊛y(t). Atragem atenţia asupra faptului că în multe lucrari se utilizează acelaşi simbol $*$ atât pentru convoluţia semnalelor aperiodice (neperiodice) cât şi pentru convoluţia semnalelor periodice. Este însă subînţeles că dacă termenii convoluţiei sunt semnale periodice nu poate fi vorba decât despre convoluţia periodică, (3.99). Fie acum două semnale x(t) şi y(t) de aceeaşi perioadă T. Se caută coeficienţii dezvoltării în serie Fourier a semnalului z(t) = x(t)⊛y(t):

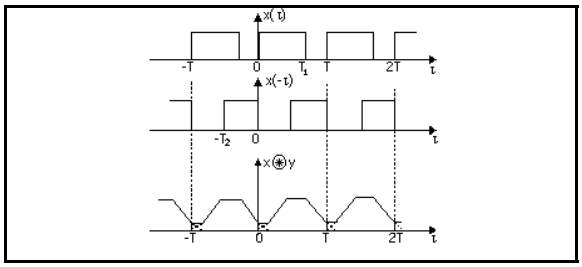


Fig. 3.17 Dacă $T<T_1+T_2$ nu se mai regăseşte convoluţia aperiodică.

$$c_k^z = \frac{1}{T}\int_T z(t)e^{-jk\omega_o t}dt = \frac{1}{T}\int_T \left(\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-jk\omega_o t}dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_o \tau}d\tau \int_T y(t-\tau)e^{-jk\omega_o (t-\tau)}dt = c_k^x \cdot Tc_k^y$$

$$x(t) \circledast y(t) \longleftrightarrow \{Tc_k^x c_k^y\} \quad . \tag{3.101}$$

9. **Derivarea semnalului** Şi după derivare un semnal periodic rămâne periodic

$$c_k' = \frac{1}{T}\int_T \frac{dx(t)}{dt}e^{-jk\omega_o t}dt = \frac{1}{T}x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\Big|_0^T + jk\omega_o \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_o t}dt$$

$$c_k' = \frac{1}{T}x(t)\left(e^{-j2k\pi} - 1\right) + jk\omega_o c_k^x = jk\omega_o c_k^x \tag{3.102}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow \{jk\omega_o c_k^x\}$$

de aceeaşi perioadă, atât doar că dacă există componentă continuă ea dispare:

10. **Integrarea semnalului** Un semnal periodic se poate scrie sub forma:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_o t + \varphi_k)$$

Prin integrare rezultă:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = A_0 \int_{-\infty}^{t} d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{-\infty}^{t} \cos(k\omega_o \tau + \varphi_k)d\tau \quad .$$

Pentru ca semnalul să rămână periodic trebuie ca A_0 să fie neapărat nul. Deci se pot integra, acele semnale periodice care nu au componentă continuă. Fie:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \{c_k^y\} \quad .$$

Aplicând (3.102) se scrie:

$$\frac{dy(t)}{dt} \longleftrightarrow \{jk\omega_o c_k^y\}$$

Dar:

$$\frac{ay(t)}{dt} = x(t) \longleftrightarrow \{c_k^x\} = \{jk\omega_o c_k^y\} \quad ,$$

şi deci:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \left\{\frac{c_k^x}{jk\omega_o}\right\} \qquad c_0^x = 0 \qquad \textbf{(3.103)}$$

11. **Cazul semnalelor reale** Fie x(t) un semnal real periodic de perioadă T. Avem $c_k = c^*_{-k}$ rezultând proprietătile (3.64).

12. **Seria componentei pare şi a componentei impare** Fie x(t) un semnal real:

$$x_p(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \longleftrightarrow \left\{\frac{1}{2}c_k^x + \frac{1}{2}c_{-k}^x\right\} \quad . \qquad \textbf{(3.104)}$$

Dar pentru un semnal real $c_k^x = (c_{-k}^x)^*$ şi deci:

$$x_p(t) \longleftrightarrow \{\mathrm{Re}\, c_k^x\} \qquad \textbf{(3.104')}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2} \longleftrightarrow \left\{\frac{1}{2}c_k^x - \frac{1}{2}c_{-k}^x\right\}$$

$$x_i(t) \longleftrightarrow \{j\,\mathrm{Im}\, c_k^x\} \quad . \qquad \textbf{(3.104")}$$

În tabelul 3.1 (vezi pagina 170) sunt sintetizate proprietăţile demonstrate iar în tabelul 4.3 se dau câteva semnale periodice utile şi coeficienţii seriilor lor Fourier.

3.5 Serii polinomiale

Fie mulţimea $\{e_1,e_2,...,e_n,...\}$ o bază a unui spaţiu, formată din funcţii neortogonale. Orice submulţime finită a ei generează un subspaţiu finit al spaţiului

considerat. Utilizând procedura de ortogonalizare Gram-Schmidt descrisă prin:

$$u_k(t) = \frac{v_k(t)}{\|v_k(t)\|} \qquad \textbf{(3.105')}$$

cu:

$$v_1(t) = e_1(t) \qquad \textbf{(3.105'')}$$

şi termenul general:

$$v_k(t) = e_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k(t), v_i(t) \rangle v_i(t) \quad ,$$

se obţine baza ortonormală { $u_1,u_2,...,u_n,...$}.

Polinoamele Legendre Ortogonalizând baza $\{1,t,t^2,...\}$ în $L^2[-1,1]$ se obţin aşa numitele polinoame Legendre:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n \quad . \qquad \textbf{(3.106)}$$

Ele sunt ortogonale în $L^2[-1,1]$ şi au norma dată de relaţia:

$$\|P_n(t)\|^2 = \frac{2}{2n+1} \qquad \textbf{(3.107)}$$

Semnalele x(t) din $L^2[-1,1]$ pot fi dezvoltate în serie după polinoamele Legendre. Coeficienţii dezvoltării şi relaţia de reconstrucţie sunt:

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} x(t) P_k(t) dt \quad ; \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(t) \quad . \qquad \textbf{(3.107')}$$

Astfel de dezvoltări se utilizează la analiza unor câmpuri, în fizică.

Polinoamele Hermite Aceste polinoame au expresia:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right) \quad . \tag{3.108}$$

Funcţiile $\exp(-t^2/2)\cdot H_n(t)$ sunt ortogonale şi au norma dată de:

$$\left\| e^{\frac{-t^2}{2}} H_n(t) \right\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad . \tag{3.109}$$

Calculul coeficienţilor dezvoltării unui semnal de energie finită cu ajutorul polinoamelor Hermite se realizează prin aplicarea relaţiilor:

$$c_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{\frac{-t^2}{2}} H_k(t)\, dt \quad ; \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{\frac{-t^2}{2}} H_k(t) \quad . \tag{3.110}$$

Polinoamele lui Hermite se utilizează în analiza şi sinteza impulsurilor.

Polinoamele Laguerre Acestea provin din ortogonalizarea mulţimii $\{e^{-t}, te^{-t}, ..., t^n e^{-t}, ...\}$ în spaţiul $L^2(R^+)$. Polinoamele lui Laguerre au expresia:

$$L_n(t) = (-1)^n e^{t} \frac{a}{dt}(t^n e^{-t}) \quad , \tag{3.111}$$

condiţia de ortogonalitate în $[0 , \infty)$ satisfăcând-o de fapt $e^{-t/2}L_n(t)$, cu:

$$\left\| e^{-\frac{t}{2}} L_n(t) \right\|^2 = (n!)^2 \quad . \tag{3.112}$$

Pentru semnale din $L^2(R^+)$ se scriu relaţiile:

$$c_k = \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} x(t) e^{-\frac{t}{2}} L_k(t)\, dt \quad ; \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{\frac{-t}{2}} L_k(t) \quad . \tag{3.113}$$

Şi polinoamele Laguerre se utilizează în analiza şi sinteza unor impulsuri.

Polinoamele Cebîşev Cu polinoamele lui Cebîşev:

$$C_n(t) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-t^2}\frac{d^n}{dt^n}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{2n-1} \quad , \qquad \textbf{(3.114)}$$

se poate forma familia de polinoame ortogonale $\left\{\frac{C_n(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}}\right\}$ din $L^2[-1,1]$:

$$\left\|\frac{C_n(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}}\right\|^2 = \begin{cases}\frac{\pi}{2} & n \neq 0\\ \pi & n = 0\end{cases} \qquad \textbf{(3.115)}$$

Semnalele din $L^2[-1,1]$ pot fi dezvoltate după familia de funcţii (3.114):

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x(t)\frac{C_0(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}}dt \quad ; \quad c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x(t)\frac{C_k(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}}dt \quad ; \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{C_k(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}} \ .$$

(3.116)

Polinoamele Cebîşev se utilizează în probleme de aproximare a semnalelor şi circuitelor electrice.

Funcţiile Bessel de speţa întâia Pot fi utilizate pentru construcţia unor funcţii ortogonale. Forma funcţiilor Bessel de speţa întâia şi ordin n este:

$$J_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n} \ . \qquad \textbf{(3.117)}$$

Notând cu r_{nk} şi r_{nl} rădăcinile ecuaţiei $J_n(t)=0$ se poate demonstra că în $L^2[0,1]$:

$$\left\|\sqrt{t}J_n(r_{nk}t)\right\|^2 = \frac{1}{2}\left[J_n'(r_{nk})\right]^2 \ ; \ J_n'(t) = \left(\frac{1}{2}\right)\left[J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)\right] \ , \qquad \textbf{(3.118)}$$

şi deci, pentru semnale x(t) din $L^2[0,1]$ sunt valabile relaţiile:

$$c_k = \frac{2}{\left[J_n'(r_{nk})\right]^2}\int_0^1 \sqrt{t}\,x(t)J_n(r_{nk}t)\,dt \ , \ x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_n(r_{nk}t) \ . \qquad \textbf{(3.119)}$$

3.6 Serii cu funcţii constante pe subintervale

Funcţii Walsh Rademacher a introdus o familie de funcţii ortonormate în

$L^2[-1/2,1/2]$ definite prin:

$$\mathrm{rad}(n,t)=\mathrm{sgn}[\sin(2\pi nt)],-\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}\ . \qquad \textbf{(3.120)}$$

Funcţiile Rademacher sunt periodice, de perioadă comună 1. Mulţimea acestor funcţii nu este o bază, nefiind completă. Se poate observa că toate funcţiile Rademacher sunt impare şi deci nici un semnal par nu va putea fi descompus cu ajutorul acestor funcţii. Walsh a propus o mulţime totală de funcţii ortonormate, formată din elementele:

$$\mathrm{wal}(m,t) = \prod_{k=1}^{n}[\mathrm{rad}(k,t)]^{p_{nk}} \quad , \quad m = 0,1,\ldots 2^n-1 \quad . \qquad \textbf{(3.121)}$$

Fiecare funcţie Walsh apare ca un produs de n funcţii Rademacher, exponenţii p_{nk} sunt fie 0 fie 1, urmând anumite reguli de ordonare. Scriind numărul m în binar $m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i 2^i \quad , \quad m_i \in \{0,1\}$,se obţine aşa numita ordonare după Walsh

$$p_{nk}^{w} = m_k \oplus^2 m_{k+1} \quad , \qquad \textbf{(3.122)}$$

unde cu $\oplus^2$ s-a notat suma modulo 2. Funcţiile respective se notează $\mathrm{wal}_w(m,t)$. Ordonarea Walsh corespunde exprimării ordinului funcţiei în codul Gray. Pentru n=3 de exemplu, avem:

$$\mathrm{wal}_w(m,t) = [\mathrm{rad}(1,t)]^{p_{31}^{w}}[\mathrm{rad}(2,t)]^{p_{32}^{w}}[\mathrm{rad}(3,t)]^{p_{33}^{w}} \quad . \qquad \textbf{(3.121')}$$

În tabelul 3.2 se prezintă primele 8 funcţii Walsh în ordonare Walsh. În figura 3.18 sunt prezentate primele trei funcţii Rademacher şi primele 8 funcţii $\mathrm{wal}_w(m,t)$. Se introduc denumirile alternative:

$$\mathrm{cal}(i,t) = \mathrm{wal}_w 2i,t) \quad ; \quad \mathrm{sal}(i,t) = \mathrm{wal}_w(2i-1,t) \quad . \qquad \textbf{(3.123)}$$

Legat de aceste funcţii, Harmut a introdus o noţiune alternativă frecvenţei, secvenţa, definită ca jumătate din numărul de treceri prin zero ale funcţiei în perioada fundamentală considerată ca interval semideschis [-1/2,1/2). Unitatea de măsură a secvenţei este zps (**Z**ero **C**rossing per **S**econd).
Criteriul de ordonare introdus de Walsh este tocmai secvenţa s_m . Dacă ordinul şi secvenţa funcţiilor sal şi cal se egalează, se introduc:

$$\begin{aligned} cal(s_m,t) &= wal_w(m,t)\ ,\ m\ par \\ sal(s_m,t) &= wal_w(m,t)\ ,\ m\ impar\ , \end{aligned} \qquad \textbf{(3.124)}$$

Tabelul 3.2 Primele 8 funcţii Walsh

m	m_2	m_1	m_0	p^w_{33}	p^w_{32}	p^w_{31}	$wal_w(m,t)$	Nume alternativ
0	0	0	0	0	0	0	$wal_w(0,t)=1$	cal(0,t)
1	0	0	1	0	0	1	$wal_w(1,t)=rad(1,t)$	sal(1,t)
2	0	1	0	0	1	1	$wal_w(2,t)=rad(2,t)rad(1,t)$	cal(1,t)
3	0	1	1	0	1	0	$wal_w(3,t)=rad(2,t)$	sal(2,t)
4	1	0	0	1	1	0	$wal_w(4,t)=rad(3,t)rad(2,t)$	cal(2,t)
5	1	0	1	1	1	1	$wal_w(5,t)=rad(3,t)rad(2,t)rad(1,t)$	sal(3,t)
6	1	1	0	1	0	1	$wal_w(6,t)=rad(3,t)rad(1,t)$	cal(3,t)
7	1	1	1	1	0	0	$wal_w(7,t)=rad(3,t)$	sal(4,t)

unde secvenţa s_m este :

$$s_m = \begin{cases} 0 & ,\ m = 0 \\ \dfrac{m}{2} & ,\ m\ \ par \\ \dfrac{(m+1)}{2} & ,\ m\ \ impar \end{cases} . \qquad \textbf{(3.125)}$$

Funcţiile sal şi cal sunt trecute şi ele în tabelul 3.2.

Paley a introdus o nouă ordonare, adecvată prelucrărilor numerice. Exponenţii p_{nk} din relaţia (3.121) sunt chiar cifrele binare din reprezentarea numărului m:

$$p^p_{nk} = m_{k-1} \quad . \qquad (3.126)$$

Pentru n=3 se poate construi un tabel asemănător cu tabelul 3.2.

O ultimă ordonare cunoscută este cea a lui Hadamard în care exponenţii se aleg după regula:

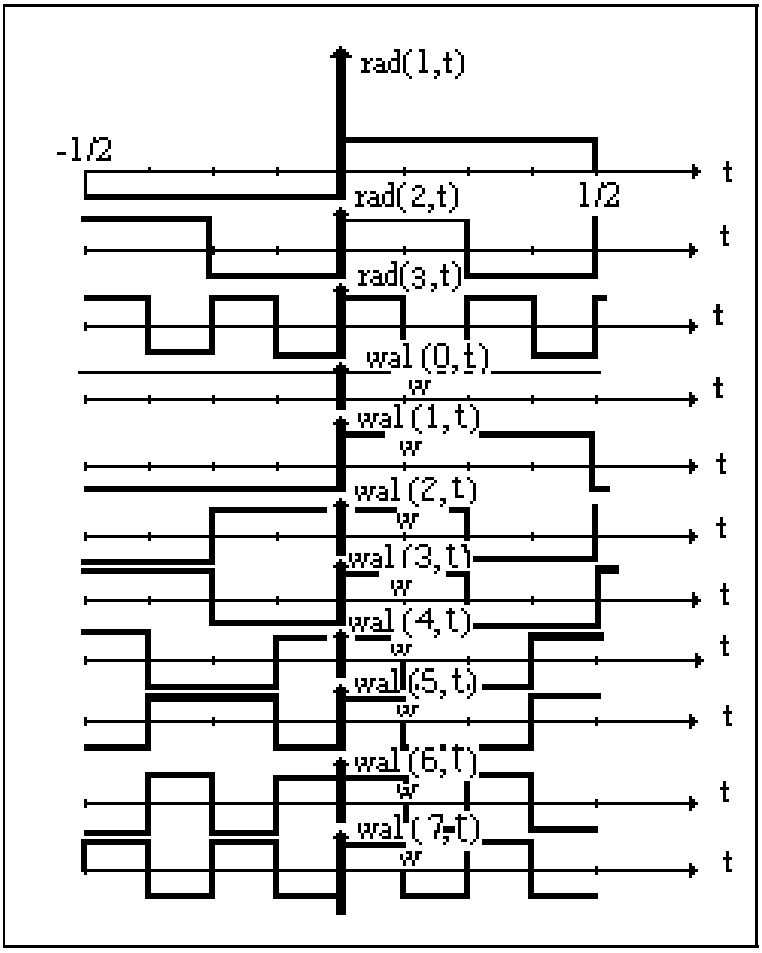


Fig. 3.18 Funcţiile rad(1,t) ÷ rad(3,t) şi wal_w(0,t) ÷ wal_w(7,t) .

$$p_{nk}^{h} = m_{n-k} \quad , \quad (3.127)$$

şi reprezintă cifrele binare ale lui m în succesiune inversă. Spre exemplu pentru n=3 şi m = 3 (cod 011) rezultă $p_{33}^{k} = m_{3-3} = m_0 = 1$, $p_{32}^{k} = m_1 = 1$ şi $p_{31}^{k} = m_3 = 0$. Rezultă $wal_h(3,t)$ = rad(3,t)rad(2,t) ş.a.m.d. Se poate întocmi şi în acest caz un tabel asemănător tabelului 3.2.

Norma tuturor funcţiilor prezentate este 1. Prin urmare, pentru orice semnal de energie finită x(t) şi durată limitată cuprinsă în intervalul [-1/2 , 1/2] avem:

$$c_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t)\,\mathrm{wal}(k,t)\,dt \qquad \textbf{(3.128)}$$

Calculul coeficienţilor c_k se face destul de uşor. Toate cele trei ordonări: w, p, h, se pot folosi în relaţiile (3.128).

<u>Funcţii Har</u> Aceste funcţii introduse de Haar formează un sistem ortonormal total (complet). Ele se notează cu har(r,m,t) şi sunt definite pe [0,1) prin:
unde

$$0 \le r < \log_2 N \;\; ; \;\; 1 \le m \le 2^r \;\; \text{iar} \;\; t \in [0,1) \;\; .$$

Se mai notează:

$$n = 2^r + m - 1 \quad , \qquad \textbf{(3.130)}$$

$$\mathrm{har}(0,0,t) = 1$$

$$\mathrm{har}(r,m,t) = \begin{cases} 2^{\frac{r}{2}} & , \quad \frac{m-1}{2^r} \le t < \frac{m-0{,}5}{2^r} \\ -2^{\frac{r}{2}} & , \quad \frac{m-0{,}5}{2^r} \le t < \frac{m+1}{2^r} \\ 0 & , \quad \textit{pentru rest} \end{cases} \qquad \textbf{(3.129)}$$

şi cu această notaţie funcţiile se scriu har(n,t).

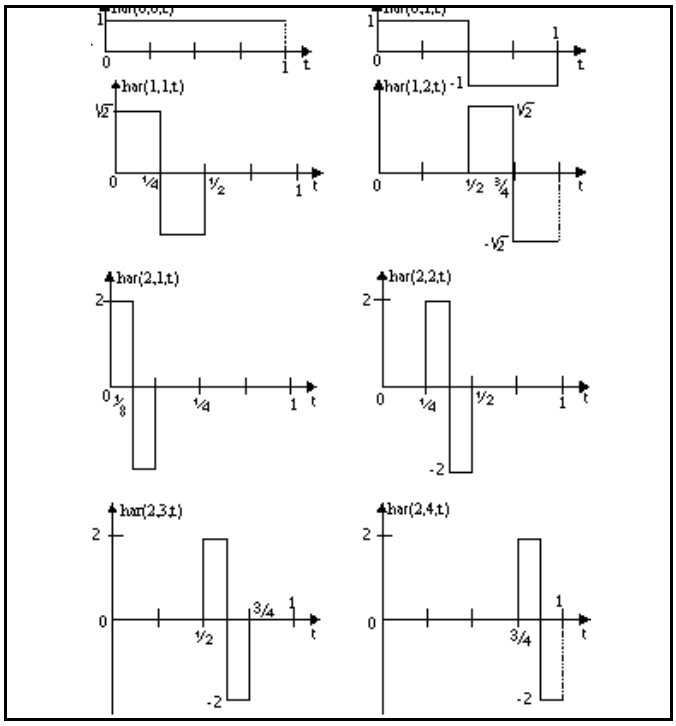


Fig. 3.19 Funcţii Haar pentru N=8.

În figura 3.19 sunt arătate funcţiile Haar pentru N=8. Se observă că funcţiile sunt mai bine localizate în timp, pe măsură ce ordinul lor creşte. Astfel har(0,0,t) şi har(0,1,t) determină doar variaţii lente în semnal. În schimb har(1,m,t) şi har(2,m,t) sunt capabile să localizeze din ce în ce mai bine detalii temporale. Astfel de proprietăţi, de modificare a rezoluţiei prin modificarea scălării timpului aparţin unei clase mai mari de semnale cunoscute sub denumirea de "undişoare" ("Ondelettes" în franceză sau "Wavelets" în engleză.

Orice funcţie din $L^2[0,1)$ poate fi descompusă după funcţiile lui Haar aplicând relaţia de calcul :

$$c_k = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{har}(k,t)\,dt \ ,$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\,\mathrm{har}(k,t) \ ; \qquad (3.131)$$

$$k = 2^r + m - 1 \quad .$$

Tabelul 3.1 Proprietăţile seriei Fourier exponenţiale

Semnalul periodic	Coeficienţii seriei Fourier exponenţiale
$x(t) = x(t+T)$	$\{c_k^x\}$
$y(t) = y(t+T)$	$\{c_k^y\}$
$a\,x(t) + b\,y(t)$	$\{a\,c_k^x + b\,c_k^y\}$
$x(t-t_o) \quad , \quad t_o \in \mathbb{R}$	$\{e^{-jk\omega_o t_o}\,c_k^x\} \qquad \omega_o = \frac{2\pi}{T}$
$e^{jk_o\omega_o t}\,x(t) \quad , \quad k_o \in Z,\ \omega_o = \frac{2\pi}{T}$	$\{c_{k-k_o}^x\}$
$x^*(t)$	$\{(c_{-k}^x)^*\}$
$x(-t)$	$\{c_{-k}^x\}$
$x(at) \quad ; \quad a \in R_+^*$ *perioada fiind T/a*	$\{c_k^x\}$
$\int_T x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$	$\{T c_k^x\,c_k^y\}$
$\frac{1}{T}\int_T x^*(\tau)\,y(t+\tau)\,d\tau$	$\{(c_k^x)^*\,c_k^y\}$

Semnalul periodic	Coeficienţii seriei Fourier exponenţiale
$x(t)\ y(t)$	$\{c_k^x * c_k^y\} = \{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{k-n}^x c_n^y\}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$\{jk\omega_o c_k^x\}$
$\int_0^t x(\tau)\,d\tau \quad c_o = 0\ !$	$\left\{\frac{c_k^x}{jk\omega_o}\right\}$
$x(t) \in \mathbb{R}$	$c_k^x = (c_{-k}^x)^*$ $\lvert c_k^x\rvert = \lvert c_{-k}^x\rvert\ ;\ Arg\, c_k^x = -Arg\, c_{-k}^x$ $Re\{c_k\} = Re\{c_{-k}\}\ ;\ Im\{c_k\} = -Im\{c_{-k}\}$
$x_p(t)\quad , x(t) \in \mathbb{R}$	$\{Re\{c_k^x\}\}$
$x_i(t)\quad , x(t) \in \mathbb{R}$	$\{jIm\{c_k^x\}\}$
$\frac{1}{T}\int_T \lvert x(t)\rvert^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k^x\rvert^2$	

Problema 1.

Determinaţi reprezentările în serie Fourier pentru fiecare dintre următoarele semnale:

a). $\cos\left[\pi\,\frac{(t-3)}{4}\right]$;

b). $\cos 2t + \sin 3t$;

c). *x(t) este un semnal periodic de perioadă 4 şi pentru* $t \in (-2, 2)$, $x(t) = e^{-2t}$.

Rezolvare:

a).

$$\cos\left[\pi\,\frac{(t-3)}{4}\right] = \frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}(t-3)} + \frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}(t-3)} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}t}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}; \quad c_{-1} = \frac{1}{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}; \quad \forall\, k \in Z - \{-1, 1\} \quad c_k = 0$$

b). $$\cos 2t + \sin 3t = \frac{1}{2}e^{j\cdot 2t} + \frac{1}{2}e^{-j\cdot 2t} + \frac{1}{2j}e^{j\cdot 3t} - \frac{1}{2j}e^{-j\cdot 3t}$$

$$\frac{2\pi}{T} = 1 \;\Rightarrow\; T = 2\pi$$

$$c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}; \quad c_3 = \frac{1}{2j}; \quad c_{-3} = -\frac{1}{2j};$$

c). $$c_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{-2t}\cdot e^{-j\cdot k\frac{\pi}{2}t}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{-\left(2+j\cdot k\frac{\pi}{2}\right)\cdot t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2+j\cdot k\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\int_{-2}^{2} d\left[e^{-\left(2+j\cdot k\frac{\pi}{2}\right)\cdot t}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\left(2+j\cdot k\frac{\pi}{2}\right)}\cdot e^{-\left(2+j\cdot k\frac{\pi}{2}\right)\cdot t}\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= -\frac{1}{4\left(2 + j \cdot k\frac{\pi}{2}\right)}\left[e^{-\left(2+j\cdot k\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2} - e^{\left(2+j\cdot k\frac{\pi}{2}\right)2} \right] =$$

$$= -\frac{1}{4\left(2 + j \cdot k\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left[e^{-4} \cdot e^{-j\cdot k\pi} - e^{4} \cdot e^{j\cdot k\pi} \right] =$$

$$= -\frac{1}{4\left(2 + j \cdot k\frac{\pi}{2}\right)} \left[e^{-4} - e^{4} \right] \cdot \cos(k\pi) = \frac{(-1)^{(k+1)} \cdot \left(e^{-4} - e^{4}\right)}{4\left(2 + j \cdot k\frac{\pi}{2}\right)}$$

Problema 2.

Determinați reprezentările în serie Fourier pentru semnalele din figura 2.1:

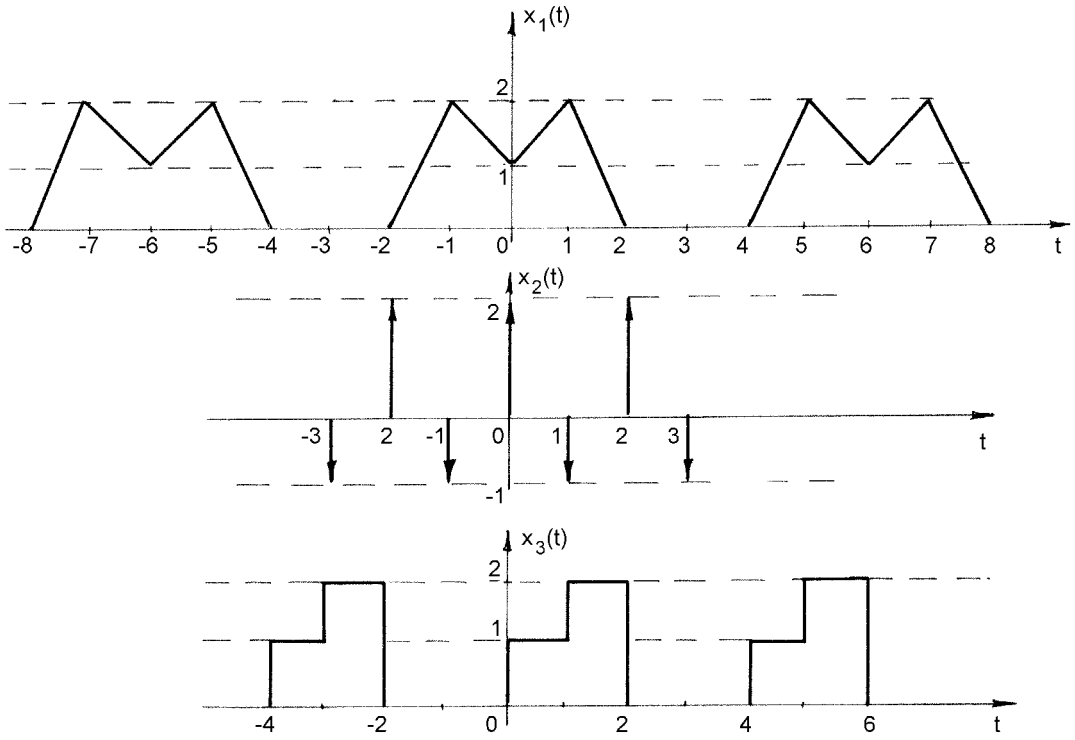


Fig.2.1. Formele de undă ale semnalelor de analizat.

Rezolvare:

a).

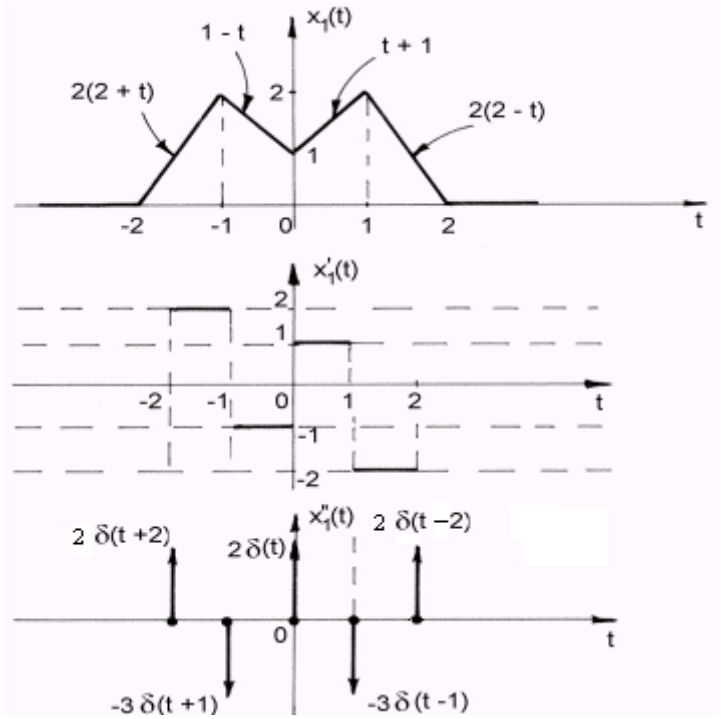


Fig.2.2. Primul semnal şi derivatele sale, până la un şir de distribuții Dirac.

$$c_{k\delta_T(t)} = \frac{1}{T}$$

$$x_1''(t) = 2\cdot\delta(t+2) - 3\cdot\delta(t+1) + 2\cdot\delta(t) - 3\cdot\delta(t-1) + 2\cdot\delta(t-2)$$

$$c_{k_{x_1''}} = 2\cdot c_{k_{\delta(t+2)}} - 3\cdot c_{k_{\delta(t+1)}} + 2\cdot c_{k_{\delta(t)}} - 3\cdot c_{k_{\delta(t-1)}} + 2\cdot c_{k_{\delta(t-2)}} =$$

$$= 2\cdot e^{j\frac{\pi}{3}\cdot 2}\cdot\frac{1}{6} - 3\cdot e^{j\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} - 3\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}\cdot 2}\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(2e^{j\frac{2\pi}{3}} - 3e^{j\frac{\pi}{3}} + 2 - 3e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$c_{k_{x1}} = \left[\left(j\cdot k\frac{\pi}{3}\right)^2\right]^{-1}\cdot c_{k_{x_1''}} \qquad k \neq 0$$

$$c_0 = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

b).

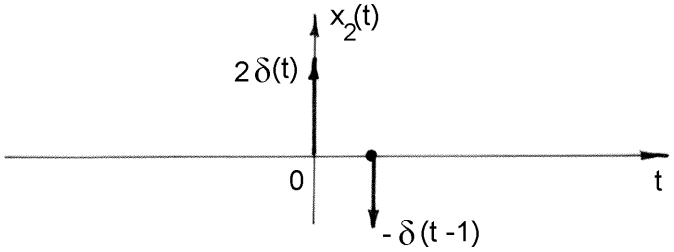


Fig.2.3. Forma de undă a semnalului de analizat.

$$c_{k_{x2}} = 2 \cdot c_{k_{\delta(t)}} - c_{k_{\delta(t-1)}} = 2 \cdot \frac{1}{2} - e^{-j \cdot k \frac{2\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[2 - (-1)^k\right]$$

c).

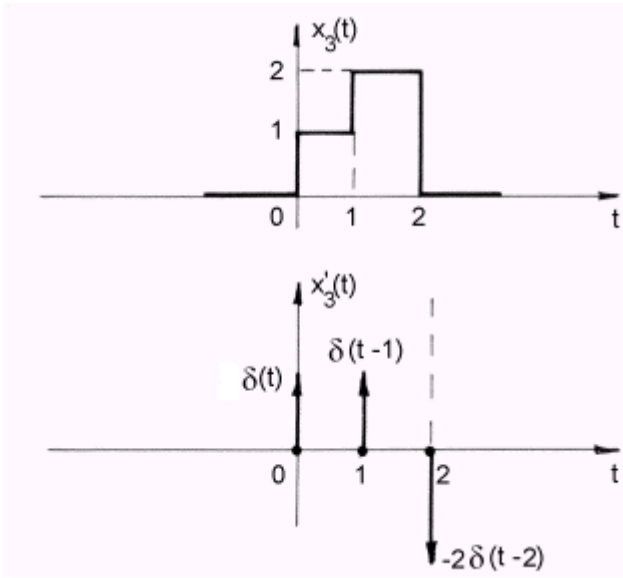


Fig.2.4 Formele de undă ale semnalului de analizat şi a derivatei sale.

$$c_{k_{x_3'}} = \frac{1}{4} - e^{-j \cdot k \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot e^{-j \cdot k\pi} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-j \cdot k \frac{\pi}{2}} - 2 \cdot e^{-j \cdot k\pi}\right)$$

$$c_{k_{x3}} = \frac{1}{j \cdot k \frac{2\pi}{4}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - e^{-j \cdot k \frac{\pi}{2}} - 2 \cdot e^{-j \cdot k\pi}\right) \qquad k \neq 0$$

$$c_{0_{x3}} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

Problema 3.

a). În figura următoare sunt prezentate caracteristicile de frecvență ale unui filtru. Determinați răspunsul acestuia la fiecare dintre semnalele de mai jos:

1). $x(t) = \cos(4\pi \cdot t + \varphi)$;

2). $x(t) = \cos(8\pi \cdot t + \varphi)$;

3). Semnalul obținut prin redresarea monoalternanță a semnalului $s(t) = \sin(4\pi \cdot t)$;

4). Semnalul obținut prin redresarea bialternanță a semnalului s(t).

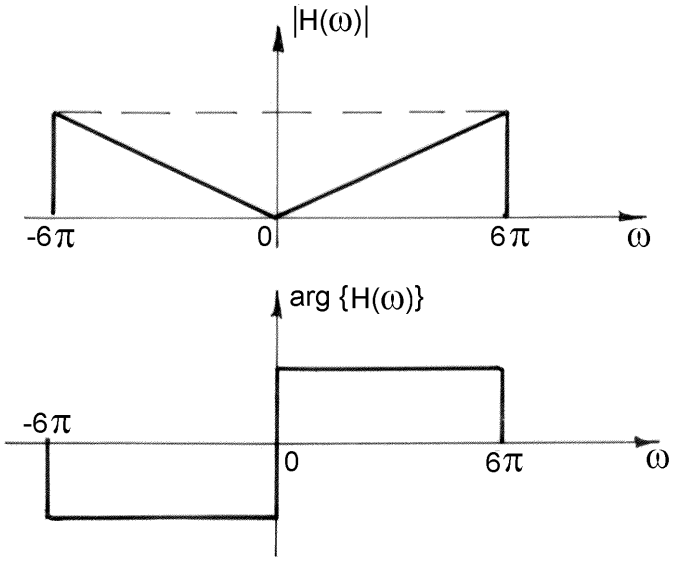


Fig. 3.1. Caracteristicile de frecvență ale filtrului considerat.

Rezolvare:

a). $x(t) = \sum_k c_{k_x} \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k c_{k_x} \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}(t-\tau)} \cdot h(\tau) \cdot d\tau =$$

$$= \sum_k c_{k_x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau \right) \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \sum_k c_{k_x} \cdot H\left(k\frac{2\pi}{T} \right) \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Dacă se face notația $c_{k_y} = c_{k_x} \cdot H\left(k\frac{2\pi}{T} \right)$ *se obține:*

$$c_{k_y} = c_{k_x} \cdot H\left(k\frac{2\pi}{T}\right)$$

1). $x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j(4\pi \cdot t+\varphi)} + e^{-j(4\pi \cdot t+\varphi)}\right] = \frac{1}{2}e^{j\varphi} \cdot e^{j4\pi \cdot t} + \frac{1}{2}e^{-j\varphi} \cdot e^{-j4\pi \cdot t}$

$$c_{1_x} = \frac{1}{2}e^{j\varphi}; \qquad c_{-1_x} = \frac{1}{2}e^{-j\varphi};$$

$$|H(4\pi)| = \frac{2}{3}, \qquad \arg\{H(4\pi)\} = \frac{\pi}{2};$$

$$|H(-4\pi)| = \frac{2}{3}, \qquad \arg\{H(-4\pi)\} = -\frac{\pi}{2};$$

$$c_{1_y} = \frac{2}{3}e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2}e^{j\varphi} = \frac{1}{3}e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)};$$

$$c_{-1_y} = \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2}e^{-j\varphi} = \frac{1}{3}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)};$$

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} \cdot e^{j4\pi \cdot t} + \frac{1}{3}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} \cdot e^{-j4\pi \cdot t}$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j; \qquad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j;$$

$$y(t) = \frac{1}{3}j \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j4\pi \cdot t} - \frac{1}{3}j \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j4\pi \cdot t} = \frac{1}{3}j\left[2j \cdot \sin(4\pi \cdot t + \varphi)\right] =$$

$$= -\frac{2}{3}\sin(4\pi \cdot t + \varphi)$$

2). $H(8\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0$

3). Variaţia temporală a semnalului $s(t) = \sin(4\pi \cdot t)$ *este reprezentată în figura 3.2.a, iar cea a semnalului obţinut prin redresarea monoalternanţă a lui s(t) are forma din figura 3.2.b.*

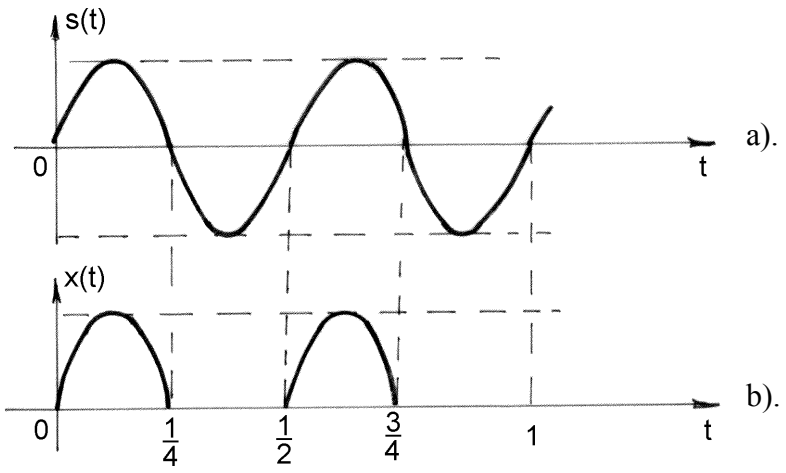


Figura 3.2. Forma de undă a semnalului de intrare din cazul 3.

$$c_{k_x} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{4}} \sin(4\pi t)\cdot e^{-jk4\pi t}dt = \frac{2}{2j}\left[\int_0^{\frac{1}{4}} e^{j4\pi(1-k)t}dt - \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-j4\pi(1+k)t}dt\right] =$$

$$= (-j)\left[\frac{1}{4\pi j(1-k)}\int_0^{\frac{1}{4}} d\left(e^{j4\pi(1-k)t}\right) + \frac{1}{4\pi j(1+k)}\int_0^{\frac{1}{4}} d\left(e^{-j4\pi(1+k)t}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{1-k}\left[e^{j\pi(1-k)}-1\right] + \frac{1}{1+k}\left[e^{-j\pi(1+k)}-1\right]\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{j\pi}\cdot e^{-j\pi k}}{1-k} - \frac{1}{1-k} + \frac{e^{-j\pi}\cdot e^{-j\pi k}}{1+k} - \frac{1}{1+k}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-(-1)^k}{1-k} - \frac{1}{1-k} + \frac{-(-1)^k}{1+k} - \frac{1}{1+k}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1+(-1)^k}{1-k} + \frac{1+(-1)^k}{1+k}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\left(1-k^2\right)}\left[1+(-1)^k\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\left(1-k^2\right)}, & k = 2p, \\ 0, & k = 2p+1,\ k \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$c_{1_x} = \frac{1}{j}\left[\frac{1}{4} - \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-j8\pi t}dt\right] = \frac{1}{j}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{j8\pi}\int_0^{\frac{1}{4}} d\left(e^{-j8\pi t}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4j}\left[1 + \frac{1}{2\pi}\left(e^{-j2\pi} - 1\right)\right] = \frac{1}{4j}$$

$$c_{-1_x} = \frac{1}{j}\left[\int_0^{\frac{1}{4}} e^{j8\pi t}\,dt - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{j}\left[\frac{1}{j8\pi}\int_0^{\frac{1}{4}} d\left(e^{j8\pi t}\right) - \frac{1}{4}\right] = -\frac{1}{4j}$$

$$c_{0_x} = \frac{1}{2\pi}$$

$$|H(4\pi)| = \frac{2}{3}; \quad \arg\{H(4\pi)\} = \frac{\pi}{2}; \quad |H(-4\pi)| = \frac{2}{3}; \quad \arg\{H(-4\pi)\} = -\frac{\pi}{2};$$

$$c_{1_y} = \frac{2}{3}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4j} = \frac{1}{6j}\cdot j = \frac{1}{6}$$

$$c_{-1_y} = \frac{2}{3}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{4j}\right) = -\frac{1}{6j}\cdot(-j) = \frac{1}{6}$$

$$y(t) = \frac{1}{6}\cdot e^{j4\pi t} + \frac{1}{6}\cdot e^{-j4\pi t} = \frac{1}{3}\cdot\cos(4\pi t)$$

4). Variaţia temporală a semnalului obţinut prin redresarea bialternanţă a lui s(t) are forma din figura 2.5.3.c.

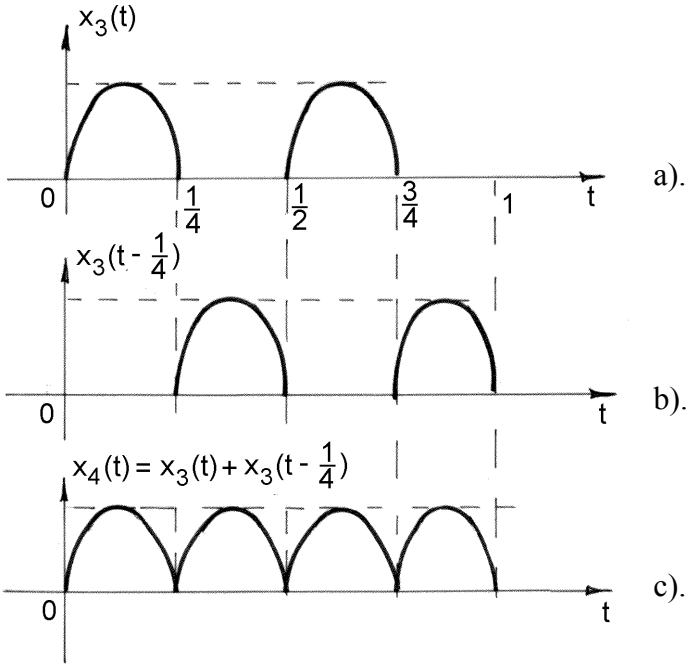


Figura 3.3. Forma de undă a semnalului de intrare din cazul 4.

$$c_{k_{x4}} = c_{k_{x3}} + c_{k_{x3\left(t-\frac{1}{4}\right)}} = c_{k_{x3}}\left[1 + e^{-jk\pi}\right] = c_{k_{x3}}\left[1 + (-1)^k\right]$$

$$c_{1_{x4}} = 0; \qquad c_{-1_{x4}} = 0; \qquad y(t) = 0$$

4. TRANSFORMAREA FOURIER A SEMNALELOR DEFINITE ÎN TIMP CONTINUU 172
4.1 Transformarea Fourier. Reprezentări spectrale 172
4.1.1 Transformarea Fourier a semnalelor funcţii din L^1 . . . 178
4.1.2 Transformarea Fourier inversă a semnalelor funcţii din L^1 186
4.1.3 Transformarea Fourier a semnalelor funcţii din L^2 . . . 191
4.1.4 Transformarea Fourier inversă a semnalelor funcţii din L^2 194
4.1.5 Exemple de transformate Fourier 198
Tabelul 4.1 Extreme locale ale funcţiei sinus integral 207
4.1.6 Transformarea Fourier pentru distribuţii 208
4.1.7 Transformata Fourier a semnalelor periodice 218
4.1.8 Proprietăţi spectrale ale semnalelor 221
4.2 Răspunsul în frecvenţă al sistemelor liniare şi invariante în timp 236
4.2.1 Calculul răspunsului unui sistem liniar şi invariant în timp la un semnal de intrare periodic 237
4.2.2 Calculul răspunsului unui sistem liniar şi invariant în timp caracterizat printr-o ecuaţie diferenţială liniară şi cu coeficienţi constanţi 239
4.2.3 Reprezentarea caracteristicilor de frecvenţă 242
4.2.4 Sisteme de ordinul întâi 245
4.2.5 Sisteme de ordinul doi 249
4.2.5 Alte tipuri de sisteme 257
4.3 Funcţii de corelaţie 264
4.3.1 Funcţia de corelaţie. Densitatea spectrală de putere şi energie 264
4.3.2 Funcţia de intercorelaţie pentru semnale de putere finită 272
4.3.3 Trecerea semnalelor de putere medie finită prin sisteme liniare şi invariante în timp 275
4.3.4 Funcţia de intercorelaţie pentru semnalele de energie finită 276
4.3.5 Trecerea semnalelor de energie finită prin sisteme liniare şi invariante în timp 279
Tabelul 4.2. Proprietăţile transformării Fourier în timp continuu . 282
Tabelul 4.3. Perechi semnal - transformată Fourier 283

4. TRANSFORMAREA FOURIER A SEMNALELOR DEFINITE ÎN TIMP CONTINUU

4.1 Transformarea Fourier. Reprezentări spectrale

Pentru început vom introduce transformarea Fourier într-o manieră euristică. Deşi lipsită de rigoare, ea ne permite formarea unei vederi de ansamblu. Fie semnalul periodic $\tilde{x}(t)$ din figura 4.1. Expresia sa într-o perioadă este:

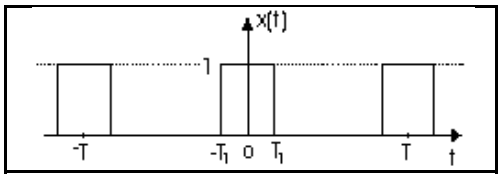


Fig. 4.1 Undă rectangulară periodică.

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1 \ , & |t| \le T_1 \\ 0 \ , & T_1 < |t| \le \dfrac{T}{2} \end{cases} \ . \qquad \textbf{(4.1)}$$

şi avem, evident, $\tilde{x}(t)=\tilde{x}(t+kT)$. Coeficienţii Fourier c_k se calculează aplicând relaţia (3.90):

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_o t}dt = \frac{e^{-jk\omega_o t}}{jk\omega_o T}\Bigg|_{T_1}^{-T_1} = \frac{e^{jk\omega_o T_1} - e^{-jk\omega_o T_1}}{jk2\pi} = \frac{2j\sin(k\omega_o T_1)}{2jk\pi} \qquad \textbf{(4.2)}$$

$$c_k = \frac{\sin(k\omega_o T_1)}{k\pi} \quad ; \quad k \neq 0 \ .$$

Coeficientul c_0 , k = 0 , rezultă direct:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2\cdot T_1}{T} \ . \qquad \textbf{(4.3)}$$

Se poate observa că toţi coeficienţii c_k pot fi scrişi sub forma:

$$Tc_k = \frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\Bigg|_{\omega = k\omega_o} \qquad k \neq 0 \quad si \quad Tc_0 = 2T_1 \ . \qquad \textbf{(4.4)}$$

Produsul dintre perioada T şi c_k, Tc_k, poate fi obţinut prin eşantionarea funcţiei:

$$X(\omega) = \frac{2\sin\omega T_1}{\omega} \qquad \textbf{(4.5)}$$

în punctele $k\omega_o$. În $\omega = 0$,

$$\lim_{\omega \to 0} X(\omega) = 2T_1 = Tc_0$$

Prin urmare şi produsul Tc_0 poate fi obţinut prin eşantionarea lui $X(\omega)$ în

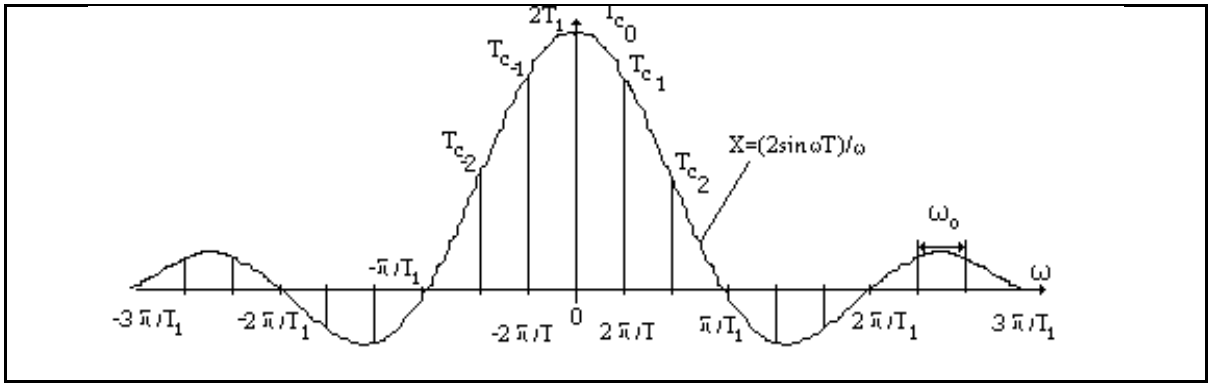


Fig. 4.2 Produsele Tc_k pentru semnalul din figura 4.1 se pot obţine eşantionând funcţia înfăşurătoare $X(\omega)=2\sin(\omega T_1)/\omega$.

origine.

În figura 4.2 se poate vedea graficul înfăşurătoarei $X(\omega)$ dat de relaţia (4.5) precum şi modul de obţinere al produselor Tc_k . Funcţia $X(\omega)$ are un maxim în origine de mărime $2T_1$ şi se anulează în punctele $\omega_n = n\cdot\pi/T_1$, $n \neq 0$. Distanţa între două linii Tc_k consecutive este $\omega_o = 2\pi/T$. Dacă $m\omega_o = n\cdot\pi/T_1$ sau $2mT_1 = nT$ are soluţii întregi: $m, n \in Z$, atunci anumiţi coeficienţi ai dezvoltării sunt nuli. Pentru un factor de umplere 0,5 avem $2T_1 = T/2$ şi se produce anularea tuturor armonicelor pare (2, 4, ...).

Dacă T_1 este o constantă şi se modifică doar T (perioada), forma înfăşurătoarei $X(\omega)$ nu este afectată. Crescând T, produsele Tc_k se obţin eşantionând mai des înfăşurătoarea. Ca o consecinţă a faptului că produsele Tc_k sunt mărginite superior, pe măsură ce T creşte, coeficienţii c_k scad.

În figura 4.3. se poate urmări apropierea liniilor Tc_k odată cu creşterea perioadei T. La limită, atunci când $T \to \infty$, liniile Tc_k ocupă continuu întreaga suprafaţă de sub curbă iar coeficienţii c_k devin infinit mici. Semnalul din figura 4.1 se reduce numai la semnalul aperiodic corespunzător impulsului centrat pe origine.

Raţionamentul efectuat pe acest exemplu ne-a arătat că seria armonică a unui semnal aperiodic nu poate fi compusă decât din semnale armonice infinit apropiate ca frecvenţă şi de amplitudini infinit mici.

Fie acum x(t) un semnal aperiodic, de orice formă, dar de durată limitată la $[-T_1,T_1]$ şi fie periodizatul său $\tilde{x}(t)$ cu perioada $T > 2T_1$. Avem relaţia evidenta:

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) \ , & |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0 \ , & \hat{i}n \ rest \end{cases} . \qquad \textbf{(4.6)}$$

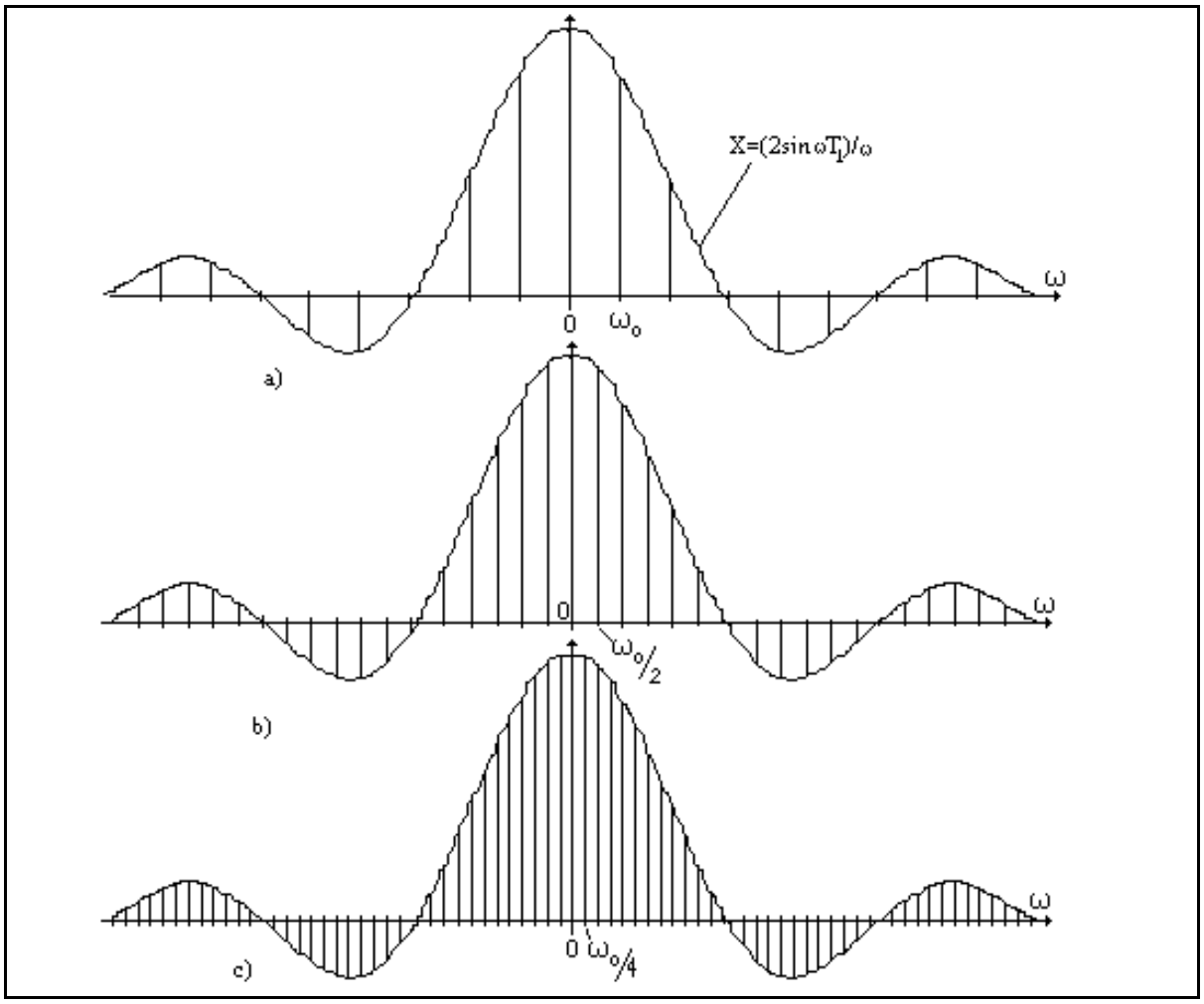


Fig. 4.3 X(ω) este eşantionat cu pasul (a) $\omega_0=2\pi/T$; (b) $\omega_0/2$; (c) $\omega_0/4$.

Pentru semnalul periodic $\tilde{x}(t)$ se scriu relaţiile:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_o t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_o t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_o t}dt \ ,$$

în care limitele de integrare s-au putut extinde la ±∞ ca urmare a faptului că x(t) are suportul mărginit.

Introducând notaţia:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad , \tag{4.7}$$

coeficienţii c_k se scriu sub forma:

$$c_k = \frac{1}{T} X(k\omega_o) \quad . \tag{4.8}$$

Ecuaţia de reconstruire a semnalului $\tilde{x}(t)$ este:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(k\omega_o) e^{jk\omega_o t} \quad ,$$

şi dacă se are în vedere că $\omega_o T = 2\pi$:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_o) e^{jk\omega_o t} \omega_o \quad . \tag{4.9}$$

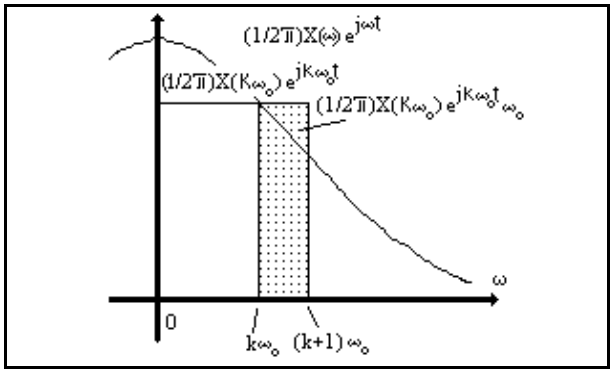


Fig. 4.4 Un termen al sumei (4.9) reprezintă o arie. Suma întreagă aproximează aria de sub curbă.

Deşi figura 4.4 nu este tocmai corectă ea reprezentând mărimea $X(k\omega_o)e^{jk\omega_o t}$, în general complexă, deci având modul şi fază, ea poate servi la interpretarea relaţiei (4.9) şi mai ales a procesului de trecere la limită.

Se observă că fiecare termen al sumei (4.9) este o arie şi pe măsură ce ω_o scade, aria devine mai mică dar suma (4.9) aproximează tot mai bine aria de sub curbă. Rezultă deci:

$$\lim_{\omega_o \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_o) e^{jk\omega_o t} \omega_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad .$$

Dar $\omega_o \to 0$ înseamnă că $T \to \infty$ sau că $\tilde{x}(t) \to x(t)$. Am obţinut relaţiile:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad \textbf{(4.7)}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad \textbf{(4.10)}$$

Funcţia X(ω) poartă denumirea de **funcţie de densitate spectrală a semnalului x(t)** sau simplu, **spectrul semnalului x(t)**. Prima relaţie este o relaţie de analiză iar a doua o relaţie de reconstruire din densitatea spectrală. Vom scrie:

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \quad ,$$

deşi nu ştim încă în ce condiţii sunt valabile relaţiile anterioare. Se mai utilizează notaţiile $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)$ şi se spune că spectrul este transformata Fourier a semnalului precum şi $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t)$, şi se spune că semnalul este transformata Fourier inversă a spectrului. Raţionamentul făcut şi ilustrat în figura 4.3 ne-a putut convinge că spectrul unui semnal aperiodic este continuu, spre deosebire de spectrele semnalelor periodice care sunt discrete. În cele ce urmează vom studia condiţiile de existenţă ale transformatei şi ale transformatei inverse pe clase de semnale (funcţii) şi vom deduce proprietăţiile transformării. Acest lucru e necesar, deoarece nu toate semnalele au durată finită şi nu sunt clare condiţiile de convergenţă atunci când s-a trecut la limită.

Valoarea principală Cauchy a unei integrale improprii

În studiul transformării Fourier intervine uneori noţiunea de "valoare principală Cauchy" a unei integrale pentru anumite integrale improprii. Vom reaminti sensul acestei noţiuni. Fie spre exemplu funcţia f(t) = 1/t. Ea nu este integrabilă pe intervalul [-a, a] deoarece are în origine o discontinuitate de speţa a doua (un pol). Dacă însă se defineşte integrala prin:

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon > 0}} \left[\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{dt}{t} + \int_{\epsilon}^{a} \frac{dt}{t} \right] \quad ,$$

atunci valoarea ei este nulă deoarece:

$$\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{dt}{t} = \ln\frac{\epsilon}{a} \; ; \; \int_{\epsilon}^{a} \frac{dt}{t} = \ln\frac{\epsilon}{a} = -\ln\frac{a}{\epsilon} \; .$$

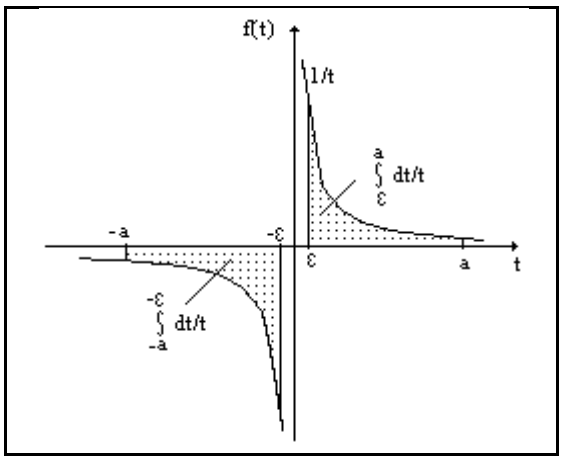


Fig. 4.5 Suma celor două integrale este mereu nulă.

În figura 4.5 se ilustrează noţiunea de valoare principală. Se observă că dacă tindem spre zero în mod simetric, atunci cele două arii, mereu egale (după cum a rezultat şi din calcul) se compensează reciproc aşa că suma celor două integrale este nulă, în consecinţă şi limita ei este nulă. Dar, prin definiţie:

$$VP\int_{-a}^{a} \frac{dt}{t} = \lim_{\epsilon->0}\left[\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{dt}{t} + \int_{\epsilon}^{a} \frac{dt}{t}\right] \; ,$$

şi deci valoarea principală Cauchy a integralei este nulă.

Un alt caz de integrală improprie fără sens este $\int_{-\infty}^{\infty} t\,dt$. În sensul lui Cauchy această integrală are valoare principală definită prin:

$$VP\int_{-\infty}^{\infty} t\,dt = \lim_{R->\infty}\int_{-R}^{R} t\,dt = \lim_{R->\infty} \frac{t^2}{2}\Big|_{-R}^{R} = 0 \; .$$

În transformarea Fourier, ca şi în alte transformări integrale se efectuează integrări pe o dreaptă, un contur deschis. Acest contur deschis poate fi închis pe la infinit cu un semicerc C(0, R) , R —> ∞ . Dacă integrala pe acest semicerc este nulă atunci integrala pe conturul deschis este egală cu cea pe conturul închis, care se calculează aplicând metoda reziduurilor. Condiţia în care o integrală de forma $\lim_{R->\infty} \int_C f(z)\, e^{jtz}\, dz$ este nulă se stabileşte prin lema lui Jordan:

Lema lui Jordan

Dacă f(x) este olomorfă în planul superior, 0 < argz < π , cu excepţia eventual a unui număr finit de poli, şi dacă ea tinde în mod uniform spre zero când z —> ∞, atunci pentru t > 0 :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C} f(z)e^{jtz}dz = 0 \quad , \tag{4.11}$$

unde C este semicercul din planul superior, arătat în figura 4.6.

Integrala pe conturul închis Γ - vezi figura - este, în condiţia lemei egală cu integrala pe conturul deschis [-R, R] atunci când R —> ∞ . Dar valoarea integralei pe conturul închis este calculabilă. Rămâne deci că:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)e^{jtz}dz = 2\pi j\sum_{k} rez\{f(z)\}_{z=z_k} + \pi j\sum_{n} rez\{f(z)\}_{z=z_n} \quad , \tag{4.12}$$

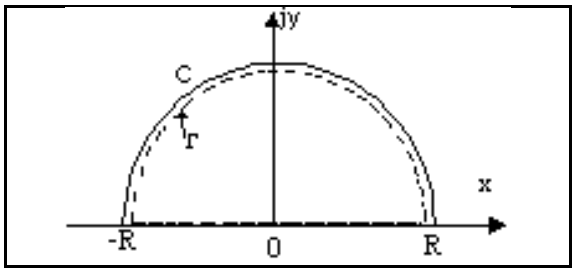


Fig. 4.6 Conturul Γ este compus din semicercul C şi axa -R, R.

z_k fiind reziduurile cu $Im\{z_k\} > 0$ iar z_n reziduurile cu $Im\{z_n\} = 0$. Analizând integrala (4.12) rezultă că ea reprezintă valoarea principală după Cauchy.

În cazul în care t < 0 , nu se schimbă nimic din condiţiile precedente atât doar că semiplanul superior se înlocuieşte cu cel inferior iar semicercul este luat în semiplanul inferior.

4.1.1 Transformarea Fourier a semnalelor funcţii din L^1

Pentru un semnal (funcţie) $x(t) \in L^1$, transformata sa Fourier este prin definiţie:

$$\mathcal{F}^1\{x(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad , \tag{4.13}$$

indicele superior "1" marcând în mod explicit clasa de semnale pe care este definit operatorul, $\mathcal{F}^1$, şi anume L^1. Convenim să acceptăm ca notaţie alternativă şi $X(\omega)$.

Ulterior vom renunţa la a marca explicit domeniul de aplicare al transformării şi în consecinţă transformarea în sine.

Integrala (4.13) este convergentă şi deci $X(\omega)$ există:

S-a obţinut că:

$$|X(\omega)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-j\omega t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt = \|x(t)\|_1 < \infty \quad . \qquad \textbf{(4.14)}$$

Se poate trage de aici concluzia că toate semnalele din L^1 au transformată Fourier. Este însă uşor de văzut că X(ω) nu este întotdeauna o funcţie din L^1. Spre exemplu, semnalul x(t) = σ(t+T) - σ(t-T) are transformata:

$$X(\omega) = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}d\omega = \frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\Big|_{T}^{-T} = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2\sin\omega T}{\omega}, \qquad \textbf{(4.15)}$$

care nu este din L^1 dar este din L^2. La fel, pentru $y(t) = e^{-\omega_o t}\,\sigma(t)$, $\omega_o > 0$, $y(t) \in L^1$ rezultă o transformată:

$$Y(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-(\omega_o + j\omega)t}dt = \frac{e^{-(\omega_o + j\omega)t}}{\omega_o + j\omega}\Big|_{\infty}^{0} = \frac{1}{\omega_o + j\omega} \quad , \qquad \textbf{(4.16)}$$

ce nu este din L^1 dar este din L^2. Această comportare a operatorului $\mathcal{F}^1 : L^1$ va cauza dificultăţi atunci când se va pune problema recuperării funcţiei x(t) din transformata sa.

<u>Proprietăţi ale transformatei Fourier $\mathcal{F}^1$</u>

1. <u>Liniaritatea</u> Operatorul este evident aditiv şi omogen (vezi definiţia sa) şi deci:

$$\mathcal{F}^1\{ax(t) + by(t)\}(\omega) = a\mathcal{F}^1\{x(t)\}(\omega) + b\mathcal{F}^1\{y(t)\}(\omega) \quad ,$$

sau, într-o scriere mai puţin pretenţioasă:

$$ax(t) + by(t) \longrightarrow aX(\omega) + bY(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.17)}$$

2. <u>Translaţia în domeniul timp</u> Se notează x(t) ⟶ X(ω) şi se caută transformata semnalului $x(t-t_o)$:

$$\mathcal{F}^1\{x(t-t_o)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_o)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau + t_o)}d\tau = e^{-j\omega t_o}X(\omega) \quad .$$

$$x(t-t_o) \longrightarrow e^{-j\omega t_o} X(\omega) \quad . \tag{4.18}$$

Dar $X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\Phi(\omega)}$ şi deci spectrul, sau densitatea spectrală a unui semnal, are un spectru de modul, $|X(\omega)|$ şi un spectru de fază $\Phi(\omega) = \text{Arg}\{X(\omega)\}$. Prin deplasarea în timp a semnalului nu se modifică modulul spectrului (spectrul de modul) $|e^{-j\omega t_o} X(\omega)| = |X(\omega)|$ ci numai faza spectrului (spectrul de fază).

3. <u>Modularea în domeniul timp</u> Prin multiplicarea semnalului $x(t) \in L^1$, cu exponenţiala $e^{j\omega_o t}$ se obţine semnalul $x(t)\, e^{j\omega_o t}$. Spectrul său este:

$$\mathcal{F}^1\{x(t)e^{j\omega_o t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega_o t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega-\omega_o)t} dt = X(\omega-\omega_o) \tag{4.19}$$

$$e^{j\omega_o t} x(t) \longrightarrow X(\omega - \omega_o) \quad .$$

Modularea produce o deplasare a spectrului pe axa frecvenţelor.

4. <u>Scalarea variabilei timp</u> S-a văzut în capitolul 1 că semnalul x(at) cu $|a| > 1$ este cu derulare mai rapidă decât x(t) iar pentru $0 < |a| < 1$ el are o derulare mai lentă decât x(t). Transformata sa Fourier, în ipoteza că $x(t) \in L^1$, este:

$$\mathcal{F}^1\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt \quad .$$

Se notează at = τ . Iacobianul transformării fiind $|a|$, rezultă:

$$\mathcal{F}^1\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad . \tag{4.20}$$

Este de remarcat că pentru $a > 1$, semnal cu derulare mai rapidă, se obţine o "derulare mai lentă" a spectrului ($a^{-1} < 1$) ceea ce echivalează cu o lărgire a spectrului. Efectul scalării timpului este exact contrar în domeniul spectrului faţă de efectul în domeniul timpului.

5. <u>Conjugarea complexă a semnalului</u> Fie $x(t) \in \mathbb{C}$, $x(t) \in L^1$. Spectrul conjugatului său este:

$$\mathcal{F}^1\{x^*(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)e^{-j\omega t}dt=\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j(-\omega)t}dt\right]^*=X^*(-\omega)=\check{X}^*(\omega) \quad \textbf{(4.21)}$$

$$x^*(t) \longrightarrow X^*(-\omega) \quad .$$

Conjugarea semnalului atrage după sine reflectarea şi conjugarea spectrului.

6. **Reflectarea în timp a semnalului** Aplicând proprietatea 4 pentru a = -1 se obţine imediat că:

$$x(-t) \longrightarrow X(-\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.22)}$$

7. **Derivarea semnalului** Fie semnalul x(t) $\in$ L^1 continuu şi derivabil şi cu derivata x'(t) $\in$ L^1. Este vorba de restrângerea clasei funcţiilor din L^1 la acelea a căror derivată revine în L^1. Cum x'(t) $\in$ L^1, există transformata sa Fourier şi:

$$\mathcal{F}^1\{x'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}x'(t)e^{-j\omega t}dt = x(t)e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \quad .$$

Dar funcţiile din L^1 ce nu au suportul finit converg la zero atunci când argumentul tinde la infinit:

$$\lim_{t\to\pm\infty}|x(t)e^{-j\omega t}| = \lim_{t\to\pm\infty}|x(t)| = 0 \quad .$$

Rămâne deci proprietatea:

$$x'(t) \longrightarrow j\omega X(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.23)}$$

Se poate remarca că înmulţirea cu ω duce la accentuarea domeniului frecvenţelor mai mari din spectru.

8. **Integrarea semnalului** Fie y(t) $\in$ L^1 , $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)d\tau$, cu x(t) $\in$ L^1. Pentru ca y(t) să fie derivabilă este necesar ca x(t) să fie continuă. Atunci există y'(t) = x(t) $\in$ L^1. Dar, deoarece există y'(t) $\in$ L^1 se poate aplica proprietatea 7 si:

$$y'(t) \longrightarrow j\omega Y(\omega) \quad ; \quad x(t) \longrightarrow X(\omega) \quad .$$

Egalând spectrele jωY(ω) = X(ω) rezultă că:

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega} \quad .$$

Dar y(t) ∈ L^1 şi deci:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 0 \quad .$$

Se are în vedere că:

$$X(\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 0 \quad ,$$

sau X(0) = 0 şi în consecinţă Y(ω) există. Avem deci:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} \quad ; \quad (dacă \quad X(0) = 0) \quad . \qquad \textbf{(4.24)}$$

9. **<u>Convoluţia semnalelor (teorema convoluţiei)</u>** S-a văzut în capitolul 3 că pentru x(t), y(t) ∈ L^1, $x(t)*y(t) \in L_1$ şi deci există transformata Fourier a convoluţiei:

$$\mathcal{F}^1\{x(t)*y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}(x*y)(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int x(\tau)e^{-j\omega\tau}y(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}dtd\tau = \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}y(u)e^{-j\omega u}du \quad .$$

În concluzie:

$$x(t)*y(t) \longrightarrow X(\omega)\cdot Y(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.25)}$$

Spectrul convoluţiei a două semnale din L^1 este produsul spectrelor celor două semnale.

10. **<u>Derivarea spectrului</u>** Vom demonstra mai întâi că transformata Fourier a oricărui semnal x(t) ∈ L^1 este o funcţie continuă:

$$X(\omega+\Delta\omega)-X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\left(e^{-j\Delta\omega t}-1\right)dt$$

$$|X(\omega+\Delta\omega)-X(\omega)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,|e^{-j\Delta\omega t}-1|\,dt \quad .$$

În integrală $\Delta\omega$ este un parametru. Se trece la limită pentru $\Delta\omega \to 0$ şi obţinem:

$$\lim_{\Delta\omega\to 0} |X(\omega+\Delta\omega)-X(\omega)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,|\lim_{\Delta\omega\to 0} e^{-j\Delta\omega t}-1|\,dt = 0 \quad ,$$

deoarece integrandul devine la limită identic nul, exponenţiala tinzând la 1. Am dedus deci:

$$\lim_{\Delta\omega\to 0} X(\omega+\Delta\omega) = X(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.26)}$$

ceea ce înseamnă că transformata unei funcţii din L^1 este continuă.

Mărginirea transformatei rezultă din (4.14). Fiind continuă şi mărginită, ea are la ∞ o valoare finită. Vom căuta această valoare.

Cantitatea π/ω are dimensiuni de timp şi se poate translata x(t) cu π/ω . Conform proprietăţii 2 se poate scrie că:

$$x\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right) \longrightarrow e^{-j\omega\frac{\pi}{\omega}}X(\omega) = e^{-j\pi}X(\omega) = -X(\omega)$$

unde: $\qquad x(t) \longrightarrow X(\omega) \quad .$

Prin scădere şi ţinând seama de proprietatea 1 obţinem:

$$x(t) - x\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right) \longrightarrow 2X(\omega) \quad .$$

Rezultă că:

$$\mathcal{F}\left\{x(t)-x\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)-x\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right]e^{-j\omega t}dt = 2X(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t) - x\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\right]e^{-j\omega t}dt \quad .$$

În modul avem inegalitatea:

$$|X(\omega)| \le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t) - x\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\right|dt \quad .$$

Deoarece în integrală ω a devenit parametru, putem trece la limită pentru $|\omega| \to \infty$:

$$0 \le \lim_{|\omega|\to\infty}|X(\omega)| \le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t) - \lim_{|\omega|\to\infty}x\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\right|dt = 0 \quad ,$$

şi deci:

$$\lim_{\omega\to\pm\infty}X(\omega) = 0 \quad . \qquad \textbf{(4.27)}$$

În concluzie, spectrul unui semnal din L^1 este continuu, mărginit şi se anulează la infinit. Rezultă imediat şi faptul că suportul funcţiei densitate spectrală este nemărginit.

Această ultimă concluzie are o consecinţă importantă. Fie x(t) un semnal mărginit cu suport finit. El este din L^1 şi conform concluziei anterioare spectrul său nu are suportul mărginit.

Semnalele cu durată limitată au spectrul cu suportul nemărginit.

Spectrul fiind continuu, în anumite condiţii este şi derivabil. Dacă $x(t) \in L^1$ şi, în plus şi $tx(t) \in L^1$, atunci spectrul său se poate deriva, derivata fiind continuă:

$$\frac{X(\omega+\Delta\omega) - X(\omega)}{\Delta\omega} = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\frac{e^{-j\Delta\omega t} - 1}{\Delta\omega}dt$$

Dar Δω nu depinde de ω; el este un parametru şi se poate trece la limită în integrală. Rezultă:

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{X(\omega+\Delta\omega)-X(\omega)}{\Delta\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{e^{-jt\Delta\omega}-e^{-jt\cdot 0}}{\Delta\omega}dt \quad ,$$

sau:

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\frac{de^{-jt\omega}}{d\omega}\Big|_{\omega=0} d\omega = -j\int_{-\infty}^{\infty} t\,x(t)e^{-j\omega t}d\omega \quad .$$

Dar prin ipoteză $tx(t) \in L^1$ şi deci integrala reprezintă transformata sa Fourier. Se trece j în celălalt membru şi se ajunge la:

$$t\,x(t) \longrightarrow j\frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad . \qquad \textbf{(4.28)}$$

11. <u>Proprietăţi ale transformatelor (spectrelor) semnalelor reale</u> Dacă $x(t) \in L^1$ şi $x(t) \in \mathbf{R}$ atunci $x^*(t) = x(t)$. Avem:

$$x(t) \longrightarrow X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\Phi(\omega)}$$
$$x^*(t) \longrightarrow X^*(-\omega) \quad .$$

Pentru semnalul real rezultă egalitatea:

$$X(\omega) = X^*(-\omega) \quad , \qquad \textbf{(4.29)}$$

din care se deduc următoarele:

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \quad ; \quad \Phi(\omega) = -\Phi(-\omega) \qquad \textbf{(4.30)}$$
$$Re\{X(\omega)\} = Re\{X(-\omega)\} \; ; \; Im\{X(\omega)\} = -Im\{X(-\omega)\} \quad .$$

Modulul spectrului unei funcţii reale este par iar faza spectrului său este impară.

Tot pentru semnale reale se pot determina, aplicând proprietăţile demonstrate anterior, transformatele componentelor $x_p(t)$ şi $x_i(t)$.

În concluzie:

$$x_p(t) \longrightarrow Re\{X(\omega)\} = X_R(\omega) \qquad \textbf{(4.31)}$$
$$x_i(t) \longrightarrow j\,Im\{X(\omega)\} = j\,X_I(\omega) \qquad \textbf{(4.32)}$$

S-a utilizat notaţia simplificată, cu care spectrul se scrie $X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega)$.

12. <u>O teoremă gen Parseval pentru semnale din L^1</u> Deşi semnalele din L^1 nu sunt în general şi din L^2 şi deci nu se poate vorbi despre energia lor, şi în cazul acestor semnale se poate stabili o teoremă din aceeaşi categorie, fără însă ca ea să aibă o interpretare fizică imediată.

Pentru x(t), y(t) $\in$ L^1 există şi sunt egale integralele:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^1\{x(\omega)\}(t)\, y(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)\, \mathcal{F}^1\{y(t)\}(\omega)\, d\omega \quad . \qquad \textbf{(4.33)}$$

Membrul stâng se scrie aplicând teorema lui Fubini sub forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)\, e^{-jt\omega}\, d\omega\right] y(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)\, \mathcal{F}^1\{y(t)\}(\omega)\, d\omega \ .$$

şi astfel s-a stabilit relaţia (4.33).

13. <u>Relaţia dintre transformata Fourier a unui semnal aperiodic şi coeficienţii seriei Fourier exponenţiale ai semnalului obţinut prin periodizarea semnalului aperiodic</u>

Relaţia a fost stabilită deja pe cale intuitivă. Fie x(t) mărginită şi cu suport compact, supp x(t) $\subset$ [-T/2, T/2] , semnal ce este din L^1. Considerăm prelungirea sa periodică de perioadă T, $\tilde{x}$(t). Acesta admite dezvoltarea în serie cu coeficienţii c_k :

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\omega_o t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_o t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_o t}\, dt \quad ,$$

de unde rezultă:

$$c_k = \frac{1}{T} X(k\omega_o) \quad ; \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T} \quad . \qquad \textbf{(4.34)}$$

<u>4.1.2 Transformarea Fourier inversă a semnalelor funcţii din L^1</u>

Prelucrările ce vizează semnalele pot fi realizate fie în domeniul timp fie în domeniul frecvenţă. Este de la sine înţeles că vom adopta o variantă sau alta în funcţie de costul prelucrării. Pentru a putea valorifica prelucrările din domeniul frecvenţă e necesar să putem recupera un semnal din spectrul său, cel puţin aproape peste tot. După cum s-a văzut din cele două exemple date în paragraful anterior, nu toate semnalele din L^1 au spectrul din L^1 . De fapt semnalele cu care s-a exemplificat sunt şi din L^2 deci sunt din intersecţia $L^1 \cap L^2$. În ambele cazuri transformatele

Fourier nu au fost din L^1 ci au fost din L^2 .

Vom analiza în cele ce urmează condiţiile de convergenţă ale transformării Fourier inverse, pentru care, urmare a relaţiei (4.7) stabilite fără investigarea condiţiilor de existenţă, se are în vederea expresia:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{1}\{x(t)\}(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \quad . \qquad \textbf{(4.35)}$$

O funcţie reală şi pară θ(t) se numeşte "θ - factor" dacă $\theta(t) \in L^1$, $\mathcal{F}^1\{\theta(t)\} \in L^1$ şi $\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{1}\{\theta\}(\omega)\,d\omega = 2\pi$.

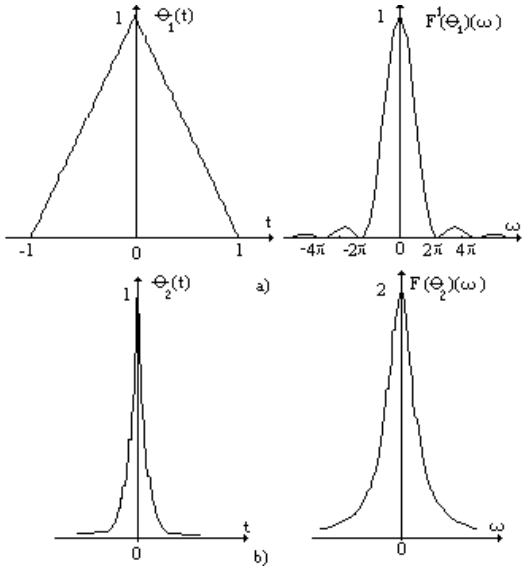


Fig. 4.7 (a) θ factorul lui Cesaro şi spectrul său; (b) θ factorul lui Abel şi spectrul său.

În figura 4.7 sunt prezentaţi doi astfel de θ - factori şi anume:

$$\theta_1(t) = \begin{cases} 1-|t| & , \ |t| \le 1 \\ 0 & , \ |t| > 1 \end{cases} \longrightarrow \mathcal{F}^{1}\{\theta_1\}(\omega) = \left(\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right)^2 \quad (Cesaro)$$

$$\theta_2(t) = e^{-|t|} \longrightarrow \mathcal{F}^{1}\{\theta_2\}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \qquad (Abel)$$

(4.36-37)

dar nu sunt singurii posibili.

Se defineşte "θ - media" integralei Fourier inverse (4.35) prin:

$$U(x;t;r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta\left(\frac{\omega}{r}\right)\mathcal{F}^{1}\{x(\tau)\}(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \quad , \quad r > 0 \quad . \qquad \textbf{(4.38)}$$

Dar, conform proprietăţii 2 de translaţie, relaţia (4.18), avem:

$$\mathcal{F}^{1}\{x(\tau + t)\} = \mathcal{F}^{1}\{x(\tau)\}e^{j\omega t} \quad ,$$

deoarece t este o constantă în raport cu τ , prima variabilă după care se determină transformata. Pentru clarificare se poate scrie:

$$\mathcal{F}^{1}\{x(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-j\omega(u-t)}du =$$
$$= e^{j\omega t}\mathcal{F}^{1}\{x(u)\} = e^{j\omega t}\mathcal{F}^{1}\{x(\tau)\} \quad .$$

Relaţia (4.38) devine:

$$U(x;t;r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta\left(\frac{\omega}{r}\right)\mathcal{F}^{1}\{x(\tau + t)\}(\omega)\,d\omega \quad , \quad r > 0 \quad ,$$

şi aplicând proprietatea 12, relaţia (4.33), obţinem:

$$U(x;t;r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{1}\left\{\theta\left(\frac{\omega}{r}\right)\right\}(\tau)\,x(\tau + t)d\tau \quad , \quad r > 0 \quad .$$

Acum avem în vedere proprietatea 4 de scalare a variabilei, relaţia (4.20) în care a = r > 0 , iar ω şi τ sunt inversate (dar numele variabilei nu contează):

$$\mathcal{F}^{1}\{\theta(\omega)\}(r\tau) = \frac{1}{r}\mathcal{F}^{1}\left\{\theta\left(\frac{\omega}{r}\right)\right\}(\tau) \quad .$$

Înlocuind această egalitate în relaţia de mai sus obţinem:

$$U(x;t;r) = \frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{1}\{\theta(\omega)\}(r\tau)\,x(\tau + t)d\tau \quad , \quad r > 0 \quad . \qquad \textbf{(4.39)}$$

Deoarece θ este o funcţie reală şi pară, transformata ei $\mathcal{F}^{1}\{\theta\}$ este reală, iar în

virtutea proprietăţilor 11, relaţiile (4.30), transformata este şi ea pară. Punând $\tau \rightarrow -\tau$, (4.39) devine:

$$U(x;t;r) = \frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{1}\{\theta(\omega)\}(r\tau)x(t-\tau)d\tau \quad , \qquad \textbf{(4.40)}$$

o integrală de convoluţie. Dar $\mathcal{F}^{1}\{\theta\} \in L^{1}$ şi $x \in L^{1}$ şi deci U există şi în plus $U \in L^{1}$.

Considerăm θ - factorul lui Abel:

$$\frac{r}{2\pi}\mathcal{F}^{1}\{\theta(\omega)\}(r\tau) = \frac{r}{2\pi}\cdot\frac{2}{1+(r\tau)^{2}} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{r}{1+r^{2}\tau^{2}} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1/r}{(1/r)^{2}+\tau^{2}} \quad .$$

Notând $1/r = \varepsilon$ se obţine:

$$\frac{1}{2\pi\epsilon}\mathcal{F}^{1}\{\theta(\omega)\}\left(\frac{\tau}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\epsilon}{\epsilon^{2}+\tau^{2}} \quad . \qquad \textbf{(4.41)}$$

Dar funcţia (4.41) nu este altceva decât un δ - şir ce converge (slab) spre $\delta(\tau)$ atunci când $\varepsilon \rightarrow 0$, ceea ce este echivalent cu $r \rightarrow \infty$. Privind U ca o funcţională avem:

$$U(x;t;\epsilon) = \left\langle \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\epsilon}{\epsilon^{2}+\tau^{2}} , x(t+\tau)\right\rangle \xrightarrow[\epsilon\rightarrow 0]{} \left\langle \delta(\tau) , x(t+\tau)\right\rangle = x(t) \quad .$$

Convergenţa slabă asigură o egalitate aproape peste tot. S-a ajuns deci la concluzia că:

$$\lim_{r\rightarrow\infty} U(x;t;r) = x(t) \qquad a.p.t. \quad . \qquad \textbf{(4.42)}$$

Este posibil să se arate şi direct, calculând norma în L^{1} că:

$$\lim_{r\rightarrow\infty} \| U(x;t;r) - x(t) \|_{1} = 0 \quad ,$$

obţinându-se concluzia că diferenţa se anulează la limită aproape peste tot. Se regăseşte şi pe această cale (4.42).

Dacă $\mathcal{F}^{1}\{x\} \in L^{1}$ utilizând în relaţia (4.38) θ - factorul lui Abel obţinem, trecând la limită pentru $r \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r\rightarrow\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\omega|}{r}} \mathcal{F}^{1}\{x\}(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{1}\{x\}(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad . \qquad \textbf{(4.43)}$$

Pentru semnalele din L^{1} a căror transformată este tot în L^{1} , este valabilă transforma-

rea inversă definită de integrala (4.35).

Dacă se trunchiază integrala din transformarea inversă la ± R , prin înmulţirea spectrului cu σ(ω+R) - σ(ω-R) , se obţine:

$$V(x;t;r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \mathcal{F}^{1}\{x\}(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sigma(\omega+R)-\sigma(\omega-R)\Big]\mathcal{F}^{1}\{x(\tau)\}(\omega)e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sigma(\omega+R)-\sigma(\omega-R)\Big]\mathcal{F}^{1}\{x(\tau+t)\}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{1}\{\sigma(\omega+R)-\sigma(\omega-R)\}(\tau)x(\tau+t)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\tau R}{\tau}x(\tau+t)d\tau \quad . \qquad \textbf{(4.44)}$$

Dar sin(Rτ)/τ este o funcţie pară în raport cu τ şi scriind integrala ca o sumă de integrale, de la -∞ la 0 şi de la 0 la ∞ , prin schimbarea de variabilă în prima se obţine:

$$V(x;t;r) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\Big[x(t+\tau)+x(t-\tau)\Big]\frac{\sin R\tau}{\tau}d\tau \quad . \qquad \textbf{(4.45)}$$

Se demonstrează că dacă într-un punct t_o se îndeplineşte condiţia lui Dini:

$$\int_{0}^{\epsilon}\left|\frac{x(t_o+\tau)+x(t_o-\tau)-2x(t_o)}{\tau}\right|d\tau < \infty \qquad \forall\, \epsilon > 0 \quad , \qquad \textbf{(4.46)}$$

atunci în acel punct:

$$\lim_{R\to\infty} V(x;t_o;R) = x(t_o) \quad . \qquad \textbf{(4.47)}$$

Dăm o **teoremă a lui Jordan**.

Dacă x(t) ∈ L^1 şi este cu variaţie mărginită într-un interval care include punctul t_o, atunci:

$$\lim_{R\to\infty} V(x;t_o;R) = \frac{x(t_{o+})+x(t_{o-})}{2} \quad , \qquad \textbf{(4.48)}$$

în semisumă intrând limitele laterale ale lui x în punctul t_o .

Este remarcabil faptul că, şi în cazul funcţiilor, apare ca urmare a trunchierii

fenomenul Gibbs. Asupra acestei probleme vom mai reveni.

Criteriul lui Jordan

Dacă x(t) ∈ L^1 şi este cu variaţie mărginită pe toată axa, atunci pentru ∀t ∈ R avem:

$$x(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathcal{F}^{-1}\{x(t)\}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad . \tag{4.49}$$

4.1.3 Transformarea Fourier a semnalelor funcţii din L^2

Pentru început vom presupune că x(t) ∈ $L^1 \cap L^2$. În aceste condiţii relaţia de transformare (4.13) rămâne valabilă. Şi semnalul y(t) = x*(-t) este tot din $L^1 \cap L^2$. Produsul de convoluţie $h(t) = x(t) * y(t) \in L_1$. Prin urmare i se poate aplica formula de inversiune (4.43):

$$h(t) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\omega|}{r}} \mathcal{F}^{-1}\{h\}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad ,$$

care în punctul t = 0 conduce la:

$$h(0) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\omega|}{r}} \mathcal{F}^{-1}\{h\}(\omega) d\omega \quad . \tag{4.50}$$

Dar conform teoremei de convoluţie rezultă:

$$\mathcal{F}^{-1}\{x * \check{x}^*\} = \mathcal{F}^{-1}\{x\}(\omega) \cdot \mathcal{F}^{-1}\{\check{x}^*\}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}\{x\}(\omega) \left[\mathcal{F}^{-1}\{x\}(\omega)\right]^* = \left|\mathcal{F}^{-1}\{x\}(\omega)\right|^2 ,$$

relaţii în care s-a ţinut cont şi de proprietăţile 5 şi 6.

Relaţia (4.50) se pune sub forma:

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(-\tau) d\tau = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\omega|}{r}} |X(\omega)|^2 d\omega \quad .$$

Dar y(-τ) = x*(τ) , şi trecând la limită în integrală, rezultă relaţia finală:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad . \qquad \textbf{(4.51)}$$

Ea reprezintă o relaţie de tip Parseval sau teorema Rayleigh a energiei. Se calculează în două moduri energia semnalului, utilizând o expresie în timp şi una în frecvenţă. Funcţia de frecvenţă $S(\omega) = |X(\omega)|^2$ se numeşte şi densitate spectrală de energie a semnalului x(t). Relaţia (4.51) arată că:

$$\|X(\omega)\|_2^2 = 2\pi \|x(t)\|_2^2 \quad , \qquad \textbf{(4.52)}$$

şi deci $\mathcal{F}^1\{x(t)\} = X(\omega) \in L^2$. S-a ajuns prin urmare la concluzia importantă că, atunci când semnalul $x(t) \in L^1 \cap L^2$, transformata sa Fourier este din L^2 .

Considerăm acum cazul $x(t) \in L^2$ dar $x(t) \notin L^1$. Vom recurge la metoda trunchierii semnalului x(t) prin multiplicare cu fereastra (poarta) temporală $p_\tau(t)=\sigma(t+\tau)-\sigma(t-\tau)$. Semnalul trunchiat $x(t)\cdot p_\tau(t) \in L^1 \cap L^2$ deoarece are suportul compact $[-\tau, \tau]$. Conform observaţiei (4.52) transformata sa, $\mathcal{F}^1\{x\cdot p_\tau\}$, este din L^2.

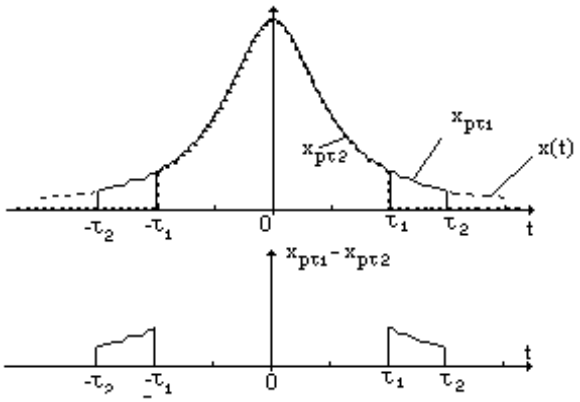


Fig. 4.8 Semnalul $x(t) \in L^2$ se trunchiază: $x\cdot p_\tau \in L^1$.

Se procedează la trunchierea semnalului x(t) cu două ferestre temporale având $\tau_1 > \tau_2$. Se obţin semnalele trunchiate $x\cdot p_{\tau 1} \in L^1 \cap L^2$ şi $x\cdot p_{\tau 2} \in L^1 \cap L^2$. Diferenţa lor $x\cdot p_{\tau 1} - x\cdot p_{\tau 1} \in L^1 \cap L^2$. În figura 4.8 se arată construcţia semnalului diferenţă.

Se aplică diferenţei teorema lui Parseval sub forma (4.52):

$$\left\| \mathcal{F}^1\{x\cdot p_{\tau 1}\} - \mathcal{F}^1\{x\cdot p_{\tau 2}\} \right\|_2^2 = 2\pi \left\| x\cdot p_{\tau 1} - x\cdot p_{\tau 2} \right\|^2 = \int_{-\tau_1}^{-\tau_2} |x(t)|^2 dt + \int_{\tau_2}^{\tau_1} |x(t)|^2 dt \ .$$

Dar atunci când $\tau_1 \to \infty$ şi $\tau_2 \to \infty$ cu $\tau_1 > \tau_2$, cele două integrale tind spre zero. Se poate deci afirma că:

$$\lim_{\tau_1, \tau_2 \to \infty} \left\| \mathcal{F}^1\{x\cdot p_{\tau 1}\} - \mathcal{F}^1\{x\cdot p_{\tau 2}\} \right\|_2 = 0 \quad , \qquad \textbf{(4.53)}$$

ceea ce înseamnă că, în norma din L^2 , transformata $\mathcal{F}^1$ tinde aproape peste tot spre o funcţie unică. Aceasta este prin definiţie transformata Fourier a semnalului $x(t) \in L^2$, notată cu $\mathcal{F}^2$:

$$\mathcal{F}^2\{x(t)\}(\omega) = \underset{\tau \to \infty}{l.\hat{i}.m.}\, \mathcal{F}^1\{x(t)\cdot p_\tau(t)\}(\omega) = \underset{\tau \to \infty}{l.\hat{i}.m.} \int_{-\tau}^{\tau} x(t) e^{-j\omega t} dt \ ,$$

(4.54)

unde reamintim că notaţia l.î.m. înseamnă "limită în medie pătratică". Se poate scrie utilizând limita obişnuită şi:

$$\lim_{\tau \to \infty} \left\| \mathcal{F}^2\{x(t)\} - \int_{-\tau}^{\tau} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\|_2 = 0 \ , \qquad \textbf{(4.55)}$$

relaţie ce poate şi ea servi ca definiţie a transformatei Fourier a funcţiilor din L^2 . Din relaţia (4.55) se vede că:

$$\left\| \mathcal{F}^2\{x(t)\} \right\|_2 = \lim_{\tau \to \infty} \left\| \int_{-\tau}^{\tau} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\|_2 < \infty \ ,$$

deoarece semnalul trunchiat are transformata de tip $\mathcal{F}^1$ din L^2 . Concluzia care se poate trage este că transformata Fourier $\mathcal{F}^2$ a semnalelor funcţii din L^2 este şi ea din L^2 : $\mathcal{F}^2 : \mathbf{L^2} \rightarrow \mathbf{L^2}$. Toate proprietăţile demonstrate pentru transformarea $\mathcal{F}^1$ rămân valabile şi pentru transformarea $\mathcal{F}^2$, inclusiv forma (4.33) a relaţiei de tip Parseval, evident numai aproape peste tot. Pentru transformarea $\mathcal{F}^2$ este valabilă relaţia Parseval (4.51) de exprimare a energiei, relaţie care nu este valabilă pentru semnale $x \in L^1$ dar $x \notin L^2$. În ceea ce priveşte proprietatea 9, teorema de convoluţie, este necesar ca unul din semnale să fie din L^1.

Un procedeu analitic de calcul al transformatei $\mathcal{F}^2$ a unui semnal $x(t) \in L^2$ este dat de relaţia :

$$\mathcal{F}^2\{x(t)\} = X(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t} - 1}{-jt} x(t)\, dt \ , \ \forall\, x(t) \in L^2 \ . \qquad \textbf{(4.56)}$$

Vom mai menţiona doar că în practica curentă se scrie doar $x(t) \longrightarrow X(\omega)$ fără a se mai specifica despre care anume transformată este vorba, $\mathcal{F}^1$ sau $\mathcal{F}^2$. Dar acest lucru rezultă din natura semnalului, motiv pentru care nu se obişnuieşte să se complice notaţiile, mai ales că proprietăţiile celor două transformate sunt practic

identice, cu câteva excepţii evidente şi care au şi fost semnalate.

4.1.4 Transformarea Fourier inversă a semnalelor funcţii din L^2

Deoarece operatorul $\mathcal{F}^2$ are calitatea $\mathcal{F}^2 : L^2 \longrightarrow L^2$, care nu se întâlneşte şi la operatorul $\mathcal{F}^1$, problema inversării transformatei este mult simplificată. Vom nota în cele ce urmează $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}$.

Dacă $x(t) \in L^2$ atunci $X(\omega) = \mathcal{F}\{x\} \in L^2$. Dar şi $X^*(\omega) = \mathcal{F}^*\{x\} \in L^2$. În consecinţă există $\mathcal{F}\{\mathcal{F}^*\{x\}(\omega)\}(t) \in L^2$. Vom arăta că funcţia $2\pi x^*(t) - \mathcal{F}\{X^*(\omega)\}(t)$ are norma în L^2 nulă:

$$\left\|2\pi x^* - \mathcal{F}\{X^*(\omega)\}\right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(2\pi x^*(t) - \mathcal{F}\{X^*(\omega)\}(t)\right)\left(2\pi x(t) - \mathcal{F}^*\{X^*(\omega)\}(t)\right)dt =$$

$$= 4\pi^2 \|x(t)\|_2^2 - 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\,\mathcal{F}^*\{X^*(\omega)\}(t)\,dt - 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathcal{F}\{X^*(\omega)\}(t)\,dt + \left\|\mathcal{F}\{X^*(\omega)\}(t)\right\|_2^2 .$$

(4.57)

Dar, conform teoremei lui Parseval (4.52), aplicată de două ori, rezultă:

$$\left\|\mathcal{F}\{X^*(\omega)\}(t)\right\|_2^2 = 2\pi\left\|X^*(\omega)\right\|_2^2 = 2\pi\left\|X(\omega)\right\|_2^2 = 2\pi \cdot 2\pi \|x(t)\|_2^2 = 4\pi^2 \|x(t)\|_2^2 .$$

(4.58)

Pentru termenii de mijloc din relaţia (4.57) vom aplica relaţia (4.33) care rămâne valabilă şi pentru $x(t) \in L^2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathcal{F}\{X^*(\omega)\}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)\,X^*(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,X^*(\omega)\,d\omega = \left\|X(\omega)\right\|_2^2 ,$$

şi ţinând seama de (4.56) avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathcal{F}\{X^*(\omega)\}(t)\,dt = 2\pi \|x(t)\|_2^2 . \qquad \textbf{(4.59)}$$

Celălalt termen este conjugatul primului :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\,\mathcal{F}^*\{X^*(\omega)\}(t)\,dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathcal{F}\{X^*(\omega)\}(t)\,dt\right)^* = \left(2\pi\,\|x(t)\|_2^2\right)^* = 2\pi\,\|x(t)\|_2^2 \ .$$

(4.60)

Se substituie (4.58), (4.59) şi (4.60) în (4.57) şi se obţine:

$$\left\|2\pi x^* - \mathcal{F}\{X^*\}\right\|_2^2 = 4\pi^2\|x\|_2^2 - 4\pi^2\|x\|_2^2 - 4\pi^2\|x\|_2^2 + 4\pi^2\|x\|_2^2 = 0 \quad . \quad \textbf{(4.61)}$$

Din această relaţie se desprinde concluzia că:

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{F}\{X^*(\omega)\}(t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\,l.\hat{i}.m._{R\to\infty}\int_{-R}^{R} X^*(\omega)\,e^{-j\omega t}\,d\omega \quad a.p.t \ ,$$

(4.62)

sau luând conjugata complexă a relaţiei se ajunge în final la:

$$x(t) \;=\; l.\hat{i}.m._{R\to\infty}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \quad a.p.t. \quad . \qquad \textbf{(4.63)}$$

Utilizând limita obişnuită, relaţia anterioară se poate pune şi sub forma:

$$\lim_{R\to\infty}\left\|x(t) \;-\; \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega\right\|_2 \;=\; 0 \quad . \qquad \textbf{(4.64)}$$

Se poate enunţa acum teorema lui Plânchérel:

<u>Teorema lui Plâncherel</u>

Fie $x(t) \in L^2$. Atunci:

i) există $X(\omega) \;=\; l.\hat{i}.m._{\tau\to\infty}\int_{-\tau}^{\tau} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$, $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$;

ii) pentru $\forall t \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea: $l.\hat{i}.m._{R\to\infty}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \;=\; x(t)$.

În ceea ce priveşte calculul transformatei inverse, notată şi cu $\mathcal{F}^{-1}$, pentru a evita operaţia l.î.m. se poate utiliza formula:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}-1}{j\omega}X(\omega)d\omega \quad . \tag{4.65}$$

Se poate demonstra o extindere a relaţiei lui Parseval pentru două semnale funcţii din L^2 . Fie x(t), y(t) $\in$ L^2 . Atunci are loc egalitatea:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\,Y^*(\omega)\,d\omega \quad . \tag{4.66}$$

Deoarece relaţia (4.33) rămâne valabilă şi pentru funcţii din L^2 , ea poate fi aplicată. Se rescrie membrul stâng al relaţiei (4.66) ţinând cont de (4.62):

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{Y^*(\omega)\}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)\,Y^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\,Y^*(\omega)d\omega \quad ,$$

şi relaţia (4.66) este demonstrată.

Având în vedere că produsul scalar al semnalelor f şi g din L^2 se defineşte cu relaţia:

$$\langle f,g\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,g^*(t)dt \quad ,$$

şi că şi transformatele Fourier ale acestor semnale sunt în L^2, relaţia (4.66) poate fi scrisă şi sub forma:

$$\langle x,y\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\langle X,Y\rangle_{L^2} \quad .$$

Pentru y(t) = x(t) relaţia (4.66) conduce la:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega \quad ,$$

relaţia lui Parseval (relaţia Rayleigh a energiei).

Având în vedere structura de spaţiu Hilbert a lui $L^2(\mathbb{R})$, cu norma definită pe baza produsului scalar (exprimat mai sus) o formulare alternativă a relaţiei lui Parseval este:

$$\| x(t) \|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \| X(\omega) \|_{L^2}^2 \quad .$$

Deci operatorul Fourier este o funcţională definită pe L^2 cu valori în L^2 .

Având în vedere ultima relaţie se constată că transformarea Fourier pe L^2 este o izometrie până la un factor de proporţionalitate, $1/(2\pi)$ (distanţa dintre vectorul $X(\omega)$ şi 0_{L2} este proporţională cu distanţa dintre vectorul $x(t)$ şi 0_{L2}) unde cu 0_{L2} s-a notat vectorul nul al spaţiului L^2 .

Proprietăţi suplimentare ale transformatei Fourier $\mathcal{F}^2$

14. Convoluţia spectrelor (teorema convoluţiei spectrelor) Fie $x(t)$ şi $y(t)$ două semnale funcţii din L^2 . Există $X(\omega)$, $Y(\omega) \in L^2$ şi există şi convoluţia lor $X(\omega) * Y(\omega) \in L_1$. Se poate exprima $Z(\omega) = X(\omega) * Y(\omega)$ prin:

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)\, Y(\omega - u)\, du = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} X(u) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j(\omega - u)t}\, dt \right] du =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(u)\, e^{j\omega u}\, du \right] e^{-j\omega t}\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 2\pi\, \mathcal{F}\{x(t)\, y(t)\}(\omega) \ .$$

Concluzia la care s-a ajuns este:

$$x(t)\, y(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.67)}$$

În demonstrarea acestei proprietăţi nu am utilizat transformatele scrise cu l.î.m. dar se subînţelege că respectivele transformate se calculează ca limite în medie pătratică.

Fiind deja demonstrată posibilitatea recuperării semnalului din spectrul său (transformata sa) atât în cazul semnalului din L^1 cât şi a celui din L^2 , - e drept cu menţiunea aproape peste tot - se poate spune că semnalul şi spectrul alcătuiesc o pereche şi se scrie:

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.68)}$$

În consecinţă toate proprietăţile demonstrate, începând cu proprietatea 1, se vor considera valabile în ambele sensuri deci cu săgeata dublă.

15. **Teorema simetriei** Formula de inversare, scrisă pentru un semnal din L^2 fără a menţiona limita, $2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ conduce prin transformarea de variabilă t —> -t la:

$$2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad .$$

În această relaţie se face dubla schimbare de variabilă ω —> t şi t —> ω . Se subînţelege că toate constantele dimensionale se transformă şi ele. Constantele cu dimensiunea frecvenţă devin constante cu dimensiunea timp şi invers. Se obţine:

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{X(t)\}(\omega) \quad , \qquad \textbf{(4.69)}$$

relaţie cunoscută sub denumirea de teorema simetriei.

Dacă $x(t) \in L^2$ are spectrul $X(\omega) \in L^2$, atunci semnalul X(t) , provenit din spectru, are ca spectru $2\pi \cdot x(-\omega)$:

$$\left.\begin{array}{lll} x(t) & \longleftrightarrow & X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) \\ X(t) & \longleftrightarrow & 2\pi x(-\omega) = 2\pi\, \mathcal{F}\{X(t)\}(-\omega) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.69')}$$

4.1.5 Exemple de transformate Fourier

Vom da câteva exemple de transformate Fourier, mai precis câteva câteva perechi semnal - transformată, pentru a ilustra metodele de obţinere a lor dar şi pentru că sunt relativ des întâlnite în teoria semnalelor şi sistemelor.

1. **Semnalul poartă temporală** $p_\tau(t) = \sigma(t+\tau) - \sigma(t-\tau)$ are spectrul determinat în relaţia (4.15):

$$p_\tau(t) = \sigma(t+\tau) - \sigma(t-\tau) \longleftrightarrow 2\,\frac{\sin\omega\tau}{\omega} \quad . \qquad \textbf{(4.70)}$$

2. **Semnalul poartă în domeniul frecvenţă** Se aplică pentru (4.70) teorema simetriei:

$$2\,\frac{\sin t\omega_o}{t} \longleftrightarrow 2\pi\, p_{\omega_o}(-\omega) \quad .$$

Constanta τ, [τ] = sec a fost înlocuită cu constanta ω_o , $[\omega_o]$ = rad·sec^{-1} (cu [x] s-a simbolizat dimensiunea lui x). Dacă se ţine cont de omogenitatea transformării

rezultă că ambii membri ai echivalenţei pot fi multiplicaţi cu aceeaşi constantă. În particular $1/(2\pi)$. Se are în vedere paritatea funcţiei poartă şi se ajunge la forma finală:

$$\frac{\sin \omega_o t}{\pi t} \longleftrightarrow p_{\omega_o}(\omega) \quad . \tag{4.71}$$

În figura 4.9 sunt arătate perechile semnal-spectru pentru poarta temporală şi poarta în domeniul frecvenţelor. Semnalul cu suportul mărginit în timp (figura 4.9.a) are spectrul cu suport nemărginit, iar un spectru cu suportul mărginit corespunde (figura 4.9.b) unui semnal cu suportul nemărginit.

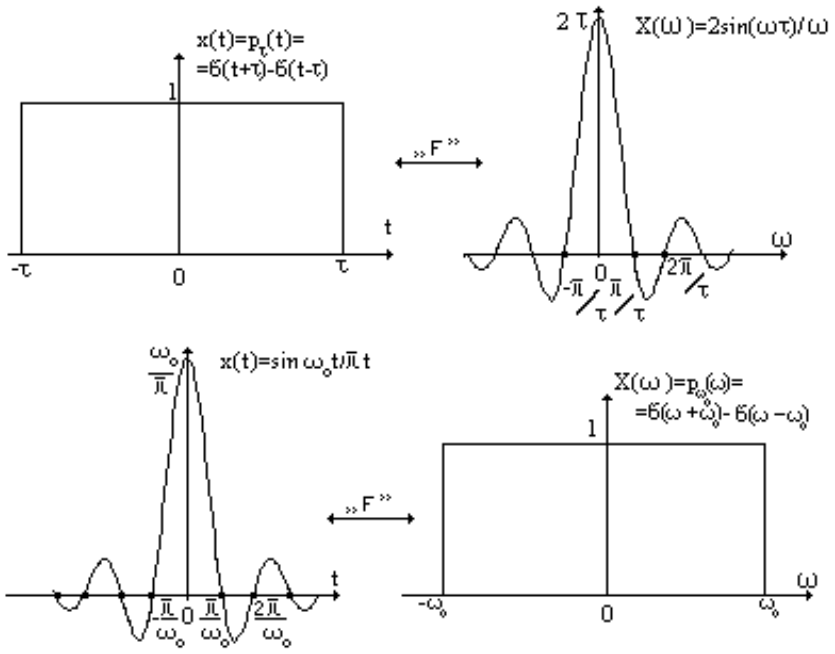


Fig. 4.9 (a) Fereastra temporală $p_\tau(t)$ şi spectrul ei; (b) Semnalul x(t) corespunzător spectrului poartă (fereastră).

3. <u>Semnalul triunghiular simetric</u> S-a stabilit - relaţiile (2.61) şi (2.62) - că prin convoluţia semnalului $\sigma(t+T/2) - \sigma(t-T/2)$ cu el însuşi se obţine un semnal triunghiular:

$$p_{T/2}(t) * p_{T/2}(t) = \mathrm{tri}_T(t) = T\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) p_T(t) \quad . \tag{4.72}$$

Dar, conform cu (4.70) avem:

$$p_{T/2}(t) \longleftrightarrow \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \quad ,$$

şi aplicând teorema convoluţiei:

$$\mathrm{tri}_T(t) = p_{T/2}(t) * p_{T/2}(t) \longleftrightarrow \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \cdot \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \quad .$$

S-a obţinut că:

$$\mathrm{tri}_T(t) \longleftrightarrow \left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^2 \quad . \qquad \textbf{(4.73)}$$

Această relaţie a fost utilizată şi pentru a determina spectrul θ - factorului lui Cesaro.

4. <u>Semnalul triunghiular în domeniul frecvenţă</u> Avem în vedere aplicarea teoremei simetriei:

$$\left(\frac{\sin\frac{t\omega_o}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 \longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{tri}_{\omega_o}(-\omega) = 2\pi\,\mathrm{tri}_{\omega_o}(\omega) \quad , \qquad \textbf{(4.74)}$$

sau explicit:

$$\left(\frac{\sin\frac{t\omega_o}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 \longleftrightarrow 2\pi\,\omega_o\left(1 - \frac{|\omega|}{\omega_o}\right) p_{\omega_o}(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.74')}$$

În figura 4.10.b sunt prezentate perechile semnal-spectru pentru exemplele 3 şi 4. Din nou se observă că semnalul limitat în durată are spectrul cu suport nemărginit şi invers.

5. <u>Semnalul cauzal exponenţial căzător</u> $x(t) = e^{-\omega_o t}\,\sigma(t) \quad , \quad \omega_o > 0$ are spectrul determinat în relaţia (4.16):

$$e^{-\omega_o t}\sigma(t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{\omega_o + j\omega} \quad . \qquad \textbf{(4.75)}$$

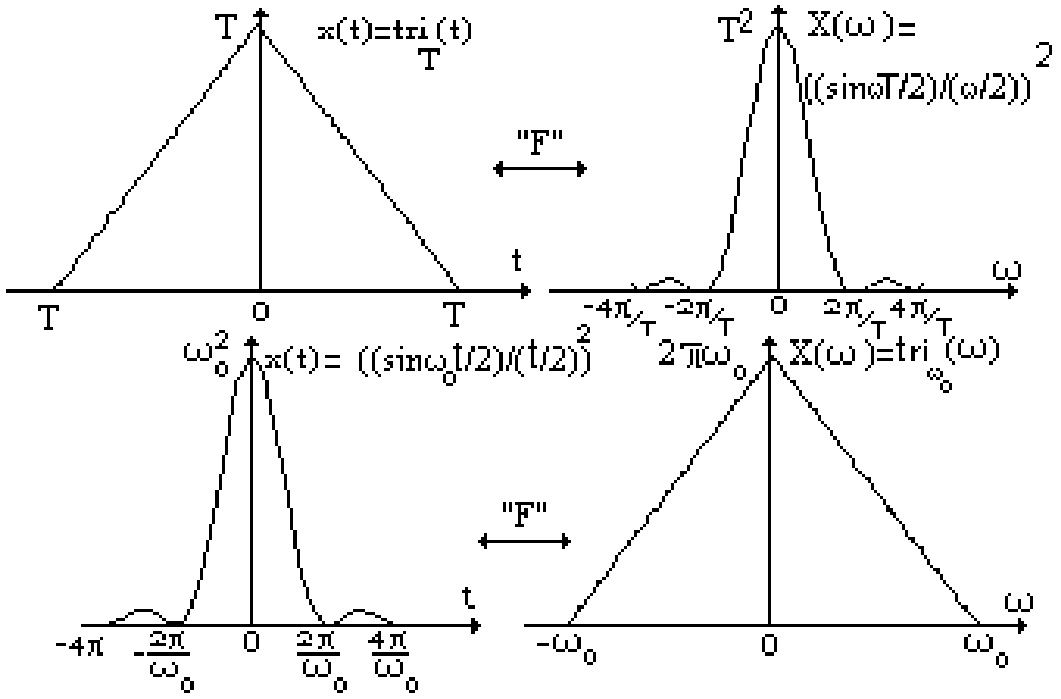


Fig. 4.10 (a) Semnalul triunghiular şi spectrul său; (b) Semnalul corespunzător unui spectru triunghiular.

Pentru acest semnal spectrul este complex. În celelalte exemple semnalele au fost pare şi deci spectrele au fost reale. Avem un modul şi o fază ca funcţii de frecvenţă cu expresiile:

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega_o^2 + \omega^2}} \quad ; \quad \Phi(\omega) = \operatorname{Arg} X(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_o} \quad . \qquad \textbf{(4.76)}$$

Semnalul şi spectrul său, cu modul şi fază sunt arătate în figura 4.11. Se va remarca faptul că $|X(\omega)|$ este o funcţie pară iar $\Phi(\omega)$ una impară. Vom mai reţine că $\Phi(\omega)$ este o funcţie căzătoare, $\Phi'(\omega) < 0$.

Fie acum acelaşi semnal reflectat $\check{x}(t) = x(-t) = e^{\omega_o t}\sigma(-t)$. Conform proprietăţii 5:

$$\check{x}(t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{\omega_o - j\omega} \quad . \qquad \textbf{(4.77)}$$

Se observă că:

$$\left|\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega)\right| = \left|\mathcal{F}\{\check{x}(t)\}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\omega_2^2+\omega^2}} \quad , \qquad \textbf{(4.78)}$$

dar:

$$\text{Arg}\,\mathcal{F}\{\check{x}(t)\}(\omega) = \text{arctg}\,\frac{\omega}{\omega_o} = -\text{Arg}\,\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.79)}$$

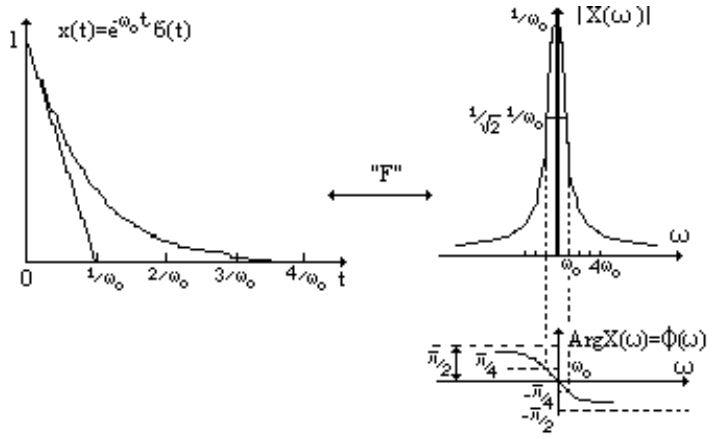


Fig 4.11 Semnalul cauzal x(t) are spectrul complex.

Pentru semnalul reflectat, numit şi semnal "anticauzal" caracteristica fază - frecvenţă este o curbă crescătoare cu frecvenţa, având derivata pozitivă.

6. **Semnalul lui Gauss** Forma pe care o considerăm este $x(t)=e^{-at^2}$, $a>0$. Vom calcula transformata aplicând direct definiţia:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t^2+2\frac{j\omega}{2a}t-\frac{\omega^2}{4a^2}\right)-\frac{\omega^2}{4a}}\,dt \quad e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2}dt \quad .$$

Se notează $\sqrt{a}\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right) = u$; $\sqrt{a}\,dt = du$ şi se obţine:

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du \quad .$$

Dar $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ şi deci:

$$e^{-at^2} \quad \longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{1}{4a}\omega^2} \quad , \quad a > 0 \quad . \qquad \textbf{(4.80)}$$

Semnalul lui Gauss şi spectrul său au aceeaşi formă, după cum rezultă şi din figura 4.12.

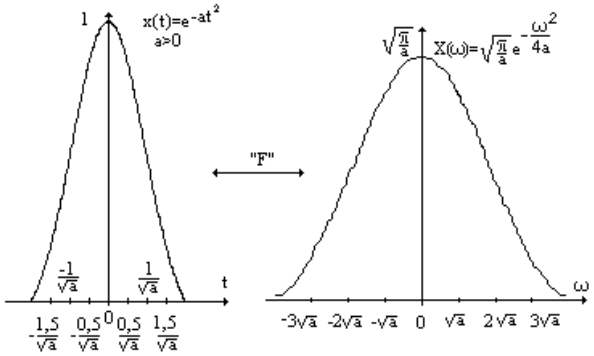


Fig. 4.12 Semnalul lui Gauss şi spectrul său. Cele două funcţii au aceeaşi formă.

7. <u>Efectul trunchierii semnalului</u> După cum s-a văzut în cadrul exemplului 2, semnalul $\sin(\omega_o t)/\pi t$, ce este din L^2 dar nu şi din L^1 , are spectrul mărginit la $[-\omega_o,\omega_o]$. Se pune întrebarea ce se întâmplă dacă trunchiem, simetric, semnalul ? Fie:

$$x(t) = \frac{\sin \omega_o t}{\pi t} p_\tau(t) \qquad \textbf{(4.81)}$$

semnalul trunchiat. Atât semnalul iniţial cât şi $p_\tau(t)$ sunt din L^2 şi deci se poate aplica teorema convoluţiei spectrelor pentru a obţine spectrul semnalului x(t) trunchiat:

$$\frac{\sin \omega_o t}{\pi t} p_\tau(t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi} p_{\omega_o}(\omega) * \frac{2\sin \omega \tau}{\omega} = X(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.82)}$$

Vom explicita convoluţia din domeniul spectrului:

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\omega_o}(\omega - u) \frac{\sin u\tau}{u} du \quad .$$

Dar valorile lui u pentru care funcţia poartă e nenulă satisfac dubla inegalitate $-\omega_o \le \omega - u \le \omega_o$ de unde rezultă $\omega - \omega_o \le u \le \omega_o + \omega$. Spectrul devine:

$$X(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{\omega-\omega_0}^{\omega+\omega_0}\frac{sinu\tau}{u}du=\frac{1}{\pi}Si(y)\Big|_{\tau(\omega-\omega_0)}^{\tau(\omega+\omega_0)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}Si[\tau(\omega+\omega_0)]-\frac{1}{\pi}Si[\tau(\omega-\omega_0)]$$

Se ûine seama de faptul c| funcûia sinus integral este impar| aõa c| spectrul ia forma final|:

$$X(\omega)=\frac{1}{\pi}\{\ Si[\tau(\omega_o+\omega)]\ +\ Si[\tau(\omega_o-\omega)]\ \}\ . \qquad \textbf{(4.83)}$$

$$Si[\tau(\omega_o+\omega)]\cong Si(\tau\omega)\cong\frac{\pi}{2}\ ;$$

Pentru ω o ω_o : $\quad Si[\tau(\omega_o-\omega)]\cong Si(-\tau\omega)\cong-\frac{\pi}{2}\ ;$

$$X(\omega)\cong 0\ .$$

$$Si[\tau(\omega_o+\omega)]\cong Si(\tau\omega)\cong-\frac{\pi}{2}\ (\tau\omega<0)\ ;$$

Pentru ω n $-\omega_o$: $\quad Si[\tau(\omega_o-\omega)]\cong Si(-\tau\omega)\cong\frac{\pi}{2}\ (-\tau\omega<0)\ ;$

$$X(\omega)\cong 0\ .$$

Între $-\omega_o$ õi ω_o cele dou| expresii se însumeaz|. În figura 4.13 se poate urm|ri construcûia formei (4.83) a spectrului. Cei doi termeni prezint| oscilaûiile funcûiei sinus integral. Deoarece Si(x) se anuleaz| în origine, Si(0) = 0 õi îõi atinge primul extrem (un maxim) în π, $Si(\pi)=S_{max}\bullet 1{,}852$.

Luând în considerare un termen, spre exemplu $Si[\tau(\omega_o+\omega)]$, pentru $\omega=-\omega_o$, $Si[\tau(\omega_o-\omega_o)]=0$. Dac| frecvenûa ω creõte cu $\Delta\omega$, $\omega=-\omega_o+\Delta\omega$, $Si[\tau(\omega_o+\omega)]=Si[\tau\Delta\omega]$ õi atunci când argumentul devine π, funcûia îõi atinge maximul. Rezult|:

$$\Delta\omega=\frac{\pi}{\tau}\ . \qquad \textbf{(4.84)}$$

Analizând forma spectrului X(ω), pentru cazul în care trunchierea temporal| nu este prea sever| deci $\Delta\omega$ n ω_o , rezult| c| tranziûia în spectru se întinde pe un ecart de frecvenû| $2\Delta\omega=2\pi/\tau$. În ceea ce priveõte oscilaûiile, valoarea primei supracreõteri este de - 9% din saltul de frecvenû|, dac| $\Delta\omega$ n ω_o . Crescând τ , deci x(t) se apropie

tot mai mult de funcûia $\sin(\omega_o t)/\pi t$ 0 L^2 , m|rimea supracreÕterilor Õi a subcreÕterilor nu se modific| dar se produce o creÕtere a vitezei de oscilaûie. S-ar putea spune c| atunci când $\tau \rightarrow 4$ deci $x(t) \rightarrow \sin(\omega_o t)/\pi t$, oscilaûiile se restrâng ajungând la o singur| vertical| dar nu îÕi modific| m|rimea. Se poate vedea, Õi din acest exemplu care este semnificaûia operaûiilor de trecere la limit| f|cute în dezvolt|rile teoretice Õi ce înseamn| convergenûa în norma din L^2.

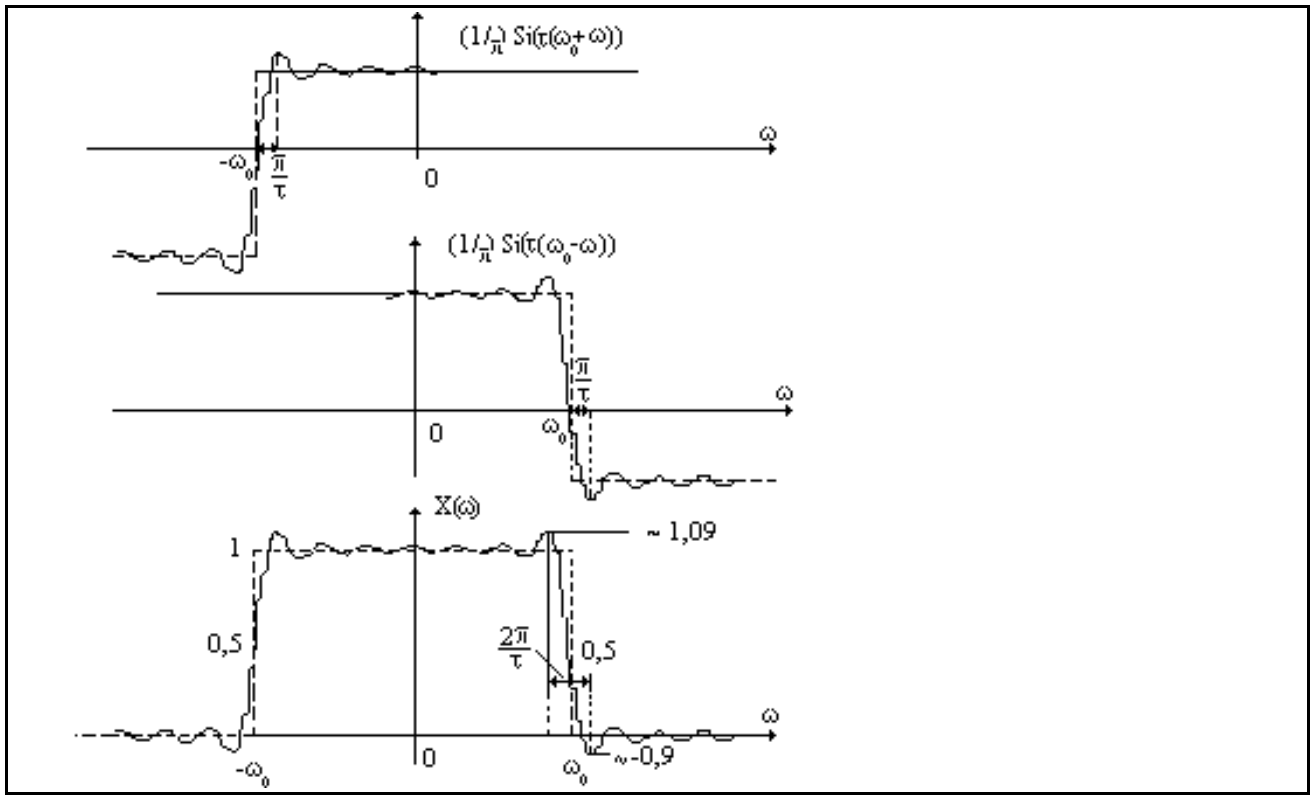


Fig. 4.13 Semnalul de durat| infinit| $\sin(\omega_o t)/\pi t$ trunchiat la "τ d| naÕtere unui spectru X(ω) prezentând oscilaûiile fenomenului Gibbs.

8. <u>Efectul trunchierii spectrului</u> Referindu-ne la primul exemplu, $p_\tau(t)$ are spectrul $2\sin(\omega\tau)/\omega$. Se pune întrebarea: ce se întâmpl| cu semnalul atunci când trunchiem spectrul la "ω_o ? Fie spectrul $2\sin(\omega\tau)/\omega$ trunchiat:

$$X(\omega) = p_{\omega_o}(\omega) \cdot \frac{2 \sin \omega \tau}{\omega} \quad . \qquad \textbf{(4.85)}$$

Se obûine produs în domeniul spectrului atunci când exist| convoluûie în domeniul timpului. Se poate scrie, drept urmare:

$$p_\tau(t) \leftrightarrow \frac{2\sin\omega\tau}{\omega}$$

$$\frac{\sin\omega_o t}{\pi t} \leftrightarrow p_{\omega_o}(\omega) \qquad \textbf{(4.86)}$$

$$x(t) = p_\tau(t) * \frac{\sin\omega_o t}{\pi t} \leftrightarrow p_{\omega_o}(\omega)\frac{2\sin\omega\tau}{\omega} \ .$$

Explicitând convoluţia avem:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(t-u)\frac{\sin\omega_o u}{\pi u}du = \frac{1}{\pi}\{\ Si[\omega_o(\tau+t)] + Si[\omega_o(\tau-t)]\ \}\ . \qquad \textbf{(4.87)}$$

Acest rezultat poate fi obţinut şi aplicând teorema simetriei.

În exemplul anterior am stabilit c|:

$$\frac{\sin\omega_o t}{\pi t}\ p_\tau(t) \leftrightarrow \frac{1}{\pi}\{\ Si[\tau(\omega_o+\omega)] + Si[\tau(\omega_o-\omega)]\ \}\ .$$

Aici ω_o este frecvenţa ce arat| limita suportului spectrului. Ea trebuie înlocuit| cu τ limita suportului semnalului. Constanta τ d| limita de trunchiere a semnalului în domeniul timp şi ea trebuie înlocuit| cu constanta ω_o limita de trunchiere a spectrului. În rest $\omega \rightarrow t$ şi $t \rightarrow \omega$. Teorema de simetrie ia forma:

$$\frac{1}{\pi}\{\ Si[\omega_o(\tau+t)] + Si[\omega_o(\tau-t)]\ \} \leftrightarrow 2\pi\ \frac{\sin\tau(-\omega)}{\pi(-\omega)}\ p_{\omega_o}(-\omega) = \frac{2\sin\omega\tau}{\omega}\ p_{\omega_o}(\omega).$$

Am stabilit şi pe aceast| cale relaţia (4.87). Dac| spectrul semnalului cu durat| finit| în timp (spectru cu suport nem|rginit) se trunchiaz| la "ω_o , în semnal apar, la tranziţii, oscilaţii. Durata unei tranziţii de la 0 la 1 (sau invers) a semnalului se poate estima ca fiind $2\pi/\omega_o$. Pe m|sur| ce ω_o creşte deci trunchierea este mai puţin sever|, $X(\omega) \rightarrow 2\sin(\omega\tau)/\omega$, iar semnalul x(t) tinde în norma din L^2 spre $p_\tau(t)$. Din nou, crescând ω_o, oscilaţiile se îndesesc, apropiindu-se de linia vertical| de tranziţie, dar nu îşi modific| m|rimea. V| propunem, ca exerciţiu s| construiţi o figur| asem|n|toare cu 4.13. Pentru ca s| puteţi lucra cât de cât îngrijit, se dau extremele funcţiei Si(x) în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1 Extreme locale ale funcûiei sinus integral

x		π	2π	3π	4π	5π	6π	7π	8π	9π	10π
Si(x)	max	1,852		1,675		1,634		1,616		1,606	
	min		1,418		1,492		1,518		1,531		1,539

Al 5-lea maxim, în valoare de -1,606 , se abate de la valoarea asimptotic| Si(4)=π/2 cu - 1,606-1,571 = 0,035 , abatere ce reprezint| o valoare relativ| de 0,035@100/1,571 – 2,2% , ceea ce în m|sur|tori de precizie nu e de neglijat. Ori timpul de stabilizare a valorii semnalului (dac| se trunchiaz| în domeniul frecvenû|) dep|ùeùte 10@π/ω_o , ω_o fiind frecvenûa de trunchiere. Stabilirea valorii sub 2% eroare este de peste 5 ori mai mare decât m|rimea timpului socotit pentru tranziûie, 2@π/ω_o.

9. <u>Efectul rescal|rii variabilei timp</u> Vom considera semnalul dreptunghiular x(t)=p_T(t), o versiune cu derulare mai rapid| x_1(t):

$$x_1(t)=\sigma(2t+T)-\sigma(2t-T)\leftrightarrow X_1(\omega)\ . \qquad \textbf{(4.88)}$$

ùi una cu derulare mai lent| x_2(t):

$$x_2(t)=\sigma(0{,}5t+T)-\sigma(0{,}5t-T)\ <\_\_>\ X_2(\omega)\ . \qquad \textbf{(4.89)}$$

Pentru cele trei semnale avem:

$$X(\omega)=\frac{2\sin\omega T}{\omega}; \qquad \textbf{(4.90')}$$

$$X_1(\omega)=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a=2,\ X_1(\omega)=\frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} \qquad \textbf{(4.90'')}$$

$$X_2(\omega)=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right),a=0{,}5,\ X_2(\omega)=\frac{2\sin 2\omega T}{\omega} \qquad \textbf{(4.90''')}$$

În figura 4.14 sunt ar|tate cele trei semnale ùi spectrele lor. Se remarc| creùterea întinderii spectrale pentru semnalul cu derulare mai rapid| în timp. Dac| în spectrul semnalului iniûial prima trecere prin zero are loc la $\omega = \pi/T$, în spectrul semnalului cu derulare mai rapid| ea are loc la $\omega = 2\pi/T$, dublul valorii anterioare. Dimpotriv|, semnalul cu derulare mai lent| în timp are spectrul mai concentrat, prima trecere prin zero având loc la $\omega = \pi/(2T)$, jum|tate din valoarea corespunz|toare din spectrul semnalului iniûial.

Se observ| îns| c| primul maxim pentru X(ω) are valoarea 2T , pentru $X_1(\omega)$ valoarea T (jum|tate) iar pentru $X_2(\omega)$ valoarea 4T (dublul). Aceast| observa□ie se poate face õi pentru urm|toarele extreme locale. Cauza o constituie faptul c| cele trei semnale: x(t), $x_1(t)$ õi $x_2(t)$ nu au aceea□i energie. Dac| s-ar fi considerat pentru $x_1(t)$ expresia 2□x(2t) iar pentru $x_2(t)$ expresia 0,5□x(t/2) , cele trei spectre ar fi avut extremele de valori egale dar observa□ia privind extinderea sau concentrarea în domeniul frecven□| r|mâne

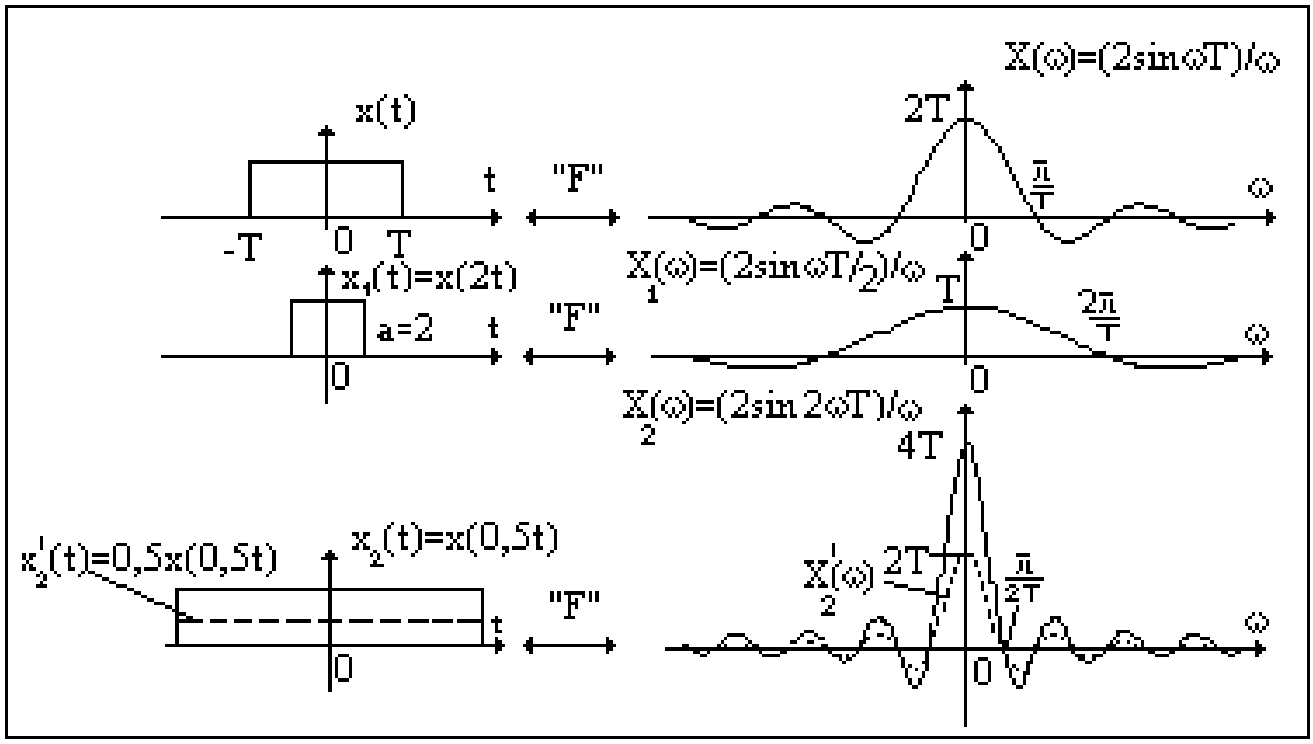


Fig. 4.14 (a) Semnalul ini□ial; (b) Semnalul cu derulare mai rapid|; (c) Semnalul cu derulare mai lent|.

valabil|. În figura 4.14c se indic| õi semnalul $x_2'(t)=0,5\square x(0,5t)$ precum õi spectrul s|u $X_2'(\omega)$.

4.1.6 Transformarea Fourier pentru distribu□ii

Fie pentru început o distribu□ie de tip func□ie, f , õi o func□ie test n (dintr-un spa□iu înc| neprecizat). Dorim s| definim o transformat| Fourier în sens distribu□ional ö {f}. Pentru ea avem, în ipoteza c| integralele sunt convergente:

$$<\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega),\varphi(\omega)>=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)\,\mathcal{F}\varphi(\omega)\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt\right]\varphi(\omega)d\omega=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)\,e^{-j\omega t}\,d\omega\right]dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mathcal{F}\{\varphi(\omega)\}(t)\,dt=<f(t),\mathcal{F}\{\varphi(\omega)\}(t)>,$$

Rezultatul obţinut este:

$$<\mathcal{F}\{f\},\varphi>=<f,\mathcal{F}\{\varphi\}>. \qquad \textbf{(4.91)}$$

Analizând relaţia (4.91) se vede c| transformata în cazul distribuţiilor funcţii, se transfer| asupra funcţiei test. Definiţia ar putea fi extins| õi la distribuţiile neregulate. Pentru aceasta este îns| necesar s| studiem mai întâi clase de funcţii c|reia îi aparţine funcţia test ö{n}.

Fie n 0 D, cu suport compact. În aceste condiţii, conform cu cele constatate, ö{n} nu are suportul compact, deci ö{n} ó D.

O clas| mai larg| de funcţii test este S (D d S d L^1 1 L^2). Consider|m acum n 0 S, indefinit derivabil| õi cu descreõtere rapid|. Pentru œn, œk 0 ù, $\lim_{|t|\to\infty} t^n\varphi^{(k)}(t)=0$, constituie definiţia descreõterii rapide. Ne propunem s| ar|t|m c| ö{n} are aceeaõi proprietate.

Teorema de derivare a spectrului, proprietatea 10, relaţia (4.28) : tn(t)<⟶>$(j)^k\Phi^{(k)}(\omega\}$ se poate extinde, prin inducţie complet| la:

$$t^k\varphi(t)\leftrightarrow(j)^k\,\Phi^{(k)}(\omega), \qquad \textbf{(4.92)}$$

cu condiţia ca t^kn(t) 0 L^1, œk. Dar cum funcţia n este cu descreõtere rapid| condiţia este asigurat|. Rezult| c| ö{n} este indefinit derivabil|, prima condiţie pentru o funcţie test.

Ne vom referi la teorema de derivare a semnalului, proprietatea 7, relaţia (4.23): n'(t) <⟶> jω Φ(ω) ce poate fi extins| prin inducţie la:

$$\varphi^{(n)}\leftrightarrow(j)^n\omega^n\Phi(\omega). \qquad \textbf{(4.93)}$$

Dar $n^{(n)}$ 0 S d L^1. Transformata unei funcţii din L^1 are proprietatea, exprimat| prin relaţia (4.27), $\lim_{|\omega|\to\infty}\mathcal{F}\{\varphi^{(n)}\}(\omega)=0$. Se deduce deci, ţinând seama de (4.93) c|:

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \mathcal{F}\{\varphi^{(n)}\} = \lim_{|\omega|\to\infty} \omega^n \Phi(\omega) = 0 \ . \qquad \textbf{(4.94)}$$

Combinând cele dou| propriet|ûi, rezult| $\omega^n\Phi^{(k)} \to 0$, pentru $|\omega| \to 4$, œ n, k 0 ù. În concluzie pentru œ n 0 S , ö {n} 0 S .

Pentru œf 0 S' se defineÕte transformarea ei Fourier cu relaûia:

$$< \mathcal{F}\{ f(t)\}(\omega) , \varphi(\omega) > = < f(t) , \mathcal{F}\{\varphi(\omega)\}(t) > , \ \forall \varphi \in S \ . \qquad \textbf{(4.91')}$$

Definirea transformatei Fourier poate fi f|cut| Õi pentru distribuûiile din D', cu relaûia:

$$< \mathcal{F}\{ f \}(\omega) , \mathcal{F}\{\varphi\}(\omega) > = 2\pi < f , \varphi > , \ \forall f \in D' \ si \ \forall \varphi \in D \ . \qquad \textbf{(4.95)}$$

Deoarece n 0 S sau n 0 D înseamn| c| n 0 L^1 1 L^2 Õi sunt valabile toate propriet|ûile demonstrate. Prin urmare, ele (propriet|ûile) se extind Õi pentru transformarea Fourier a distribuûiilor, inclusiv teorema de simetrie.

Consider|m c| prin câteva exemple vom l|muri aspectele practice legate de transformarea Fourier a distribuûiilor.

<u>Exemple de transformate Fourier ale unor distribuûii</u>

1. <u>Distribuûia Dirac δ</u> *Aplicând relaûia de definiûie (4.91) avem:*
Dar:

$$< \mathcal{F}\{\delta\} , \varphi > = < \delta , \mathcal{F}\{\varphi(\omega)\}(t) > = \mathcal{F}\{\varphi(\omega)\}(0) \ ,$$

$$\mathcal{F}\{\varphi(\omega)\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \ ; \ \mathcal{F}\{\varphi(\omega)\}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) d\omega \ ,$$

Õi deci:

$$< \mathcal{F}\{\delta\} , \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \varphi(\omega) d\omega = < 1 , \varphi(\omega) > \ .$$

Rezult| în final c|:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1(\omega) \quad , \tag{4.96}$$

unde cu ***1(ω)*** *s-a notat funcûia constant|, egal| cu 1 în domeniul frecvenû|.*

Se poate aplica õi relaûia alternativ| (4.95):

$$<\mathcal{F}\{\delta\}, \mathcal{F}\{\varphi\}> = 2\pi <\delta, \varphi> = 2\pi\varphi(0); \; 2\pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\varphi\}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega ,$$

õi punând t = 0 rezult|:

$$2\pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\varphi\}(\omega)\, d\omega = <1, \mathcal{F}\{\varphi\}> .$$

Am ajuns la concluzia: $<$ö {δ} , ö {n}$>$ = $<$**1** , ö {n}$>$ *adic|* ö *{δ} = 1 obûinut| õi mai înainte.*

Aplic|m teorema de simetrie:

$$\begin{gathered} \delta(t) \leftrightarrow 1(\omega) \\ 1(t) \leftrightarrow 2\pi\,\delta(-\omega) = 2\pi\,\delta(\omega) . \end{gathered} \tag{4.97}$$

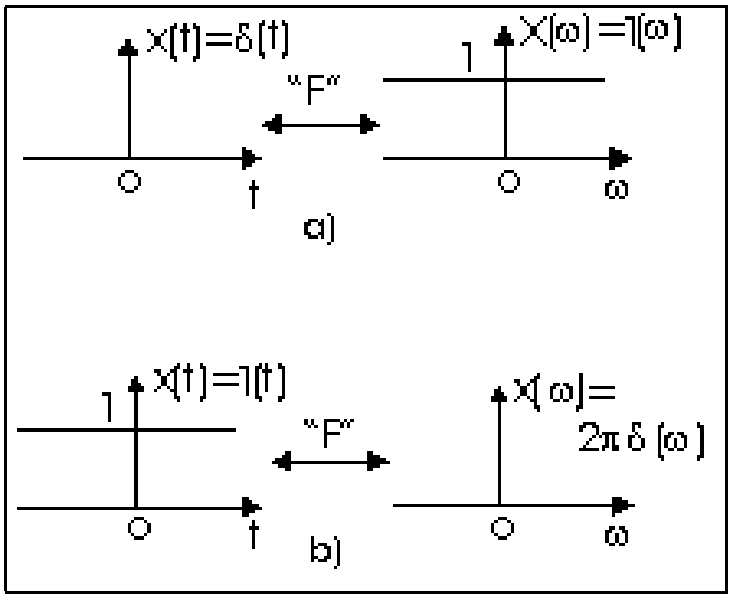


Fig. 4.15 (a)Spectrul distribuûiei δ(t); (b) Spectrul semnalului 1(t).

Constanta din domeniul timp are spectrul localizat în origine, $2\pi\delta(\omega)$ *. Aceast| constatare este în acord cu cea f|cut| în exemplul 9 din '4.1.5. Acolo constatam c| pe m|sur| ce semnalul este mai întins în timp, spectrul este mai concentrat. Deoarece:*

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = \frac{2\sin\omega T}{\omega} = 2\pi\,\frac{\sin\omega T}{\pi\omega} ,$$

õi deoarece (sinωT)/ωT este un δ õir ce tinde spre δ(ω) (slab) atunci când T −> 4 , putem trage õi de aici concluzia:

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{F}\{p_T(t)\} = \mathcal{F}\{\lim_{T\to\infty} p_T(t)\} = 2\pi \lim_{T\to\infty} \frac{\sin\omega T}{\pi\omega} = 2\pi\,\delta(\omega) ,$$

unde am utilizat continuitatea operatorului Fourier. Dar $\lim_{T \to \infty} p_T(t) = 1(t)$ *ùi deci:*

$$\mathcal{F}\{\ 1(t)\ \} = 2\pi\ \delta\ (\omega)\ .$$

Aceast| deducere euristic| are o fundamentare în convergen]a slab| a distribu]iilor. Oricum, defini]ia este mai u∫or de aplicat decât astfel de modalit|]i de calcul. În figura 4.15 se arat| perechile Fourier date prin rela]iile (4.96) ùi (4.97).

2. <u>Distribu]ia treapt| unitar|</u>: Pentru distribu]ia x(t) = σ(t), de tip func]ie, aplicând defini]ia (4.91) se poate scrie:

$$<\mathcal{F}\{\ \sigma\ \},\varphi> = <\sigma\ (t)\ ,\ \mathcal{F}\{\varphi\ (\omega)\}(t)> = \int_0^{\infty} \mathcal{F}\{\varphi\ (\omega)\}\, dt = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\ (\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega\, dt\ .$$

Se inverseaz| succesiunea de integrare ùi ob]inem:

$$<\mathcal{F}\{\sigma\ \},\varphi> = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\ (\omega) \int_0^{\infty} e^{-j\omega t}\, dt\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\ (\omega)\ \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-j\omega t}\, dt\, d\omega\ =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\ (\omega)\ (\ \frac{1}{j\omega} - \lim_{R\to\infty} \frac{e^{-j\omega R}}{j\omega}\ )\, d\omega\ = -\, j\, V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi\ (\omega)}{\omega}\, d\omega\ - \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi\ (\omega)\, e^{-j\omega R}}{j\omega}\, d\omega\ .$$

$$<\mathcal{F}\{\sigma\ \},\varphi> = -\, j\, V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\omega}\, d\omega + j \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)\ cos\omega R}{\omega}\, d\omega + \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)\ sin\omega R}{\omega}\, d\omega. \qquad \textbf{(4.98)}$$

$$\lim_{R\to\infty}\ \pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\ (\omega)\, \frac{sin\ \omega R}{\pi\ \omega}\, d\omega\ = \lim_{R\to\infty}\ \pi\ <\ \frac{sin\ \omega R}{\pi\ \omega}, \varphi\ (\omega)> =$$

$$= \pi <\ \lim_{R\to\infty}\ \frac{sin\ \omega R}{\pi\omega}, \varphi\ (\omega)> = \pi <\delta\ (\omega), \varphi\ (\omega)> = \pi\ \varphi\ (0)\ , \qquad \textbf{(4.99)}$$

Aplicând rela]ia lui Euler pentru exponen]ial|, rela]ia devine:
Referindu-ne la ultimul termen, el se pune sub forma:
deoarece (sinωR)/πω este un δ ùir ce tinde (slab) spre δ când R –> 4 .

Pentru termenul din mijloc trebuie f|cut| mai întâi regularizarea integralei:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\omega)\cos\omega R}{\omega}d\omega=\lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\omega)-\varphi(0)}{\omega}\cos\omega R\,d\omega+\lim_{R\to\infty}\varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega R}{\omega}d\omega .$$

În sensul valorii principale Cauchy, a doua integral| este nul|, integrandul fiind impar (vezi ßi exemplul din figura 4.5). Funcßia $\psi(\omega)=\dfrac{\varphi(\omega)-\varphi(0)}{\omega}$ *se prelungeßte prin continuitate în origine cu:*

$$\psi(0)=\lim_{\omega\to 0}\frac{\varphi(\omega)-\varphi(0)}{\omega}=\lim_{\omega\to 0}\frac{\varphi'(\omega)}{1}=\varphi'(0) .$$

În rest ea este continu|. Derivata ei: $\psi'(\omega)=\dfrac{\omega\varphi'(\omega)-\varphi(\omega)}{\omega^2}$ *se prelungeßte prin continuitate în origine cu:*

$$\psi'(0)=\lim_{\omega\to 0}\frac{\omega\varphi'(\omega)-\varphi(\omega)}{\omega^2}=\lim_{\omega\to 0}\frac{\varphi'(\omega)+\omega\varphi''(0)-\varphi'(\omega)}{2\omega}=\frac{1}{2}\varphi''(0).$$

Se poate obßine, integrând prin p|rßi:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\omega)\cos\omega R\,d\omega=\lim_{R\to\infty}\left[\psi(\omega)\frac{\sin\omega R}{\omega}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\psi'(\omega)\frac{\sin\omega R}{R}d\omega\right] \qquad \textbf{(4.100)}$$

deoarece $\psi(\pm\infty)=0$ *, iar integrala a doua este ponderat| cu 1/R ßi ea este finit|. Introducând aceste rezultate parßiale în (4.98) se g|seßte c|:*

$$\langle\mathcal{F}\{\sigma\}(\omega),\varphi(\omega)\rangle=-j\int_{-\infty}^{\infty}V.P.\left(\frac{1}{\omega}\right)\varphi(\omega)\,d\omega+\pi\varphi(0) . \qquad \textbf{(4.101)}$$

Dar membrul drept poate fi scris distribuţional:

$$\langle\mathcal{F}\{\sigma\}(\omega),\varphi(\omega)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}V.P.\left(\frac{1}{j\omega}\right)\varphi(\omega)\,d\omega+\pi\langle\delta(\omega),\varphi(\omega)\rangle=$$

$$\langle V\,P\left(\frac{1}{j\omega}\right),\varphi(\omega)\rangle+\pi\langle\delta(\omega),\varphi(\omega)\rangle=\langle V\,P\left(\frac{1}{j\omega}\right)+\pi\,\delta(\omega),\varphi(\omega)\rangle .$$

Se deduce în final c|:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}\{\sigma(t)\}(\omega) &= V\,P\,(\frac{1}{j\omega}) + \pi\,\delta(\omega) \\ \sigma(t) &\leftrightarrow V\,P\,(\frac{1}{j\omega}) + \pi\,\delta(\omega) \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(4.102)}$$

3. Convoluţia unui semnal cu distribuţia treapt| unitar| Transformata integralei unui semnal a fost g|sit în '4.11, relaţia (4.24) în cazul unei condiţii restrictive, õi anume $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 0$. *Fie c| X(0) ... 0 . Dar:*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) * \sigma(t)\ ,$$

õi aplicând teorema convoluţiei:

$$y(t) = x(t) * \sigma(t) \leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega)\,[\,V\,P\,(\frac{1}{j\omega}) + \pi\,\delta(\omega)\,]\ . \qquad \textbf{(4.103)}$$

Produsul α(t)δ(t) se interpreteaz| distribuţional dup| cum urmeaz|:

$$\begin{aligned} &<\alpha(t)\,\delta(t)\ ,\ \varphi(t)> = <\delta(t)\ ,\ \alpha(t)\,\varphi(t)> = \alpha(0)\,\varphi(0) = \\ &\quad = \alpha(0)\,<\delta(t)\ ,\ \varphi(t)> = <\alpha(0)\,\delta(t)\ ,\ \varphi(t)> \end{aligned} \qquad \textbf{(4.104)}$$

$$\alpha(t)\cdot\delta(t) = \alpha(0)\cdot\delta(t)\ .$$

Aplicând (4.104) în (4.103) rezult|:

$$x(t) * \sigma(t) \leftrightarrow V\,P\,(\frac{X(\omega)}{j\omega}) + \pi\ X(0)\,\delta(\omega)\ . \qquad \textbf{(4.105)}$$

Relaţia conţine ca pe un caz particular relaţia (4.24).

4. Transformata distribuţiei sgn(t) $x(t) = \mathrm{sgn}(t)$ *se poate scrie sub forma:*

$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) = \sigma(t) - \sigma(-t)\ . \qquad \textbf{(4.106)}$$

Proprietatea 4 de scalare a variabilei, exprimat| prin relaţia (4.20) r|mâne, ca toate celelalte, valabil| õi pentru transformatele distribuţiilor, deoarece se transform|

funcţiile test. Pentru exerciţiu vom demonstra direct proprietatea 4.

Fie f(t) ∈ S' o distribuţie. Se caut / ∃ {f(at)} :

$$< \mathcal{F}\{ f(at) \}(\omega) , \varphi(\omega) > = < f(at) , \mathcal{F}\{ \varphi(\omega) \}(t) > .$$

Avem în vedere relaţia (1.102) de la distribuţii cu b=0. Rezult /:

$$< \mathcal{F}\{ f(at) \}(\omega) , \varphi(\omega) > = \frac{1}{|a|} < f(t) , \mathcal{F}\{ \varphi(\omega) \}(\frac{t}{a}) > =$$

$$= < f(t) , \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{ \varphi(\omega) \}(\frac{t}{a}) > .$$

Conform relaţiei (4.20):

$$\mathcal{F}\{ \varphi(a\omega) \}(t) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{ \varphi(\omega) \}(\frac{t}{a}) ,$$

şi deci:

$$< \mathcal{F}\{ f(at) \}(\omega) , \varphi(\omega) > = < f(t) , \mathcal{F}\{ \varphi(a\omega) \}(t) > =$$

$$= < \mathcal{F}\{ f(t) \}(\omega) , \varphi(a\omega) > .$$

Aplicând din nou (1.102) obţinem:

$$< \mathcal{F}\{ f(at) \}(\omega) , \varphi(\omega) > = < \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{ f(t) \}(\frac{\omega}{a}) , \varphi(\omega) > .$$

S-a demonstrat direct c / şi pentru distribuţii este valabil / relaţia

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{ f \}(\frac{\omega}{a}) .$$

Se aplic / (4.107) în (4.106) cu a = - 1 şi se ţine seama de linearitatea operatorului Fourier. Obţinem:

$$\text{sgn}(t) = \sigma(t) - \sigma(-t) \leftrightarrow \text{V P}\ (\frac{1}{j\omega}) + \pi\delta(\omega) - \text{V P}\ (\frac{1}{-j\omega}) - \pi\delta(-\omega) ,$$

sau:

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \text{V P}\frac{2}{j\omega} .$$

Dac / se aplic / teorema simetriei rezult /:

$$VP\left(\frac{2}{jt}\right) \leftrightarrow 2\pi\ \mathrm{sgn}(-\omega) = -2\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)\ ,$$

Ôi multiplicând ambii membrii ai relaŵiei de echivalenŵ/ cu j/2 (ceea ce este posibil deoarece operatorul Fourier este omogen) se obŵine:

$$VP\left(\frac{1}{t}\right) \leftrightarrow -\pi\, j\ \mathrm{sgn}(\omega)\ . \qquad \textbf{(4.109)}$$

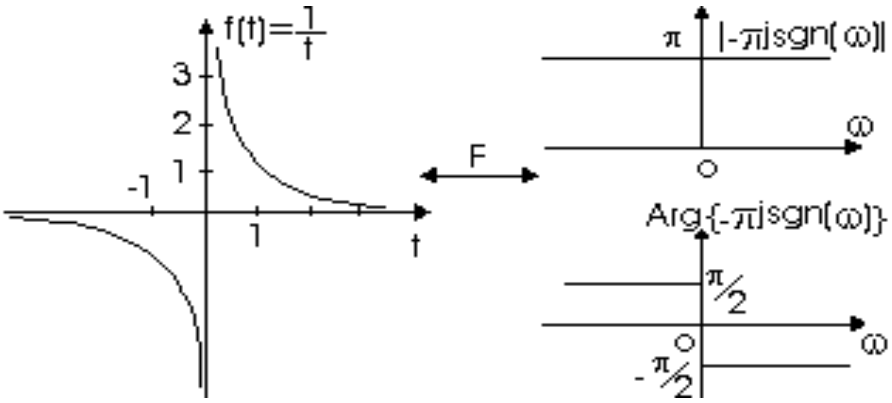


Fig 4.16 Semnalul 1/t Ôi spectrul s|u.

În figura 4.16 se arat/ 1/t ca semnal (deÔi el trebuie considerat numai în sensul distribuŵiei VP(1/t)) Ôi spectrul s/u. Spectrul de modul este o constant/ independent/ de frecvenŵ/. Se observ/ îns/ c/ argumentul (faza) spectrului este -π/2 pentru frecvenŵele pozitive Ôi π/2 pentru frecvenŵele negative.

5. <u>Transformata distribuŵiei</u> $e^{j\omega_0 t}$ Transformata exponenŵialei se calculeaz/ direct aplicând definiŵia:

$$<\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\}(\omega)\ ,\ \varphi(\omega)> = <e^{j\omega_0 t}\ ,\ \mathcal{F}\{\varphi(\omega)\}(t)>\ .$$

sau utilizând teorema simetriei. Aceast/ a doua cale este mai comod/.
Se caut/:

$$<\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}(\omega)\ ,\ \varphi(\omega)> = <\delta(t-t_0)\ ,\ \mathcal{F}\{\varphi(\omega)\}(t)> =$$

$$= \mathcal{F}\{\varphi(\omega)\}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)\, e^{-j\omega t_0}\, dt = <e^{-j\omega t_0}\ ,\ \varphi(\omega)>\ ,$$

Ôi se g/seÔte spectrul distribuŵiei Dirac deplasate:

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega\cdot t_0} \qquad \textbf{(4.110)}$$

Se aplic/ acum teorema simetriei:

$$e^{-j\cdot\omega\cdot t_0} \leftrightarrow 2\cdot\pi\cdot\delta(-\omega-\omega_0) = 2\cdot\pi\cdot\delta(\omega+\omega_0)$$

Ôi se face transformarea $-\omega_o \rightarrow \omega_o$ *. Se obÛine:*

$$e^{j\cdot\omega_0\cdot t} \leftrightarrow 2\cdot\pi\cdot\delta(\omega-\omega_0) \qquad \textbf{(4.111)}$$

6. <u>Transformatele distribuÛiilor sin(ω_ot) Ôi cos(ω_ot)</u> Se aplic/ formula lui Euler Ôi se Ûine seama de liniaritatea operatorului Fourier:

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2j}2\pi\,[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]\,. \qquad \textbf{(4.112)}$$

Similar:

$$\cos\omega_o t \leftrightarrow \pi\,[\delta(\omega-\omega_o)+\delta(\omega+\omega_o)]\,. \qquad \textbf{(4.113)}$$

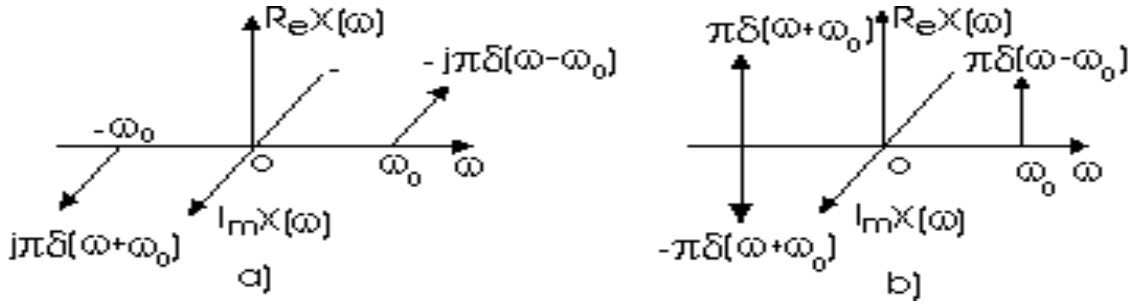


Fig. 4.17 (a) Spectrul sinusoidei; (b) Spectrul cosinusoidei.

Spectrele semnalului sinusoidal Ôi a semnalului cosinusoidal sunt cele din figurile 4.17 a respectiv 4.17 b. Ele sunt desenate în sistemul de axe ω *, ReX(*ω*) Ôi ImX(*ω*).*

7. <u>Transformata distribuÛiei Dirac periodice δ_T</u> Se Ûine seama de liniaritatea spectrului Fourier:

$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \mathcal{F}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{\delta(t-kT)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-jk\omega T}. \qquad \textbf{(4.114)}$$

Dar $\delta_T(t)$ ca distribuţie periodic| are o serie Fourier ataşat|, coeficienţii seriei fiind 1/T (vezi relaţia (3.88)):

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_o t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} .$$

În aceast| relaţie facem schimb|ri de variabil| şi constante (în sensul redenumirii lor). Se fac schimb|rile $T \rightarrow \omega_o$, şi $t \rightarrow \omega$ şi se obţine noua expresie:

$$\delta_{\omega_o}(\omega) = \frac{1}{\omega_o} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{2\pi}{\omega_o}\omega} , \qquad \textbf{(4.115)}$$

unde $\delta_{\omega_0}(\omega)$ este o distribuţie Dirac periodic| în domeniul frecvenţei, cu expresia:

$$\delta_{\omega_o}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\ \omega_o) . \qquad \textbf{(4.116)}$$

Dar $2\pi/\omega_0 = T$ şi relaţia (4.115) se mai poate pune şi sub forma:

$$\delta_{\omega_o}(\omega) = \frac{1}{\omega_o} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkT\omega} = \frac{1}{\omega_o} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jkT\omega} , \qquad \textbf{(4.117)}$$

unde s-a mai f|cut şi schimbarea $k \rightarrow -k$. Comparând (4.114) cu (4.117) rezult| c|:

$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \omega_o\ \delta_{\omega_o}(\omega) , \qquad \textbf{(4.118')}$$

sau :

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) = \omega_o\, \delta_{\omega_o}(\omega) . \qquad \textbf{(4.118'')}$$

Spectrul (transformata Fourier a) distribuţiei Dirac periodice este un spectru de linii, decalate pe axa frecvenţei cu $\omega_0 = 2\pi/T$.

4.1.7 Transformata Fourier a semnalelor periodice

Distribuţia Dirac periodic| are transformat| Fourier. Se pune întrebarea dac|, în sensul transformatelor distribuţiilor, nu se poate da un sens şi transformatei aplicate semnalelor periodice ? R|spunsul este afirmativ. Fie x(t) un semnal periodic. El se poate scrie sub forma unei serii exponenţiale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t} \quad ; \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T} \quad .$$

Dar exponen]iala complex| are transformata Fourier - vezi rela]ia (4.111) - a[a c|:

$$\mathcal{F}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F}\{e^{jk\omega_o t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_o) \qquad \textbf{(4.119')}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t} \leftrightarrow X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_o) \; . \qquad \textbf{(4.119'')}$$

Densitatea spectral| a unui semnal periodic este format| din linii spectrale plasate la multiplii întregi ai frecven]ei ω_o , $k\omega_o$. Intensitatea liniilor spectrale este $2\pi c_k$ unde c_k este coeficientul seriei Fourier corespunz|tor frecven]ei $k\omega_o$.

Pentru unda rectangular| cu component| continu| din figura 3.4 diagrama spectral| din figura 3.6b permite construc]ia densit|]ii spectrale a aceluia[i semnal, ar|tat| în figura 4.18.

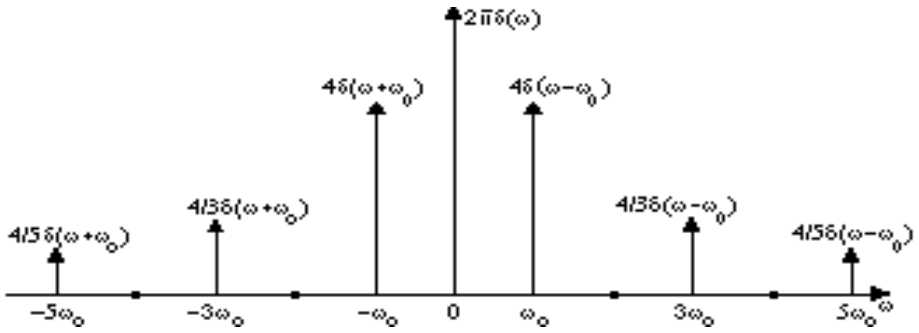


Fig. 4.18 Densitatea spectral| X(ω) a semnalului periodic din figura 3.4.

De[i cele dou| figuri, 3.6b [i 4.18 se aseam|n|, între ele exist| o deosebire esen]ial|. Diagrama spectral| d| amplitudinile sinusoidelor componente ale semnalului pe când densitatea de reparti]ie arat| frecven]ele la care apar sinusoide prin impulsurile Dirac $\delta(\omega - k\omega_o)$. Intensitatea acestora este corelat| cu amplitudinile sinusoidelor fiind de 2π ori mai mare dar ele, nu reprezint| prin în|l]imea lor (care este un nonsens) amplitudinile sinusoidelor.

Periodizarea unui semnal prin convolu]ia cu distribu]ia Dirac periodic|

Fie x(t) un semnal cu suportul m|rginit, de preferin]| m|sura suportului fiind inferioar| valorii T. Semnalul y(t) ob]inut din convolu]ia lui x(t) cu $\delta_T(t)$ este un semnal periodic:

$$y(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t - kT) \ . \qquad \textbf{(4.120)}$$

Având în vedere c| $x(t) * \delta(t - k\,T) = x(t - k\,T)$ se ajunge la:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT) \ . \qquad \textbf{(4.121)}$$

Se verific| imediat periodicitatea prin:

$$y(t + T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t + T - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT) = y(t) \ ,$$

în care s-a f|cut substituirea k-1 –> k .

Densitatea spectral| $Y(\omega)$ a semnalului y(t) se obûine aplicând transformata Fourier formei (4.120):

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{x(t) * \delta_T(t)\} = X(\omega) \cdot \omega_o \delta_{\omega_o}(\omega) = \omega_o X(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\,\omega_o) .$$

$$Y(\omega) = \omega_o \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega)\,\delta(\omega - k\,\omega_o) \qquad X(\omega)\,\delta(\omega - k\,\omega_o) = X(k\,\omega_o)\,\delta(\omega - k\,\omega_o) \qquad \omega_o = \frac{2\pi}{T},$$

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{X(k\,\omega_o)}{T} \delta(\omega - k\,\omega_o) \ .$$

Deoarece $X(\omega)$ nu depinde de k, el se poate introduce sub semnul sumei:
Dar, aõa cum s-a ar|tat în relaûia (4.104):
õi prin urmare:

Coeficienûii semnalului periodizat c_k^y se determin| ins| din transformata Fourier a primei perioade, $X(\omega)$, în acest caz, cu relaûia (4.8) $c_k^y = \frac{1}{T} X(k\,\omega_o)$. În consecinû|:

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k^y\, \delta(\omega - k\,\omega_o) \qquad \omega_o = \frac{2\pi}{T} \ ,$$

ði s-a reg|sit relaûia (4.119), ceea ce era de aðteptat.

4.1.8 Propriet|ûi spectrale ale semnalelor

Este util s| putem prezice din analiza anumitor caracteristici de variaûie în timp comportamentul funcûiei de densitate spectral|.

În primul rând vom remarca c| în practic| avem de-a face numai cu semnale de durat| limitat|. Modelul teoretic introdus pentru a reprezenta astfel de semnale are îns| spectrul nelimitat pe axa frecvenûelor. Dar practica ne relev| numai spectre cu suportul m|rginit, m|car ði numai de c|tre aparatul cu care se determin| respectivul spectru. Dar astfel de spectre corespund unor semnale de durat| infinit|. Neconcordanûa între cele dou| aspecte este legat| de limitele model|rii dar ea nu deranjeaz| în practic|. În continuare se vor prezenta câteva caracteristici locale ale semnalelor în domeniile timp ði frecven|.

Relaûia de incertitudine

Vom aborda mai întâi un exemplu din mecanic|, pentru a realiza o analogie. O caracteristic| local| a unei bare este poziûia centrului de greutate. Ne vom aminti c| poziûia centrului de greutate al unei bare orizontale cu densitatea de mas| $\rho(x)$ se calculeaz| cu relaûia:

$$x_G = \frac{\int_a^b x\ \rho(x)\ dx}{\int_a^b \rho(x)\ dx} \ ; \quad \int_a^b \rho(x)\ dx = m \ , \ \text{masa barei} \ ,$$

capetele barei având coordonatele a ði b. Abscisa x_G este locul în care se afl| centrul de mas| al barei.

Prin analogie, fie un semnal de energie finit|, pentru care $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\ dt < \infty$. Un astfel de semnal poate avea un "centru de greutate" energetic. Se pare c| trebuie s| echival|m masa barei cu energia semnalului. Dar atunci $\rho = |x(t)|^2$ ði t_c , centrul temporal al semnalului se defineðte cu relaûia:

$$t_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\,|x(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt} \quad . \qquad \textbf{(4.122)}$$

Un semnal x(t) 0 L^2 are spectrul X(ω) 0 L^2 cu $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega < \infty$. Se poate defini õi pentru densitatea spectral| un centru, ω_c :

$$\omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega\,|X(\omega)|^2\,d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega} \quad . \qquad \textbf{(4.123)}$$

Centrele t_c õi ω_c (care vor fi numite în continuare timp central õi frecvenû| central|) localizeaz| energetic semnalele în domeniile timp õi frecvenû|. Prin analogie cu semnalele aleatoare num|r|torul relaûiei (4.122) se mai numeõte õi media semnalului $|x(t)|^2$ iar num|r|torul din relaûia (4.123) media spectrului $|X(\omega)|^2$. Având în vedere semnificaûia energetic| a acestor m|rimi putem numi constantele t_c õi ω_c õi prin timp mediu energetic, respectiv frecvenû| medie energetic|.

Vom accepta acum mai uõor introducerea celei de-a doua m|rimi ce caracterizeaz| global semnalul õi anume "dispersia" sa în jurul "centrului" determinat.

Dispersia în timp, σ , se calculeaz|, tot prin analogie mecanic| sau prin analogie cu dispersia unei m|rimi aleatoare, aplicând relaûia:

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_c)^2\,|x(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt} \quad . \qquad \textbf{(4.124)}$$

În mod similar:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_c)^2 |X(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega} \quad ; \quad \sigma_\omega \text{ deviatia standard .} \qquad \textbf{(4.125)}$$

Cu cât m|rimile σ_t ðI σ_ω sunt mai reduse, cu atât semnalul respectiv spectrul sunt mai puûin dispersate sau, altfel spus, sunt mai grupate în jurul centrelor lor, în intervalele centrate pe t_c, ω_c de lungime σ_t , σ_ω fiind concentrat| cea mai mare parte din energia lor. Pentru un semnal de tip Gaussian $x(t) = e^{-a t^2} \in L^2$ având spectrul $X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ - relaûia (4.80) - calcul|m cele dou| perechi de m|rimi. Dar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-a \cdot t^2} dt = 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}} d\omega = 0$$

deoarece integrandul este impar. În consecinû| $t_c = 0$ ðI $\omega_c = 0$, ceea ce rezult| ðI din figura 4.12. În ceea ce priveðte dispersia, ea se determin| direct sau prin analogie cu legea de repartiûie normal|: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Factorul din faû| fiind acelaði, el se simplific| în relaûiile (4.124) ðI (4.125), deci nu este important. Rezult|:

$$\sigma_t = \frac{1}{2\sqrt{a}} ; \sigma_\omega = \sqrt{a} \text{ , deoarece } |x(t)|^2 = e^{-2a t^2} \text{ şi } |X(\omega)|^2 = \frac{\pi}{a} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}.$$

În domeniul de timp $[-2\sigma_t , 2\sigma_t]$ ðI respectiv în domeniul de frecvenû| $[-2\sigma_\omega, 2\sigma_\omega]$ este cuprins| o fracûiune important| din energia semnalului. Acest lucru se poate deduce din studiul funcûiei eroare, erf(x). Prin convenûie se accept| c| durata util| a oric|rui semnal, nu numai a celui Gaussian este $4\sigma_t$. În ceea ce priveðte banda util|, aici lucrurile sunt un pic mai complicate. Dac| modulul spectrului se plaseaz| grupat în jurul frecvenûei $\omega = 0$, se spune c| avem un spectru tip "trece jos" sau spectru "în banda de baz|". Un astfel de spectru este cel din figura 4.19a. Pentru el banda util|, m|surat| pe semiaxa pozitiv| este $B_u = 2\sigma_\omega$. Astfel de semnale au frecvența centrală identic nulă, $\omega_c = 0$.
Această condiție este îndeplinită, conform relației (4.123) de semnale a căror

densitate spectral| de putere, $|X(\omega)|^2$ este o funcûie par|. Din aceast| categorie fac parte semnalele reale pare ßi semnalele reale impare. Dar pentru aceste semnale ßi funcûia $|x(t)|^2$ este par|. Deci aceste semnale au ßi timpul central identic nul, $t_c = 0$. S-a demonstrat în acest mod c| semnalele reale pare sau impare au frecvenûele centrale, ω_c , ßi timpii centrali, t_c , de valoare nul|. De aceea ele se mai numesc ßi semnale de

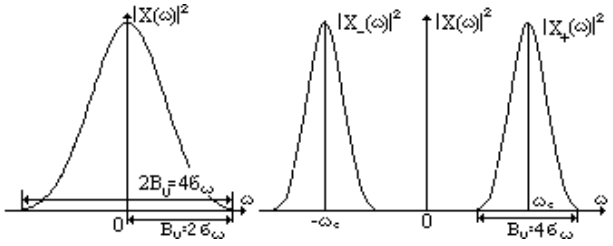


Fig. 4.19 (a) Banda util| pentru un semnal tip "trece jos"; (b) Banda unui semnal cu spectru tip "trece band|".

tip "trece jos".

Dac| îns| spectrul este grupat în jurul unei frecvenûe ω_c (ßi evident $-\omega_c$), ca în figura 4.19b, se integreaz| (4.125) numai pe semiaxa pozitiv| ßi numai pentru $|X_+(\omega)|^2$ iar $B_u = 4\sigma_\omega$ (banda util| este m|surat| întotdeauna numai pe semiaxa **ω** pozitiv.)

În continuare se consider| semnalul $y(t) = x(t + t_c)\ e^{-j\omega t_c}$ cu spectrul $Y(\omega) = e^{j\omega t_c} X(\omega + \omega_c)\ e^{j\omega_c t_c}$, unde ω_c ßi t_c sunt timpul ßi frecvenûa central| ale semnalului x(t) . Se observ| c| $|Y(\omega)| = |X(\omega+\omega_c)|$ ßi c| $|y(t)| = |x(t+t_c)|$. Semnalul y(t) are timpul central ßi frecvenûa central| nule. De asemenea se constat| prin calcul direct faptul c| dispersiile temporale ßi frecvenûiale ale semnalelor x(t) ßi y(t) sunt identice. Pentru semnalul y(t) relaûiile de calcul (4.124) ßi (4.125) se simplific| devenind:

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,|y(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt} = \frac{1}{W_x}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,|y(t)|^2\,dt\ , \qquad (4.124')$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\,|Y(\omega)|^2\,d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2\,d\omega} = \frac{1}{2\pi\ W_x}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\,|Y(\omega)|^2\,d\omega\ . \qquad (4.125')$$

Ne propunem s| g|sim o margine inferioar| pentru produsul:

$$\sigma_t{}^2 \cdot \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi\, W_x{}^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |y(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |Y(\omega)|^2 d\omega \ . \qquad \textbf{(4.126)}$$

Se ðtie îns| c|: y'(t) <—> jωY(ω) ðideci:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |Y(\omega)|^2 \ d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |y' t)|^2 dt \ , \qquad \textbf{(4.127)}$$

ceea ce reprezint| rela&ia lui Parseval scris| pentru semnalul derivat, y'(t) . Produsul $\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2$ devine:

$$\sigma_t{}^2 \cdot \sigma_\omega^2 = \frac{1}{W_x{}^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |y(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |y'(t)|^2 dt \ . \qquad \textbf{(4.128)}$$

Forma membrului drept ðscopul propus, g|sirea unei margini inferioare a produsului $\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2$ ne sugereaz| utilizarea inegalit|&ii lui Schwarz:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot y^*(t) \cdot y'(t) dt \right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot |y(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |y'(t)|^2 dt = W_x^2 \cdot \sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \qquad \textbf{(4.129)}$$

Marginea inferioar| a fost deci stabilit|, ca form|. Mai r|mâne ca ea s| fie evaluat|. Modulul unui num|r complex z = x+jy , $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ este m|rginit inferior de partea sa real|. Deoarece $y^2 \$ 0$, $|z| \$ |x| = \mathrm{Re}\{z\}$. Prin urmare vom calcula mai întâi:

$$\mathrm{Re}\{ \int_{-\infty}^{\infty} t\, y^*(t)\, y'(t)\ dt \} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t\, [\ y^*(t)\ y'(t) + y(t)\ y^{*\prime}(t)\ ]\ dt \ .$$

$$Re\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot y^*(t) \cdot y'(t) dt \right\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \left[y^*(t) \cdot y'(t) + y(t) \cdot y^{*\prime}(t) \right] dt \qquad \textbf{(4.130)}$$

Se poate recurge la integrarea prin p|r&ii remarcând c| (yy*)' = y'y*+yy*' sau c| ($|y|^2$)' = y'y*+yy*' . Se ob&ine:

Vom face presupunerea c| $|y(t)|^2$ tinde spre zero mai repede decât $1/|t|$ atunci

când $|t| \to \infty$, ceea ce nu este o condiție prea severă, și este îndeplinită în cazurile practice. În consecință, primul termen din membrul drept al relației (4.130) se anulează. Rămâne că:

$$\mathrm{Re}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t\, y^{*}(t)\, y'(t)\, dt \right\} = -\frac{1}{2}\, W_y = -\frac{1}{2}\, W_x \ ,$$

sau:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot y^{*}(t) \cdot y'(t) dt \right|^2 \geq \left(Re\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot y^{*}(t) \cdot y'(t) dt \right\} \right)^2 = \frac{1}{4} W_x^2 \qquad \textbf{(4.131)}$$

Din (4.129) și (4.131) se deduce inegalitatea:

$$\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \ . \qquad \textbf{(4.132)}$$

Notăm $T_u = 4\sigma_t$ durata utilă a semnalului și cu $B_u = 2\sigma_\omega$ sau $B_u = 4\sigma_\omega$, după caz, banda utilă a semnalului. Se ajunge la inegalitățile:

$$T_u\ B_u \geq 4 \quad \text{sau} \quad T_u\ B_u \geq 8 \ . \qquad \textbf{(4.133)}$$

În ambele cazuri concluzia care se desprinde este aceea că produsul între banda utilă și durata utilă a semnalului este limitat inferior.

În cazul semnalului gaussian s-a văzut că $\sigma_t = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ și $\sigma_\omega = \sqrt{a}$ astfel că (4.132) este verificată cu semnul egal. În general egalitatea în inegalitatea lui Schwarz se obține atunci când cele două funcții, ținând cont de faptul că y(t) și y'(t) în cazul de față, au raportul egal cu o constantă. Prin urmare egalitatea are loc atunci când se satisface relația: y'(t) = k·y(t) ecuația diferențială ce are ca soluție, dacă se consideră că y(0) = 1 , pe $y(t) = e^{k \cdot t^2/2}$ adică tocmai un semnal de tip Gauss.

Nu în toate cazurile se poate aplica metoda expusă. Spre exemplu, fie $x(t) = e^{-\omega_o t}\ \sigma(t)$ cu spectrul $X(\omega) = \frac{1}{\omega_o + j\omega}$. Se calculează:

$$\omega_c = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega\, d\omega \ / \ (\omega_o^2 + \omega^2) \right) \ / \ \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ / \ (\omega_o^2 + \omega^2) \right) = 0 \ ,$$

integrandul fiind impar. Spectrul este centrat pe $\omega_c = 0$ (vezi ðsi figura 4.11). Pentru calculul dispersiei se cere s| se calculeze $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \, d\omega}{\omega_0^2 + \omega^2}$, integral| divergent|. Pentru astfel de cazuri, din raûiuni ce le vom explica ulterior, se calculeaz| o l|rgime de band| efectiv| cu relaûia:

$$B_e = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega\right]^2}{2\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^4 \, d\omega} \qquad \textbf{(4.134)}$$

Pentru durata efectiv| a semnalului se utilizeaz| o relaûie de calcul asem|n|toare:

$$T_e = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt\right]^2}{2\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^4 \, dt} \qquad \textbf{(4.135)}$$

Din relaûiile (4.127) ðsi (4.125') se poate deduce c|:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y'(t)|^2 \, dt = W_x \cdot \sigma_\omega^2 \quad . \qquad \textbf{(4.136)}$$

Dac| se recurge la derivarea spectrului, avem perechea ty(t) <⟶> jY'(ω) din care:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |y(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y'(\omega)|^2 \, d\omega$$

ðsi ûinând seama de (4.124') se poate stabili relaûia:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y'(\omega)|^2 \, d\omega = W_x \, \sigma_t^2 \qquad \textbf{(4.137)}$$

Dar $Y(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$ unde pentru comoditate s-a notat $|Y(\omega)| = A(\omega)$ ðsi deci $Y'(\omega) = A'(\omega)e^{j\Phi(\omega)} + A(\omega)j\Phi'(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = [A'(\omega) + jA(\omega)\Phi'(\omega)]e^{j\Phi(\omega)}$. Modulul

exponen□ialei este 1 , deci $|Y'(\omega)|^2 = [A'(\omega)]^2+[A(\omega)\Phi'(\omega)]^2$. Substituind acest rezultat în (4.137) se ob□ine:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[A'(\omega)^2+|A(\omega)\Phi'(\omega)|^2\right]\right\}d\omega = W_x\cdot\sigma_t^2 \qquad \textbf{(4.138)}$$

Energia semnalului y(t), $W_y = W_x$ este independent| de $\Phi(\omega)$. Se poate pune problema ca dintre toate semnalele având aceea□i caracteristic| de modul a densit|□ii spectrale, deci □i aceea□i energie, s| se determine acel semnal care are durat| minim|. Dar acest lucru se întâmpl| evident pentru $\Phi'(\omega) = 0$, □i deci pentru un semnal cu spectrul de forma $Y(\omega) = A(\omega)e^{jC}$, C fiind o constant|:

$$(\sigma_t)^2_{min} = \frac{1}{2\pi W_x}\int_{-\infty}^{\infty}[A'(\omega)]^2\,d\omega \qquad \textbf{(4.139)}$$

Analizând (4.138) se poate deduce c| un semnal este de lung| durat| dac| fie $A'(\omega)$, fie $\Phi'(\omega)$ (fie ambele) sunt mari. Acele semnale care au varia□ii rapide în spectrul de modul sau/□i în spectrul de faz| sunt semnale "lungi".

<u>Semnale de band| limitat|</u>

Vom reaminti no□iunea de func□ie întreag|. Se spune c| f(z) , z = x+jy este func□ie întreag|, dac| este uniform| □i olomorf| (analitic|) în tot planul. O func□ie f(z) întreag| se poate dezvolta în tot planul numai prin partea Taylorian| a seriei:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \quad .$$

Func□iile întregi se clasific| dup| natura punctului de la infinit. Ele sunt func□ii:

i) constante ce au 4 ca punct regulat,
ii) polinomiale ce au 4 ca pol de ordin egal cu gradul polinomului,
iii) transcendente ce au 4 ca punct singular esen□ial.

În tot planul, cu excep□ia punctului de la infinit, o func□ie întreag| nu poate avea decât zerouri (nu □i poli).

Func□ia întreag| este indefinit derivabil| □i constantele a_n din rela□ia de dezvoltare pot fi determinate în func□ie de derivatele ei, într-un punct. Dac| se cunosc, $f(z_o)$, $f'(z_o)$, $f''(z_o)$ ... , $f^{(n)}(z_o)$, ... atunci rela□ia dat| permite calcularea valorii f(z) în orice punct din plan. Dac| $f(z)\big|_{y=0} = f(x)$ este cunoscut| în x_o , adic| se dau

$f^{(k)}(x_o)$, k $ 0 atunci f(x) este calculabil| pe toat| axa real|.

Consider|m c| f(x) [f(z)] se anuleaz| într-un interval I (domeniu D) oricât de mic al axei reale (planului complex). Atunci luând x_o 0 I (z_o 0 D) se poate constata c| toate derivatele funcûiei în acel punct sunt nule:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x - x_o} = 0 \quad etc \quad .$$

Rezult| din relaûia de dezvoltare c| funcûia este nul| pe toat| axa real| (în tot planul complex)

O funcûie x(t) <—> X(ω) se spune c| este de band| limitat| la [-B, B] dac| X(ω) / 0 pentru |ω| > B = ω_M . Relaûia de recuperare a semnalului din spectru este, în acest caz, al semnalului de band| limitat|:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \quad . \qquad \textbf{(4.140)}$$

Se extinde x(t) la planul complex z = t+ju :

$$x(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega)\, e^{j\omega z}\, d\omega \quad . \qquad \textbf{(4.141)}$$

Se demonstreaz| [49], [72] c| (4.140) este o funcûie întreag|, olomorf| în tot planul. În consecinû|, ea este indefinit derivabil| în tot planul Õi deci Õi pe axa real|. Exist| deci:

$$x^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} (j\omega)^k\, X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \quad k \geq 0 \quad . \qquad \textbf{(4.142)}$$

Se poate trage concluzia, pe baza celor expuse în cazul funcûiilor întregi, c| x(t) nu se poate anula pe nici un interval al axei reale (eventual într-o mulûime num|rabil| de puncte de m|sur| Lebesque nul|) Õi prin urmare nu poate avea suportul în timp m|rginit. Raûionamentul poate fi f|cut Õi pentru semnale cu durat| limitat|. Acelea au spectrul cu suport nem|rginit.

Toate semnalele de band| limitat| sunt de energie finit| sau sunt de putere medie finit|.

În leg|tur| cu semnalele de band| limitat| d|m teorema lui Bernstein.

Teorema lui Bernstein

Un semnal de band| limitat| la "ω_M õi m|rginit, |x(t)| # M are toate derivatele m|rginite:

$$|x^{(k)}(t)| \le \omega_M^k \quad M \quad . \tag{4.143}$$

Se spune c| un semnal de band| limitat| õi m|rginit este un semnal "lent". (cu variaûie lent|).

Pentru demonstraûie, plecând de la (4.140) obûinem:

$$|x(t)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} |X(\omega)| \, d\omega \overset{\Delta}{=} M \quad . \tag{4.144}$$

Dar, conform (4.142), x(t) este indefinit derivabil| õi cu derivata dat| de respectiva relaûie. Considerând modulul derivatei de ordin k obûinem:

$$|x^{(k)}(t)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} |\omega|^k \, |X(\omega)| \, d\omega \quad .$$

Cum îns| |ω| # ω_M, integrala se poate majora:

$$|x^{(k)}(t)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} |\omega|^k |X(\omega)| d\omega \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \omega_M^k |X(\omega)| d\omega = \omega_M^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} |X(\omega)| d\omega ,$$

õi ûinând seama de (4.144) rezult|:

$$|x^{(k)}(t)| \le \omega_M^k \quad M \quad ,$$

chiar enunûul teoremei lui Bernstein.

Ca o consecinû| a teoremei lui Bernstein vom evalua superior creõterea semnalului de band| limitat| x(t). Fie k = 1 : |x'(t)| # ω_MM . Se calculeaz|:

$$\left| \int_t^{t+\tau} x'(t) \, dt \right| \le \int_t^{t+\tau} |x'(t)| \, dt \le \int_t^{t+\tau} \omega_M \; M \; dt = \omega_M \cdot M \cdot \tau \quad .$$

Dar prima integral| se poate efectua:

$$\int_{t}^{t+\tau} x'(t)\,dt = x(t+\tau) - x(t) \ ,$$

Õi ajungem la concluzia:

$$|\ x(t+\tau)\ -\ x(t)| \le \omega_M \cdot M \cdot \tau \quad . \qquad \textbf{(4.145)}$$

Aceast| rela&ie are dou| interpret|ri importante în practic|:

i) Varia&ia semnalului relativ| la M este majorat| de $\omega_M\tau$:

$$\frac{|x(t+\tau)\ -\ x(t)|}{M} \le \omega_M\ \tau \ ,$$

Õi pentru $\omega_M\tau$ n 1 este neglijabil|.

Pentru intervale de timp τ mult mai mici decât inversul benzii:

$$\tau << \frac{1}{\omega_M} = \frac{1}{B} = \frac{1}{2\pi f_M} \ , \qquad \textbf{(4.146)}$$

semnalul x(t), de band| limitat|, poate fi considerat constant .

ii) Excursia maxim| a semnalului x(t) ce satisface condi&ia de a fi m|rginit |x(t)|#M este 2M . Aplicând rela&ia (4.145) cu x(t+τ) = M Õi x(t) = -M se poate limita inferior timpul de tranzi&ie (de ridicare în exemplul considerat) între vârfuri:

$$\frac{2M}{M} \le \omega_M\ \tau \ ;\ \ \tau \ge \frac{2}{\omega_M} = \frac{1}{\pi f_M} \quad . \qquad \textbf{(4.147)}$$

S| compar|m acest rezultat cu cel ob&inut în evaluarea timpului de tranzi&ie f|cut| în '4.1.5 punctul 8. Pentru cazul trunchierii spectrului unui semnal rectangular la "ω_o am g|sit c| timpul de tranzi&ie în semnalul corespunz|tor spectrului trunchiat (deci semnal de band| limitat|) între -1 Õi +1 este de - $2\pi/\omega_o$. Dar ω_o trebuie identificat cu ω_M .

În '3.3.5 am prezentat efectul trunchierii seriei Fourier asupra semnalului

$$|\ x^{(k)}(t+\tau)\ -\ x^{(k)}(t)| \le \omega_M^{k+1} \cdot M \cdot \tau \ , \qquad \textbf{(4.148)}$$

periodic. Acolo $\omega_M = 2n\omega_o$ iar timpul de tranzi&ie (de ridicare) este $2\pi/\omega_M$ (rela&ia 3.81). Ambele rezultate sunt în acord cu concluzia (4.147).

Dac| se integreaz| $x^{(k+1)}(t)$ se poate ob&ine o rela&ie ce generalizeaz| rela&ia (4.145):

sau:

$$\frac{|x^{(k)}(t+\tau) - x^{(k)}(t)|}{M} \le \omega_M^{k+1} \cdot \tau \quad ,$$

de unde concluzia c| variaûiile semnalului într-un interval de timp τ dat sunt cu atât mai reduse, cu cât banda semnalului este mai redus|.

Fie o sinusoid| x(t) =Mûsin(ω$_o$t+ϕ). Ea este limitat| la M iar banda este de asemenea limitat| la ω$_M$=ω$_o$. Derivatele sale sunt x$^{(k)}$(t) = M sin(ω$_o$t+ϕ+kπ/2) . În momentele de timp t ce satisfac ecuaûia |sin(ω$_o$t+ϕ+kπ/2)| = 1 , |x$^{(k)}$(t)| = Mω ßi deci sinusul este un semnal ce atinge viteza de variaûie maxim posibil| la o band| dat|, deoarece inegalitatea lui Bernstein este satisf|cut| cu semnul egal.

Limita M poate fi calculat| în funcûie de energia semnalului:

$$|x(t)|^2 \le \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \right|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Am aplicat mai sus inegalitatea lui Schwartz. Se poate continua observând c| unul din factori este chiar energia W a semnalului iar cel|lalt este 2ω$_M$.

$$|x(t)|^2 \le 2W\,\omega_M \quad ; \quad |x(t)| \le \sqrt{2W\,\omega_M} = M \quad . \qquad \textbf{(4.149)}$$

În mod asem|n|tor, derivata poate fi m|rginit| superior prin:

$$\left|x^{(k)}(t)\right|^2 \le \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} (j\omega)^k X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} |X(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \omega^{2k} d\omega =$$

$$= W \frac{\omega^{2k+1}}{2k+1} \Bigg|_{-\omega_M}^{\omega_M} = \frac{2W\omega_M^{2k+1}}{2k+1}$$

adic|:

$$|x^{(k)}(t)| \le \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\ \omega_M^k\ M \quad ; \quad M = \sqrt{2W \cdot \omega_M} \quad . \qquad \textbf{(4.150)}$$

Semnale cauzale. Teorema Paley-Wiener

Semnalele cauzale sunt prin definiûie nule pentru t < 0 ßi satisfac relaûia x(t)σ(t) = x(t) . Componentele par| ßi respectiv impar| ale unui astfel de semnal nu sunt niciodat| identic nule:

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}x(t), & t > 0 \\ \frac{1}{2}\breve{x}(t), & t < 0 \end{cases}, \quad \breve{x}(t) = x(-t)$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}x(t), & t > 0 \\ -\frac{1}{2}\breve{x}(t), & t < 0 \end{cases}, \quad \breve{x}(t) = x(-t) \ .$$

$x_i(t) \neq 0$ œt implic| x(t) = 0 pentru t > 0 , ceeace este imposibil. Concluzia imediat| a prezen□ei componentelor par| õi impar| este c| spectrul este complex:

$$\breve{x}(t) = x_p(t) + x_i(t) \leftrightarrow X(\omega) = X_R(\omega) + j\,X_I(\omega) \ ;$$

$$x_p(t) \leftrightarrow X_R(\omega) \ si \ x_i(t) \leftrightarrow j\,X_I(\omega) \ .$$

El nu poate fi niciodat| numai real sau numai pur imaginar.

În leg|tur| cu spectrul semnalelor cauzale d|m o teorem| a c|rei demonstra□ie se poate g|si în [49]:

Teorema Paley - Wiener

Condi□ia necesar| õi suficient| pentru ca un semnal x(t) s| fie cauzal este ca integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|log|X(\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty \qquad \textbf{(4.151)}$$

s| fie convergent|.

O prim| concluzie care se poate trage din aceast| teorem| este aceea c| $|X(\omega)|$, modulul spectrului unui semnal cauzal, nu se poate anula pe nici un interval al axei ω, oricât de redus. În caz contrar, integrala ar fi divergent|, $\log(0_+) = -4$. Modulul se poate anula cel mult într-o mul□ime num|rabil| de puncte, de m|sur| Lebesque nul|.

Aceast| concluzie este extrem de util| în studiul sistemelor realizabile fizic care sunt sigur cauzale. Deci semnalele cauzale sunt de band| nelimitat|.

Comportarea asimptotic| a transformatei Fourier.

Fie x(t) un semnal cauzal cu spectrul X(ω). Expresia spectrului este:

$$X(\omega) = \int_{0_+}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \ ,$$

ði aplicând formula de integrare prin p|rûi obûinem:

$$X(\omega)=\frac{x(t)}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{\infty}^{0^+}+\frac{1}{j\omega}\int_{0^+}^{\infty}x'(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{x(0^+)}{j\omega}+\frac{1}{j\omega}\int_{0^+}^{\infty}x'(t)e^{-j\omega t}dt$$

unde s-a considerat c| x(4) = 0 . Repet|m procedura de integrare prin p|rûi pentru a doua integral|:

$$X(\omega)=\frac{x(0^+)}{j\omega}+\frac{x'(0^+)}{(j\omega)^2}+\frac{1}{(j\omega)^2}\int_{0^+}^{\infty}x''(t)e^{-j\omega t}dt\ ;\ x'(\infty)=0\ .$$

Procedeul poate continua ði, în ipoteza valorii finale nule ði a derivatelor la infinit nule, obûinem expresia:

$$X(\omega)=\frac{x(0^+)}{j\omega}+\frac{x'(0^+)}{(j\omega)^2}+\frac{x''(0^+)}{(j\omega)^3}+\ldots+\frac{x^{(k)}(0^+)}{(j\omega)^k}+\ldots \quad \textbf{(4.152)}$$

Dac| semnalul cauzal are x(0+) ... 0 , deci nu pleac| din origine, atunci la frecvenûe mari predomin| primul termen, astfel c| aproximarea X(ω) – x(0+)/(jω) este bun|. Se spune c| ordinul de m|rime al spectrului este cel al lui 1/ω ði se scrie X(ω)=**0**(1/ω). Referindu-ne la exemplul 5 din '4.1.5: $x(t)=e^{-\omega_o t}\sigma(t)\leftrightarrow\frac{1}{\omega_o+j\omega}$.
Pentru acest semnal (vezi ði figura 4.11) x(0+) = 1 deci X(ω) – 1/jω pentru frecvenûe mari (în comparaûie cu ω_o).

Fie acum semnalul x(t) = $e^{-t}\sin(\omega_o t)\sigma(t)$ cu x(o+) = 0 dar x'(0+) = ω_o ... 0 . Spectrul s|u se determin| ca produs între $\sin(\omega_o t)$ ði $e^{-t}\sigma(t)$, aplicând teorema convoluûiei spectrelor, relaûia (4.67):

$$\sin\omega_o t\ e^{-t}\sigma(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_o)-\delta(\omega+\omega_o)\right]*\frac{1}{1+j\omega}=$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1+j(\omega-\omega_o)}-\frac{1}{1+j(\omega+\omega_o)}\right]\ .$$

În final:

$$X(\omega)=\frac{\omega_o}{1+\omega_o^2-\omega^2+2j\omega}\ .$$

Pentru frecvenţe ω mari termenul ce predomină la numitor este $-\omega^2$ deci, $X(\omega) \sim \omega_o/(-\omega^2)$ (ω mare) ceea ce corespunde cu $x'(0^+)/(j\omega)^2 = \omega_o/(-\omega^2)$.

În figura 4.20 a se prezintă forma semnalului cauzal nul în origine dar având

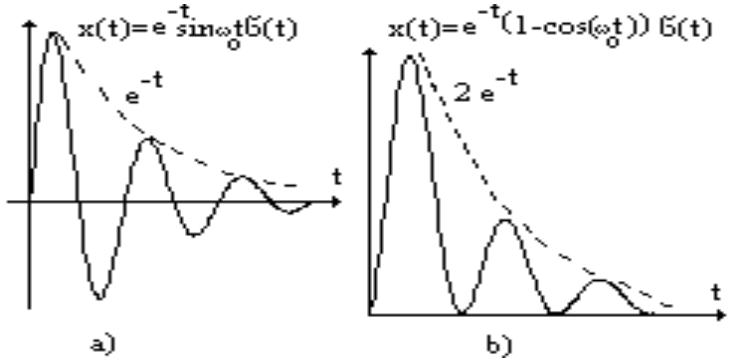


Fig. 4.20 Semnale cauzale având $x(0^+) = 0$ dar: (a) $x'(0^+) \neq 0$; (b) $x'(0^+) = 0$, dar $x''(0^+) \neq 0$.

derivata nenulă în origine. Un astfel de semnal se poate spune că pleacă "repede" din origine. Spre deosebire de acesta, semnalul din figura 4.20 b are şi prima derivată nulă în origine $x'(0^+) = 0$ dar $x''(0^+) \neq 0$. El pleacă "mai încet" din origine. Spectrul său se calculează punând semnalul sub forma:

$$x(t) = e^{-t}\,\sigma(t) - e^{-t}\cos\omega_o t\,\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1+j\omega} * \pi\,[\,\delta(\omega+\omega_o) + \delta(\omega-\omega_o)\,]\,.$$

Efectuând calculele rezultă:

$$X(\omega) = \frac{\omega_o^2}{1+\omega_o^2-\omega^2+j\,\omega\,(\,3+\omega_o^2-\omega^2\,)}\quad .$$

La frecvenţe mari termenul în ω^3 , $-j\omega^3$, predomină la numitor astfel că $X(\omega) \sim \omega/(-j\omega^3)$. Rezultatul este în concordanţă cu (4.152) deoarece $x(0^+) = 0$, $x'(t)=e^{-t}(\cos\omega_o t - 1+\omega_o\sin\omega_o t)$ şi deci, $x'(0^+) = 0$ dar $x''(t) = e^{-t}(1-\cos\omega_o t-2\omega_o\sin\omega_o t+ + \omega\cos\omega_o t)$, $x''(0^+) = \omega$ diferit de 0 . Cu cât mai multe dintre derivatele din origine sunt nule (pe lângă valoarea semnalului din origine), cu atât mai rapid scade spectrul său la frecvenţe mari. Uneori în origine este plasat un impuls Dirac $a\delta(t)$, semnalul având expresia:

$$x(t) = a\,\delta(t) + y(t) \leftrightarrow a + Y(\omega)\quad , \qquad \textbf{(4.153)}$$

în care y(t) este o funcţie uzuală. Spectrului $Y(\omega)$ i se aplică toate considerentele anterioare, astfel că spectrul $X(\omega)$ va tinde asimptotic spre valoarea de piedestal, a, printr-o funcţie al cărei ordin îl dă y(t) , după valoarea sa şi a derivatelor sale din origine.

4.2 R|spunsul în frecven|| al sistemelor liniare õi invariante în timp

Fie un sistem LIT având semnalul de intrare x(t) õi semnalul de ieõire y(t). El este complet caracterizat ca õi comportare în timp de r|spunsul la impulsul unitar h(t). Cunoscând h(t) se poate determina r|spunsul sistemului în domeniul timp, prin intermediul convolu|iei:

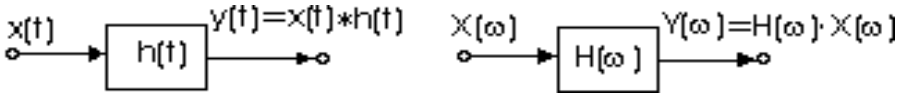


Fig. 4.21 (a) Sistem LIT descris prin h(t); (b) Sistem LIT descris prin H(ω) = ö {h} .

$$y(t) = h(t) * x(t) \ .$$

În condi|iile în care opera|ia este posibil|, exist| õi transformatele Fourier ale termenilor. Aplicând rela|iei de mai înainte transformarea Fourier, õi |inând seama de teorema de convolu|ie se ob|ine:

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{ h(t) * x(t)\} = \mathcal{F}\{ h(t)\}(\omega) \cdot \mathcal{F}\{ x(t)\}(\omega) \ ,$$

õi deci:

$$Y(\omega) = H(\omega)\ X(\omega) \ \ ; \ \ H(\omega) = \mathcal{F}\{ h(t)\} \ . \qquad \textbf{(4.154)}$$

Dac| opera|ia de calcul a r|spunsului SLIT în timp este relativ complicat|, determinarea spectrului semnalului de ieõire în func|ie de spectrul semnalului de intrare se reduce la o simpl| înmul|ire.

Func|ia H(ω) , transformata Fourier a r|spunsului la impuls h(t) se nume|te "r|spunsul în frecven||" al sistemului. Dac| la intrarea SLIT se aplic| impulsul unitar δ(t) la ieõire apare r|spunsul la impuls: $y(t) = h(t) * \delta(t)$. Aceast| ecua|ie trecut| în domeniul frecven|| devine Y(ω)=H(ω)1(ω) . Deoarece spectrul distribu|iei Dirac este constanta 1(ω) , la ieõirea SLIT apare chiar r|spunsul în frecven|| H(ω) . În practic| H(ω) se m|soar| "punct cu punct" sau prin vobulare.

Dac| $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\Phi(\omega)}$, $|H(\omega)|$ se numeõte modulul r|spunsului în frecvenû| sau caracteristica de modul sau pur õi simplu caracteristica de frecvenû|. $\Phi(\omega)$ se numeõte faza r|spunsului în frecvenû| sau caracteristica de faz|. În cazul amplificatoarelor se vorbeõte despre caracteristica amplificare-frecvenû|, - echivalent| lui $H(\omega)$ - despre caracteristica de modul a amplificatorului, - echivalent| lui $|H(\omega)|$ õi despre caracteristica de faz| a amplificatorului - echivalent| lui $\Phi(\omega)$. De cele mai multe ori îns|, în jargonul tehnic se vorbeõte despre caracteristica de frecvenû|, subînûelegând caracteristica de modul õi despre caracteristica de faz|.

Dac| se cunoaõte r|spunsul în frecvenû| $H(\omega)$ al unui sistem, r|spunsul $y(t)$ la un semnal de intrare $x(t)$ oarecare se determin| dup| cum urmeaz|:

- se calculeaz|: $X(\omega) = \ddot{o}\{x(t)\}$;
- se determin| : $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$; $H(\omega) = \ddot{o}\{h(t)\}$;
- se calculeaz|: $y(t) = \ddot{o}^{-1}\{Y(\omega)\}$.

4.2.1 Calculul r|spunsului unui sistem liniar õi invariant în timp la un semnal de intrare periodic

Fie $x(t)$ un semnal periodic, exprimat sub forma seriei Fourier exponenûiale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{j k \omega_o t} \quad . \qquad \textbf{(4.155)}$$

R|spunsul SLIT la exponenûiala complex| se g|seõte uõor deoarece ea este funcûie proprie a SLIT - vezi relaûia (3.3). Operatorul sistemului fiind liniar, r|spunsul la o combinaûie liniar| de exponenûiale complexe de forma (4.155) este:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(k\omega_o) e^{j k \omega_o t} \quad . \qquad \textbf{(4.156)}$$

Fie de exemplu $x(t) = A \cos \omega_o t = \frac{A}{2} (e^{-j\omega_o t} + e^{j\omega_o t})$. R|spunsul $y(t)$ se calculeaz| aplicând relaûia (4.156):

$$y(t) = \frac{A}{2} [H(-\omega_o) e^{-j\omega_o t} + H(\omega_o) e^{j\omega_o t}] .$$

Dar $H(\omega_o) = |H(\omega_o)| e^{j\Phi(\omega_o)}$ õi $H(-\omega_o) = |H(\omega_o)| e^{-j\Phi(\omega_o)}$ deoarece caracteristica de modul este par| iar caracteristica de faz| este impar| - conform propriet|ûii 11, '4.11-relaûia (4.30). În consecinû|:

$$y(t) = \frac{A}{2} |H(\omega_o)| \cdot \{ e^{j[\omega_o t + \Phi(\omega_o)]} + e^{-j[\omega_o t + \Phi(\omega_o)]} \} ,$$

sau:

$$y(t) = A |H(\omega_o)| \cos[\omega_o t + \Phi(\omega_o)] .$$

În mod similar se deduce c|, dac| la intrare se aplic| un semnal:

$$x(t) = A \cos(\omega_o t + \varphi) , \qquad \textbf{(4.157)}$$

la ie0ire apare:

$$y(t) = A |H(\omega_o)| \cos[\omega_o t + \varphi + \Phi(\omega_o)] . \qquad \textbf{(4.158)}$$

Aceast| constatare permite determinarea "punct cu punct" a caracteristicilor |H(ω)| 0i Φ(ω) în func0ie de ω , utilizând schema de m|surare din figura 4.22. La intrarea SLIT se aplic| o oscila0ie sinusoidal| de la un generator ce furnizeaz| semnalul (4.157). Voltmetrul electronic V1 permite m|surarea valorii efective A/ 2 a sinusoidei de la intrare iar voltmetrul electronic V2 m|soar| valoarea efectiv| A%|H(ω$_o$)|/ 2 a sinusoidei de la ie0ire - rela0ia (4.158). Prin raportul V2/V1 al celor dou| tensiuni se determin| |H(ω$_o$)| , la frecven0a ω$_o$ la care a fost fixat generatorul G.

Dac| tensiunile x=V1 de intrare 0i y=V2 de ie0ire se aplic| la intrarea unui osciloscop cu dou| spoturi, sincronizat de preferin0| extern cu semnalul de intrare (sau cu un semnal sincron cu cel de intrare deoarece aceasta este de multe ori prea mic ca amplitudine pentru a sincroniza osciloscopul), se ob0ine o imagine similar| celei din figura 4.23.

M|surând lungimea segmentului AB 0i a segmentului CB se poate determina,

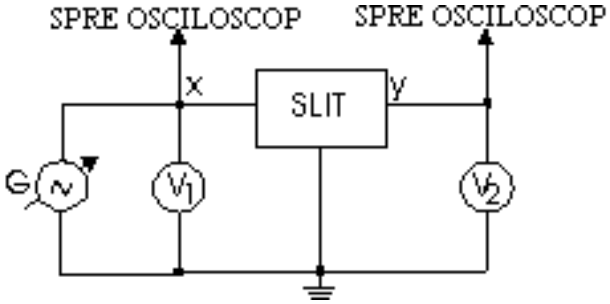


Fig. 4.22 Conectarea SLIT pentru determinarea "punct cu punct" a r|spunsului în frecven0|.

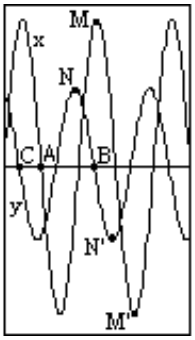


Fig. 4.23 Imaginea ce se ob0ine pe osciloscop în cazul vizualiz|rii semnalelor din figura 4.22.

dup| regula de "trei simpl|", faza.

Unei perioade, proporţional| cu CB, îi corespunde un defazaj 2π . Se caut| defazajul corespunz|tor segmentului AB . El este $\Phi(\omega_o)=2\pi$ AB/CB . Punctele A şi B trebuie s| fie luate pe ramuri de acelaşi tip ale celor dou| semnale, amândou| ridic|toare sau amândou| coborâtoare (cazul din desen). Mai trebuie avute în vedere câteva precauţiuni pentru ca m|surarea s| fie corect| dar ele constituie obiectul unei lucr|ri practice, aşa c| nu vom insista. M|surând, pe vertical|, distanţa între punctele NN' şi punctele MM' , şi ţinând seama de sc|rile de tensiune ale canalelor osciloscopului se poate determina şi $|H(\omega_o)|$, f|r| a mai recurge la cele dou| voltmetre. Dup| terminarea m|sur|rii şi notarea rezultatelor, se modific| frecvenţa generatorului şi se determin| o nou| pereche de valori $|H|$ şi Φ , la noua frecvenţ|.

4.2.2 Calculul r|spunsului unui sistem liniar şi invariant în timp caracterizat printr-o ecuaţie diferenţial| liniar| şi cu coeficienţi constanţi

Circuitele electrice cu constante concentrate, liniare şi invariante în timp pot fi descrise (caracterizate) prin ecuaţii diferenţiale de forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{d t^k} \quad , \quad a_N \neq 0 \quad . \qquad \textbf{(4.159)}$$

Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale ar permite determinarea r|spunsului la impuls h(t) iar apoi, din acesta s-ar putea determina r|spunsul în frecvenţ| $H(\omega)$. Dificult|ţile de calcul sunt îns| mult prea mari şi de aceea se prefer| calea invers|. Se determin| mai întâi r|spunsul în frecvenţ| $H(\omega)$ aplicând propriet|ţile transformatei Fourier iar ulterior se determin|, aplicând transformarea Fourier invers|, h(t). Vom aplica ecuaţiei transformarea Fourier şi ne vom prevala de proprietatea de liniaritate precum şi de proprietatea legat| de derivata semnalului:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}; \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega).$$

În final se deduce $H(\omega)$ prin:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} \quad a_N \neq 0 \quad . \qquad \textbf{(4.160)}$$

Se pot desprinde dou| concluzii importante:

i) **Funcţia r|spuns în frecvenţ| este, pentru circuitele electrice cu constante concentrate, de tip fracţie raţional| de variabila (jω) .**

ii) **Coeficienţii puterilor variabilei (jω) din r|spunsul în frecvenţ| sunt aceeaşi cu coeficienţii ce intervin în structura ecuaţiei diferenţiale ce descrie sistemul (circuitul).**

Cunoscând una dintre forme (4.159) sau (4.160) cealalt| poate fi scris| imediat.

O fracţie raţional| poate fi descompus| într-o sum| de fracţii simple. Pentru ca aceste fracţii simple s| aib| numai coeficienţi reali, numitorii trebuie s| fie forme de gradul întâi în (jω) sau forme de gradul doi în (jω). Num|r|torii sunt atunci o constant| respectiv o form| de gradul întâi în (jω). Descompunerea în fracţii simple fiind realizat|, se poate trece la determinarea r|spunsului la impuls, h(t) utilizând transformarea Fourier invers| sau tabele de perechi semnal - transformat|.

Exemple

i) Fie SLIT cauzal, descris de ecuaţia diferenţial| de ordin unu.

$$\frac{d\,y(t)}{dt} + \omega_o\; y(t) = k\,\omega_o\, x(t)\ ,\ \omega_o > 0\ ,\ k > 0\ .$$

Se scrie imediat r|spunsul în frecvenţ|:

$$H(\omega) = \frac{k\ \omega_o}{j\,\omega + \omega_o}\ .$$

Utilizând tabelele de transformate şi cunoscând c| sistemul este cauzal, se determin| r|spunsul la impuls:

$$h(t) = k\,\omega_o\ e^{-\omega_o t}\ \sigma(t)\ .$$

ii) Fie SLIT cauzal, descris de ecuaţia diferenţial| de ordinul doi:

$$\frac{d^2\,y(t)}{d\,t^2} + 6\ \frac{d\,y(t)}{d\,t} + 8\,y(t) = \frac{d\,x(t)}{d\,t} + 3\,x(t)\ . \qquad \textbf{(4.161)}$$

Funcţia r|spuns în frecvenţ| este:

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 3}{(\ j\omega)^2 + 6(\ j\omega) + 8} = \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)}\ . \qquad \textbf{(4.162)}$$

Aplicând una din metodele de determinare a coeficienţilor descompunerii obţinem:

$$H(\omega) = \frac{0,5}{j\omega + 2} + \frac{0,5}{j\omega + 4} \quad .$$

Se determin/ acum, ðtiind c/ sistemul este cauzal, r/spunsul la impuls, utilizând tabelele:

$$h(t) = 0.5\ (\ e^{-2t} + e^{-4t}\ )\ \sigma(t)\ .$$

iii) Consider/m acum tot un SLIT cauzal, descris printr-o ecuaîie diferenîial/ de ordin doi:

$$\frac{d^2 y(t)}{d t^2} + 2\ \frac{d\, y(t)}{d t} + 2\, y(t) = \frac{d\, x(t)}{d t} + 2\, x(t)\ , \qquad \textbf{(4.163)}$$

dar care are r/spunsul în frecvenî/:

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 2}{(\ j\omega)^2 + 2(\ j\omega) + 2}\ , \qquad \textbf{(4.164)}$$

$$H_1(\omega) = \frac{1-j}{2} \cdot \frac{1}{j\omega - a_1} + \frac{1+j}{2} \cdot \frac{1}{j\omega - a_2}$$

$$h(t) = [\ \frac{1-j}{2} e^{a_1 t} + \frac{1+j}{2} e^{a_2 t}\ ]\ \sigma(t) = [\ \frac{1-j}{2} e^{-t} e^{jt} + \frac{1+j}{2} e^{-t} e^{-jt}\ ]\ \sigma(t) =$$

$$h(t) = \sqrt{2}\ e^{-t} \cos\ (t - \frac{\pi}{4}\ )\ \sigma(t)\ .$$

$$= [\ \frac{1}{2} e^{-t}(\ e^{jt} + e^{-jt}\ ) - \frac{j}{2} e^{-t}(\ e^{jt} - e^{-jt}\ )\ ]\ \sigma(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t\ )\ \sigma(t)\ .$$

cu numitorul având r/d/cini imaginare. Nimic nu ne împiedic/ s/ proced/m ca mai înainte, formula de inversiune fiind valabil/ ði pentru cazul 1/(jω+a) , a 0 ÷ . R/d/cinile numitorului sunt $a_{1,2}$ = -1 "j ði prin urmare:

Se poate scrie acum h(t):

În final:

Aceeaði metod| se poate aplica ði pentru a determina r|spunsul sistemului la un semnal de intrare oarecare, x(t) .

Pentru aceasta se determin| X(ω) , utilizând transformarea Fourier direct|. Prin produs se determin| spectrul r|spunsului Y(ω) = H(ω)⊗X(ω) iar apoi, prin descompunerea în frac□ii simple a lui Y(ω) chiar y(t).

Exemple

1) Fie sistemul descris de ecua□ia (4.161). La intrarea sa se aplic/ semnalul $x(t)=e^{-t}\sigma(t)$ *□i se caut/ r/spunsul y(t) .*

Spectrul semnalului este X(ω) = 1/(1+jω) , □i având în vedere r/spunsul în frecven□/ H(ω) al sistemului, dat prin rela□ia (4.162), se deduce spectrul semnalului de ie□ire:

$$Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)=\frac{j\omega+3}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+4)} .$$

Se procedeaz/ la descompunerea în frac□ii simple:

$$Y(\omega)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{j\omega+2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{j\omega+4} .$$

Sistemul (□i semnalul de intrare) este cauzal deci □i r/spunsul s/u este cauzal, a□a c/:

$$y(t)=\left(\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{6}e^{-4t}\right)\sigma(t) .$$

2) La intrarea sistemului caracterizat de ecua□ia diferen□ial/ (4.163), având r/spunsul în frecven□/ (4.164) se aplic/ semnalul $x(t) = 2e^{-2t}\sigma(t)$ *□i se cere r/spunsul y(t).*

Spectrul semnalului de intrare este: X(ω) = 2/(jω+2) □i deci:

$$Y(\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+2(j\omega)+2}\cdot\frac{2}{j\omega+2}=\frac{2}{(j\omega)^2+2(j\omega)+2}$$

$$Y(\omega)=-\frac{j}{j\omega-a_1}+\frac{j}{j\omega-a_2} \qquad a_{1,2}=-1\pm j$$

$$y(t)=\left(-j e^{a_1 t}+j e^{a_2 t}\right)\sigma(t)=\left(-j e^{-t}e^{jt}+j e^{-t}e^{-jt}\right)\sigma(t)=$$

$$=-j e^{-t}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\sigma(t)=2e^{-t}\sin t\,\sigma(t) .$$

4.2.3 Reprezentarea caracteristicilor de frecven□/

S-a ar|tat c| un semnal cauzal are un spectru complex ('4.1.8). Dar h(t) , pentru sistemele realizabile este cauzal □i deci spectrul s|u H(ω) , numit □i r|spunsul

în frecven| al sistemului este complex. Evident, vom lua în considerare ði sisteme necauzale, utilizate în teoria semnalelor ði a sistemelor, care nu au H(ω) neap|rat complex. În practica curent| îns| este de reprezentat varia ia unei m|rimi complexe H(ω) cu frecven a. Se pot reprezenta modulul ði faza în dou| grafice separate sau, se poate utiliza o reprezentare în coordonate polare, ob inând hodograful func iei complexe H(ω) .

O problem| major| care apare în practic| este legat| de ecartul mare de varia ie al frecven ei ði al modulului r|spunsului în frecven |. Dac| ne referim la domeniul audio "standard" f : 20Hz) 20000Hz este clar c| nu putem reprezenta un detaliu pentru varia ia lui |H(ω)| în jurul frecven ei f = 20Hz deoarece unitatea de m|sur| ce se poate lua este de, s| zicem 20cm pentru 20000Hz ceeace înseamn| c| pe 1 cm de ax| se reprezint| 1000Hz sau 1mm de ax| corespunde la 100Hz ! Prin urmare 20Hz nici nu este reprezentabil,cu atât mai pu in detalii în jurul acestei frecven e.

În mod curent, la filtre sau la alte circuite, |H(ω)| se modific| crescând sau sc|zând de mii de ori. Prin urmare aceeaði problem| apare ði cu axa vertical| pentru |H(ω)| .

Acesta este motivul pentru care reprezentarea modulului r|spunsului în frecven | se face în coordonate logaritmice, f|r| îns| a exclude, atunci când este posibil|, utilizarea coordonatelor liniare.

Axa frecven elor se etaloneaz| în $\log_{10}\omega = \lg\omega$, $\omega > 0$, începând evident cu o frecven | nenul|. Prin defini ie între frecven ele ω_1 ði $10\omega_1$ avem o "decad|" iar între frecven ele ω_1 ði $2\omega_1$ o "octav|".

Spre exemplu între 2π@500rad/sec (500Hz) ði 2π@5000rad/sec (5000Hz) avem o decad|. Tot o decad| avem ði între 2π@10^6rad/sec ði 2π@10^7rad/sec, de i lungimea domeniilor de frecven | nu este aceeaði. În schimb raportul frecven elor este acelaði.

În axe logaritmice unei decade i se confer| o anumit| lungime ði, pentru fixarea ideilor, fie ea l = 50mm . Se pune întrebarea ce segment x_2 , pe axa lg ω trebuie acordat unei octave? Se aplic| regula de "trei simpl|" sub forma:

lg10 ..... l = 50 [mm]
lg2 ..... x_2 [mm]

de unde x_2 = l@lg2 = 50@0.3 = 15mm.

În mod asem|n|tor se determin| lungimea segmentului x_k ce trebuie acordat unei frecven e de k ori mai mari decât frecven a din stânga intervalului reprezentat:

$$x_k = l \cdot \log_{10} k = l \cdot \lg k \qquad 1 < k < 10 \quad . \tag{4.165}$$

În figura 4.24 se arat| o ax| lgf , f [Hz] , gradat| între 0,1Hz ði 100Hz , deci într-un interval de trei decade. Se pot observa marcate câteva decade ði câteva octave. Se re ine c| octava ði decada nu se definesc ca diferen | de frecven e ci ca rapoarte de frecven e. În axe logaritmice rapoartele apar ca diferen e. Axa poate fi gradat| ði în lgω [ω] = rad/sec , neexistând practic deosebiri între cele dou| tipuri de axe.

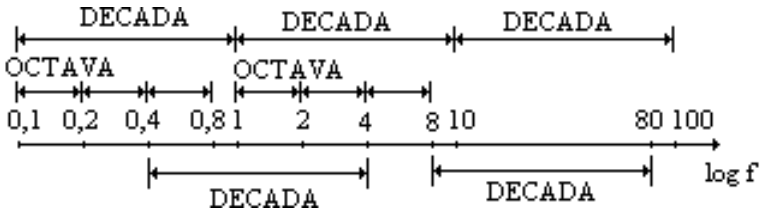


Fig 4.24 Gradarea unei axe logaritmice de frecvenû| [f]=Hz , $\log_{10}$f , între 0,1Hz õi 100Hz , de-a lungul a trei decade.

Axa vertical| se gradeaz| în decibeli. Decibelul este unitatea ce m|soar| creõteri sau sc|deri multiplicative faû| de un nivel de referinû|. Dac| nivelul de referinû| este 1 atunci decibelul d| variaûia "absolut|" a m|rimii.

Dac| H_o este un nivel de referinû|, nivelul lui $|H(\omega)|$ se defineõte prin:

$$A^{[dB]} = 20\ \log_{10} \frac{|H(\omega)|}{H_o} = 20\ \lg \frac{|H(\omega)|}{H_o} \ . \qquad \textbf{(4.166)}$$

O creõtere cu "20dB" înseamn| c| $|H(\omega)| = 10H_o$. O sc|dere cu 20dB, A=-20, înseamn| c| $|H(\omega)| = 0{,}1@H_o$. O creõtere cu 40dB înseamn| $|H(\omega)| = 10^2@H_o$, iar o sc|dere cu 40dB , (-40dB) înseamn| $|H(\omega)| = 10^{-2}@H_o$.

Dac| se ia H_o=1, atunci:

$$A^{[dB]} = 20\ \lg\ |H(\omega)| \ . \qquad \textbf{(4.167)}$$

Nivelul de 30dB semnific| c| $|H(\omega)|$ satisface ecuaûia 30 = 20lg$|H(\omega)|$, $|H(\omega)|=10^{1,5}$ = 31,6 . Nivelul de -42dB conduce la -42 = 20lg$|H(\omega)|$, $|H(\omega)|=10^{-42/20}=0{,}79@10^{-2}$. Dac| L este unitatea de lungime ce se aloc| pentru 20dB atunci nivelului de 20lgn decibeli i se aloc| o lungime y_n:

$$y_n = L \cdot \lg\ n \quad 1 < n < 10 \ . \qquad \textbf{(4.168)}$$

Problema grad|rii axei verticale este similar| grad|rii axei orizontale, dup| cum se poate remarca în urma analizei comparative a relaûiilor (4.165) õi (4.168), õi nu vom mai insista. Pentru formarea unei imagini d|m un tabel cu nivelul în dB õi în valoare absolut|:

dB	0	1	2	3	4	6	8	10	12	14	16	18	20
|H|	1	1,122	1,253	$\sqrt{2}$	1,585	2	2,512	3,162	3,981	5,012	6,31	7,943	10

dB	0	-1	-2	-3	-4	-6	-8	-10	-12	-14	-16	-18	-20
|H|	1	0,891	0,794	$1/\sqrt{2}$	0,631	0,5	0,398	0,316	0,251	0,2	0,158	0,126	0,1

O creõtere cu 3dB înseamn| multiplicarea valorii de referinû| cu $\sqrt{2}$ iar o sc|dere cu 3dB înseamn| multiplicarea valorii de referinû| cu $1/\sqrt{2}$. Creõterea sau sc|derea cu 6dB înseamn| dublarea sau înjum|t|ûirea valorii de referinû|.

Pentru a vedea cum se poate utiliza tabelul, d|m dou| exemple.

Exemple:

i) Nivelul de referinû| fiind 1, care este valoarea absolut| a lui |H(ω)| dac| în dB el este de 56dB?

$$56 = 2 \cdot 20 + 16 ,$$
$$|H(\omega)| = 10^2 \cdot 6{,}31 = 631 .$$

sau:

$$56 = 3 \cdot 20 - 4 ,$$
$$|H(\omega)| = 10^3 \cdot 0{,}631 = 631 .$$

ii) Nivelul de referinû| fiind 1 care este valoarea absolut| a lui |H(ω)| dac| nivelul s|u este de -48dB ?

$-48 = -2 \cdot 20 - 8$, $|H(\omega)| = 10^{-2} \cdot 0{,}398 = 3{,}98 \cdot 10^{-3}$,

$-48 = -3 \cdot 20 + 12$, $|H(\omega)| = 10^{-3} \cdot 3{,}981 = 3{,}98 \cdot 10^{-3}$.

Menûion|m c| pentru putere se utilizeaz| relaûia de definire:

$$B\,[dB] = 10 \log_{10} \frac{P}{P_o} = 10 \lg \frac{P}{P_o} , \qquad \textbf{(4.169)}$$

unde P_o este puterea de referinû|. Dac| P_o este 1 mW unitatea se noteaz| dBm. Spre exemplu un nivel de 10dBm semnific| o putere de 10mW iar un nivel de -10dBm, o putere de 0,1 mW. Nivelul de 0dBm este cel de 1mW (referinûa). Dublarea puterii apare la B=3dB .

4.2.4 Sisteme de ordinul întâi

Sistemele de ordinul întâi sunt SLIT caracterizate printr-o ecuaûie diferenûial| de ordinul întâi, liniar| õi cu coeficienûi constanûi, de forma:

$$\frac{d\,y(t)}{d\,t} + \omega_o\, y(t) = k\,\omega_o\, x(t) \quad ; \quad \omega_o > 0 . \qquad \textbf{(4.170)}$$

În automatiz|ri forma tipic| a acestei ecuaûii este:

$$\tau \frac{d\,y(t)}{d\,t} + y(t) = k\ x(t) \quad ; \quad \tau > 0 \ . \qquad \textbf{(4.170')}$$

Cele dou| forme sunt echivalente luând $\omega_o = 1/\tau$.

A@a cum s-a ar|tat, r|spunsul în frecven@| este:

$$H(\omega) = \frac{k\,\omega_o}{\omega_o + j\omega} = \frac{|k|\,\omega_o}{\sqrt{\omega_o^2 + \omega^2}}\ e^{\,j\left(\varphi_k - arctg\ \frac{\omega}{\omega_o}\right)} \qquad \textbf{(4.171)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{|k|\,\omega_o}{\sqrt{\omega_o^2 + \omega^2}} \ ; \ \Phi(\omega) = \varphi_k - arctg\ \frac{\omega}{\omega_o} \ . \qquad \textbf{(4.172-173)}$$

R|spunsul la impuls al sistemului este:

$$h(t) = k\,\omega_o\ e^{-\omega_o t}\ \sigma(t) \ . \qquad \textbf{(4.174)}$$

R|spunsul la semnalul treapt| σ(t) , r|spunsul indicial, se determin| având în vedere c| $T_u B_u \geq 4$ sau $T_u B_u \geq 8$. sau c| $S(\omega) = H(\omega) \cdot \mathcal{F}\{\sigma(t)\}(\omega)$:

$$S(\omega) = \frac{k\,\omega_o}{\omega_o + j\omega}\ \left[\ \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)\ \right] = \frac{k\,\omega_o}{(\,\omega_o + j\omega\,)\ j\omega} + \frac{\pi\,k\,\omega_o}{\omega_o}\,\delta(\omega) \ .$$

Descompunând primul termen în frac@ii simple ob@inem:

$$S(\omega) = -k\ \frac{1}{\omega_o + j\omega} + k\,\frac{1}{j\omega} + k\,\pi\,\delta(\omega) = -k\,\frac{1}{\omega_o + j\omega} + k\ \left(\ \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)\ \right).$$

Aplicând transformata invers| rezult|:

$$s(t) = -k\,e^{-\omega_o t}\ \sigma(t) + k\,\sigma(t) = k\ (\ 1 - e^{-\omega_o t}\ )\ \sigma(t) \ . \qquad \textbf{(4.175)}$$

Pentru a reprezenta $|H(\omega)|$ în func@ie de lgω , se trece rela@ia (4.172) în m|rimi logaritmice, luând ca referin@| pe vertical| $H_o = 1$:

$$20\ lg\,|H(\omega)| = 20\ lg\ \frac{|k|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = 20\ lg\,|k| - 10\ lg\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \qquad \textbf{(4.176)}$$

Se consider| $\omega \# 0{,}1\omega_o$ deci $(\omega/\omega_o)^2$ n 1 , õi deci:

$$20\,lg\,|H(\omega)| \cong 20\,lg\,|k| \quad , \qquad \textbf{(4.177)}$$

ecuaûia unei paralele la axa frecvenûei, asimptot| la stânga pentru 20lg|H(ω)|.

Dac| îns| $\omega \$ 10\omega_o$, $(\omega/\omega_o)^2$ o 1 (õi în parantez| se neglijeaz| 1):

$$20\,lg\,|H(\omega)| \cong 20\,lg\,|k| - 20\,lg\,\frac{\omega}{\omega_o} \quad . \qquad \textbf{(4.178)}$$

Aceasta este ecuaûia unei drepte, asimptot| la frecvenûe mari (la dreapta) pentru 20lg|H(ω)| .Panta dreptei se determin| luând 2 frecvenûe în raport de o decad| ω_1 õi $\omega_2=10\omega_1$ din domeniul în care este valabil| aproximaûia (4.178):

$$y_1 = 20\,lg\,|H(\omega_1)| \cong 20\,lg\,|k| - 20\,lg\,\frac{\omega_1}{\omega_o}\,;\; y_2 = 20\,lg\,|H(\omega_2)| \cong 20\,lg\,|k| - 20\,lg\,\frac{10\omega_1}{\omega_o}$$

$$y_2 - y_1 \cong -20\,lg\,10 = -20 \;\; dB \quad .$$

Prin urmare panta dreptei este de -20dB/decad|. Dac| se consider| numai o octav|, $\omega_2' = 2\omega_1$ atunci:

$$y_{2'} - y_1 \cong -20\,lg\,2 = -6 \;\; dB \quad .$$

Panta de -20dB/decad| este echivalent| unei pante de -6dB/octav|. Dac| în (4.176) se pune $\omega = \omega_o$ se g|seûte valoarea 20lg|k|. Concluzia este c| cele dou| asimptote se întâlnesc în punctul pe care abscisa ω_o îl determin| pe asimptota orizontal|. Frecvenûa ω_o la care nivelul scade cu 3dB se numeûte õi frecvenû| de t|iere. În figura 4.25 este ar|tat| caracteristica |H(ω)| pentru sistemul de ordin întâi, considerând c| valoarea k este 10. Dac| se înlocuieûte reprezentarea curbei prin asimptotele sale, cea mai mare eroare, de 3dB , apare la frecvenûa ω_o . Eroarea relativ| maxim| ce apare la frecvenûa ω_o înlocuind valoarea real| de 0,707 cu valoarea 1 este ε = [(1-0,707)/0,707]100% . 41,4%. În figura 4.26 se dau sc|derea curbei reale faû| de asimptote, Δ , precum õi eroarea relativ| de reprezentare, ε .

În ceea ce priveûte caracteristica de faz|, dat| prin relaûia (4.173), ea este reprezentat| în coordonate semilogaritmice, tot în figura 4.25. Dac| $n_k = 0$, ceea ce înseamn| k > 0 faza cade de la 0° la -90° atingând valoarea de -45° la frecvenûa de t|iere ω_o . Se observ| c| õi curba de faz| poate fi înlocuit| cu o linie frânt| dar erorile ce apar sunt mai mari.

Pe lâng| acest mod de reprezentare se mai practic|, în special în studiul stabilit|ûii sistemelor, reprezentarea sub form| de hodograf a lui H(ω) . Hodograful

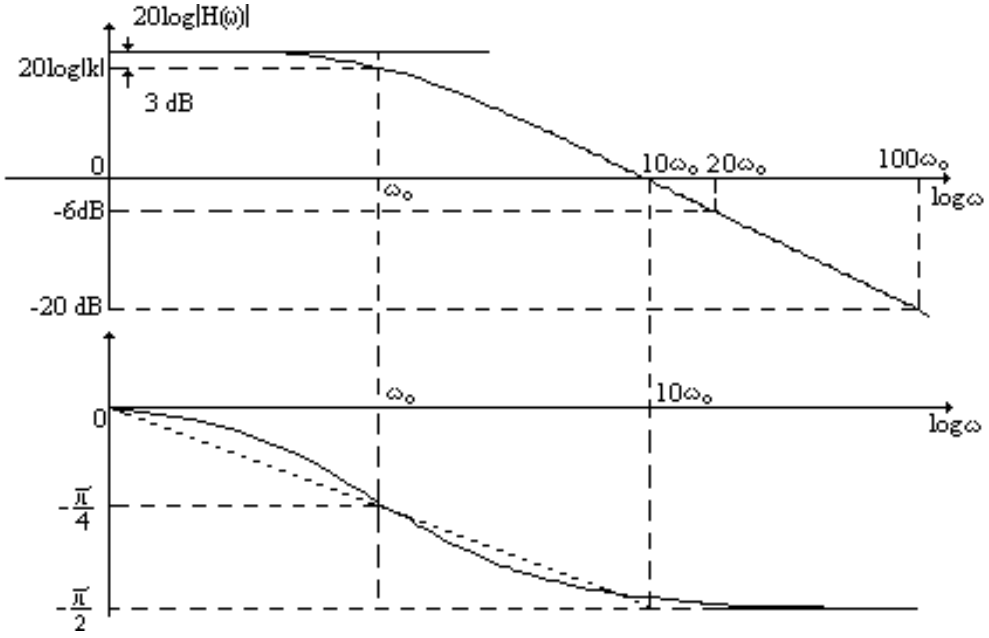


Fig. 4.25 Reprezentarea funcûiilor |H(ω)| în coordonate logaritmice õi Φ(ω) în coordonate semilogaritmice.

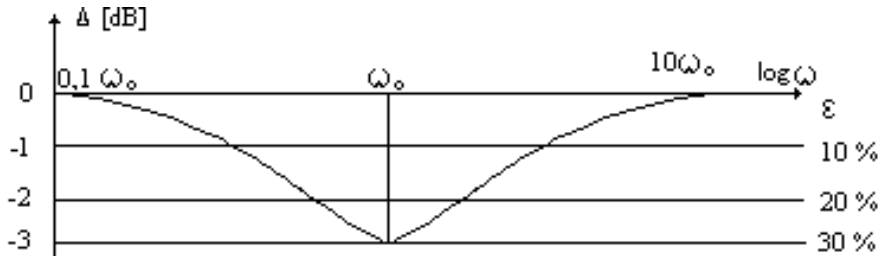


Fig. 4.26 Eroarea cauzat| de înlocuirea curbei reale prin asimptotele sale.

reprezint| în coordonate polare modulul õi faza funcûiei, frecvenûa ap|rând ca un parametru al curbei.

Construcûia hodografului poate fi realizat| fie în mod direct, calculând pentru diverse valori ω perechile (|H(ω)| , Φ(ω)) care se reprezint| apoi, fie citind aceste valori din reprezentarea dat| în figura 4.25. Pe o vertical|, la o anumit| frecvenû| deci, se citesc 20lg|H(ω)| õi Φ(ω) . Se recalculeaz| |H(ω)| õi se reprezint| perechea (|H(ω)| , Φ(ω)).

În figura 4.27 se arat| hodograful sistemului de ordinul întâi, considerând $n_k = 0$ (sau k > 0). Curba este un cerc cu centrul în k/2 , pe verticala respectiv| parametrul curbei fiind chiar ω_o .

Dac| valoarea k este negativ|, $n_k = -\pi$ õi curba de faz| Φ(ω) începe de la -π õi variaz| pân| la -3π/2. Hodograful apare ca simetricul faû| de origine a celui din figur|.

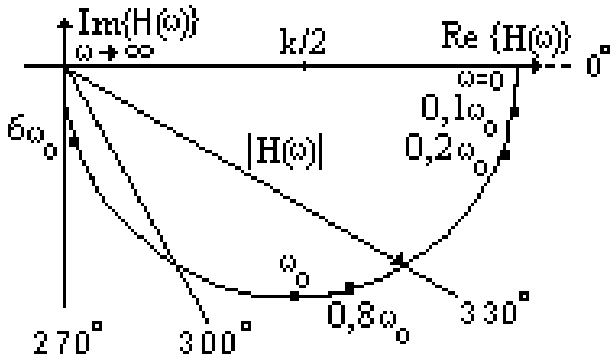


Fig. 4.27 Hodograful r|spunsului în frecvenû| H(ω) pentru un sistem de ordinul întâi. Frecvenûa ω devine un parametru al curbei.

4.2.5 Sisteme de ordinul doi

Sistemele LIT de ordinul doi sunt caracterizate printr-o ecuaûie diferenûial| de forma:

$$\frac{d^2\, y(t)}{d\, t^2} + 2\xi\,\omega_o \frac{d\, y(t)}{d\, t} + \omega_o^2\, y(t) = k\,\omega_o^2\, x(t)\ ;\ \omega_o > 0\ ,\ \xi > 0\ .$$

(4.179)

Circuitele RLC, sistemele mecanice cu amortizare Ûi altele sunt caracterizabile printr-o astfel de ecuaûie.

R|spunsul în frecvenû| al sistemului este:

$$H(\omega) = \frac{k\,\omega_o^2}{(\ \ j\omega)^2 + 2\xi\,\omega_o(\ \ j\omega) + \omega_o^2}\ .$$ **(4.180)**

R|d|cinile numitorului sunt:

$$s_{1,2} = -\xi\,\omega_o + j\omega_o\,\sqrt{\xi^2 - 1}\ .$$ **(4.181)**

R|spunsul în frecvenû| H(ω) se poate descompune în fracûii simple:

$$H(\omega)=\frac{k\omega_o^2}{(\ j\omega - s_1)\ (\ j\omega - s_2)}=\frac{k\,M}{j\omega - s_1}\ -\ \frac{k\,M}{j\omega - s_2}\ ;\ M=\frac{\omega_o}{2\sqrt{\xi^2-1}}\ \xi\neq 1\ .$$

(4.182)

R|spunsul la impuls rezult| imediat de forma:

$$h(t)=k\,M\,(\ e^{s_1 t}\ -\ e^{s_2 t}\ )\ \sigma(t)\quad \xi\neq 1\ . \qquad \textbf{(4.183)}$$

R|spunsul la treapta unitar| s(t) se obûine ca ði la sistemele de ordin întâi:

$$S(\omega)=\frac{k\,M}{j\omega - s_1}\ [\ \frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta\,(\omega)\ ]\ -\ \frac{k\,M}{j\omega - s_2}\ [\ \frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta\,(\omega)\ ]$$

$$S(\omega)=\frac{k\,M}{s_1}\cdot\frac{1}{j\omega - s_1}-\frac{k\,M}{s_1}\ [\ \frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta\,(\omega)\ ]-\frac{k\,M}{s_2}\cdot\frac{1}{j\omega - s_2}+$$

$$\frac{k\,M}{s_2}\ [\ \frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta\,(\omega)\ ]$$

$$s(t)=k\ M\ \ [\ \frac{e^{s_1 t}}{s_1}\ -\ \frac{1}{s_1}\ -\ \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\ +\ \frac{1}{s_2}\ ]\ \sigma(t)\ ,$$

sau:

$$s(t)=k\ [\ 1\ +\ M\ (\ \frac{e^{s_1 t}}{s_1}\ -\ \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\ )\ ]\ \sigma(t)\ \ ;\ \ \xi\neq 1\ . \qquad \textbf{(4.184)}$$

Dac| $\xi = 1$ atunci $s_{1,2} = -\omega_o$ ði rezult|:

$$H(\omega)=\frac{k\omega_o^2}{(\ j\omega+\omega_o)^2}\ ;\ h(t)=k\omega_o^2\ t\ e^{-\omega_o t}\ \sigma(t)\ . \qquad \textbf{(4.182'-183')}$$

$$S(\omega)=\frac{k\,\omega_o^2}{(\ j\omega+\omega_o)^2}\ \ [\ \frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta\,(\omega)\ ]=\frac{k\,\omega_o^2}{(\ j\omega+\omega_o)^2\ j\omega}\ +\ \pi\ k\,\delta\,(\omega)$$

$$S(\omega)=-\ \frac{k\,\omega_o}{(\ j\omega+\omega_o)^2}\ -\ \frac{k}{j\omega+\omega_o}\ +\ k\ [\ \frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta\,(\omega)\ ]$$

$$s(t)=k\ (\ 1\ -\ e^{-\omega_o t}\ -\ \omega_o t\ e^{-\omega_o t}\ )\ \ \sigma(t)\ .$$

(4.184')

Pentru determinarea r|spunsului la treapta unitar|, determin|m S(ω) utilizând (4.182'):

Pentru finalizarea formei expresiilor date prin relaûiile (4.183) ði (4.184) vom lua în considerare dou| cazuri ði anume: i) $0 < \xi < 1$ ði ii) $\xi > 1$.

i) Pentru $0 < \xi < 1$, $s_{1,2} = -\xi\omega_o + \_ j\omega_o\sqrt{1-\xi^2}$ ßi $M = \frac{-j\omega_o}{2\sqrt{1-\xi^2}}$. Substituind în (4.183) se obßine:

$$h(t) = \frac{-jk\omega_o}{2\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_o t}\left(e^{j\omega_o\sqrt{1-\xi^2}} - e^{-j\omega_o\sqrt{1-\xi^2}}\right)\sigma(t) ,$$

ßi în final:

$$h(t) = \frac{k\omega_o}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_o t} \sin\left(\omega_o\sqrt{1-\xi^2}\, t\right)\sigma(t) . \qquad \textbf{(4.183/1)}$$

Asem|n|tor, înlocuind M ßi $s_{1,2}$ în (4.184) ßi efectuând calculele rezult|:

$$s(t) = k\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_o t}\left[\xi\sin\left(\omega_o\sqrt{1-\xi^2}\, t\right) + \sqrt{1-\xi^2}\cos\left(\omega_o\sqrt{1-\xi^2}\, t\right)\right]\right\}\sigma(t) \qquad \textbf{(4.184/1)}$$

Analizând relaßiile (4.183/1) ßi (4.184/1) se observ| c| atunci când $\xi < 1$ r|spunsurile au un caracter de oscilaßie amortizat|, anvelopa fiind dat|, pentru h(t) de $\frac{k\omega_o}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_o t}$. De aceea se spune c| ξ este factorul de amortizare. Valoarea:

$$Q = \frac{1}{2\xi} \qquad \textbf{(4.185)}$$

poart| denumirea de factor de calitate. Oscilaßiile amortizate au frecvenßa $\omega_o\sqrt{1-\xi^2}$, cu atât mai apropiat| de ω_o cu cât ξ este mai redus. Cu cât amortizarea circuitului este mai mic| frecvenßa oscilaßiilor amortizate se apropie de ω_o , numit| ßi frecvenß| "natural|" a sistemului. Regimul sistemului în care $\xi<1$ se numeßte ßi "supracritic".
ii) Fie acum $\xi > 1$. Se ßine seama de relaßiile: cos(jx) = ch(x) ßi sin(jx) = jßsh(x). În acest caz, h(t) ßi s(t) de mai sus, devin:

$$h(t) = \frac{k\omega_o}{\sqrt{\xi^2-1}} e^{-\xi\omega_o t} sh\left(\omega_o\sqrt{\xi^2-1}\, t\right)\sigma(t) , \qquad \textbf{(4.183/2)}$$

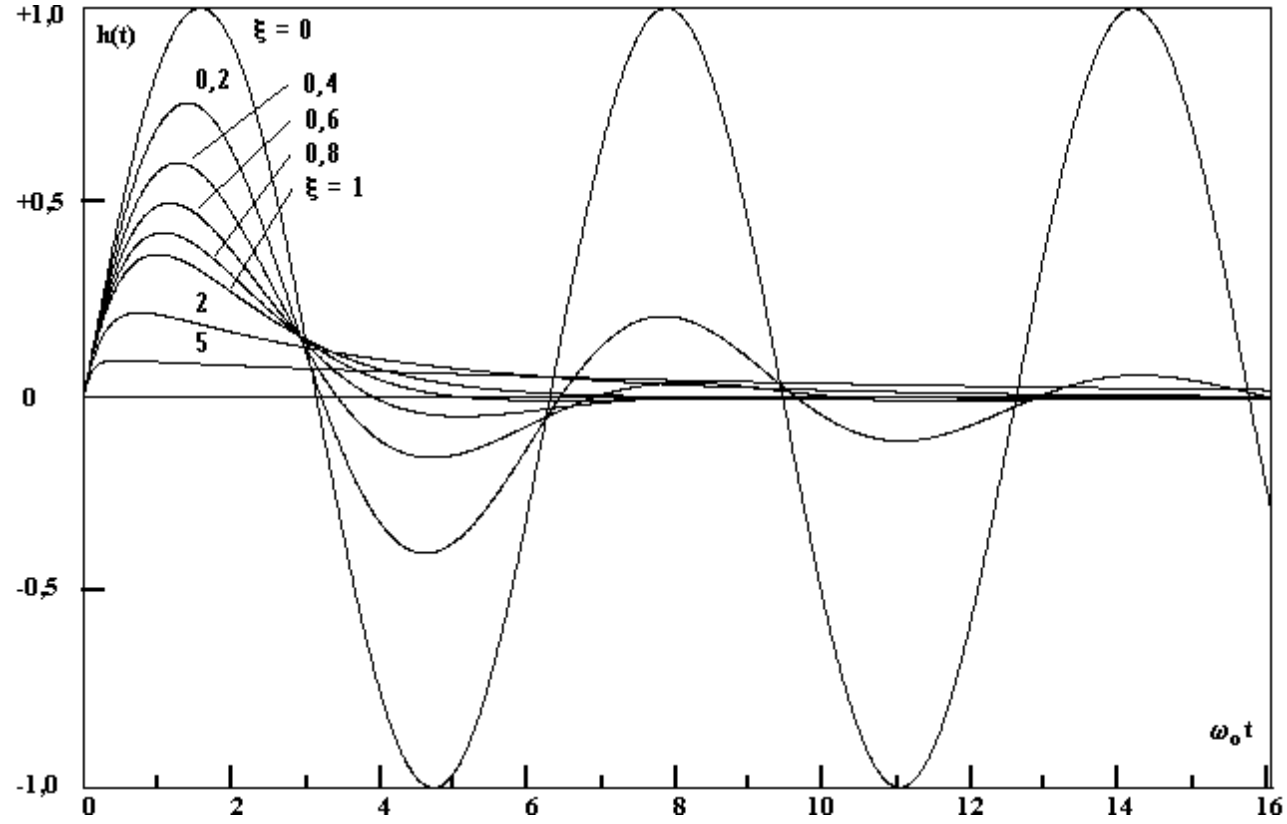


Fig. 4.28 R|spunsul la impuls h(t) a unui sistem de ordinul doi pentru diverõi factori de amortizare, ξ.

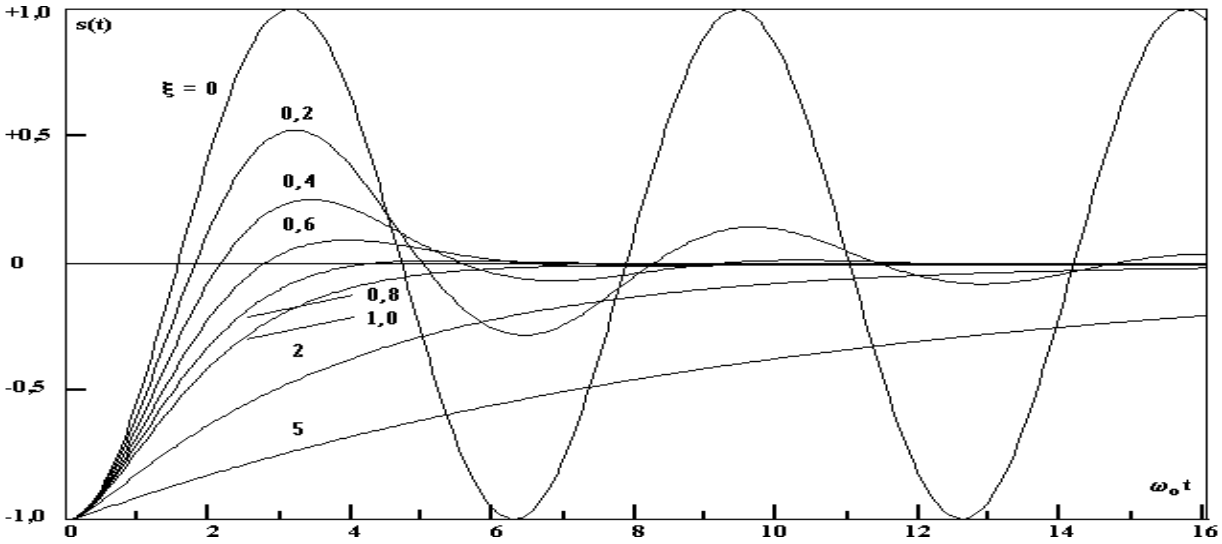


Fig. 4.29 R|spunsul la semnal treapt| s(t) a unui sistem de ordinul doi pentru diverõi factori de amortizare, ξ.

$$s(t)=k\{1-\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\xi\omega_o t}[\xi sh(\omega_o\sqrt{\xi^2-1}\,t)+\sqrt{\xi^2-1}ch(\omega_o\sqrt{\xi^2-1}\,t)]\}\sigma(t). \quad \textbf{(4.184/2)}$$

Dac| $\xi > 1$ r|spunsurile au un caracter exponen□ial, fiind lipsite de oscila□ii. Este regimul subcritic.

iii) În cazul $\xi = 1$ numit õi regim critic nu apar oscila□ii în cele dou| r|spunsuri.

În figurile 4.28 õi 4.29 se dau formele de und| h(t) õi s(t) pentru diferi□i factori de amortizare ξ. Se observ| c| atunci când la intrarea sistemului se aduce un semnal treapt|, cu excep□ia cazului $\xi = 0$, semnalul tinde spre o valoare de regim permanent k, fie oscilând în jurul valorii finale, fie apropiindu-se monoton cresc|tor de aceasta.

În unele cazuri se poate pune problema definirii unui timp de "stabilizare" sau de "stabilire a valorii finale", mai ales în leg|tur| cu efectuarea unor m|sur|tori de precizie.

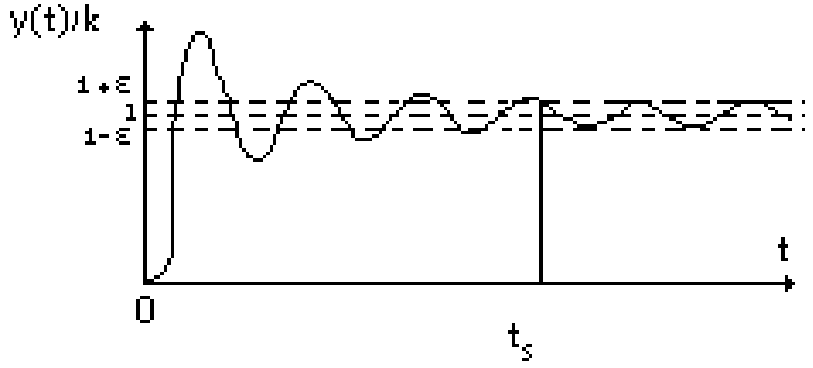


Fig. 4.30 Definirea timpului de stabilizare t_s a r|spunsului unui sistem oarecare.

Referindu-ne la figura 4.30, se poate vedea c| r|spunsul, presupus a avea o form| oscilatorie, intr| la un moment de timp t_s într-o band| de eroare admis| $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ f|r| a mai ie õi din ea. Se spune c| r|spunsul sistemului s-a stabilizat. Evident se accept| c| se admite eroarea " ε în aplica□ia în cauz|. Se poate observa din figur| c| m|rind precizia, deci reducând ε , timpul de stabilizare t_s cre õte, õi invers. Modul de definire al timpului de stabilizare nu este propriu numai sistemelor de ordinul doi. Aceea õi defini□ie este valabil| pentru orice tip de sistem. Revenind la sistemele de ordinul doi, pentru ξ – 1/ se ob□ine un timp de stabilizare a valorii mai redus, decât pentru alte valori ale factorului % de amortizare. Din forma (4.180) a r|spunsului în frecven□| se pot determina modulul õi faza sa:

$$|H(\omega)| = \frac{|k|\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_0^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$20\ lg|H(\omega)| = 20\ lg|k| - 10\ lg\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right] \quad \textbf{(4.186)}$$

$$\Phi(\omega)=\begin{cases}\varphi_k - arctg\dfrac{2\xi(\omega/\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}, & |\omega|\le\omega_0\\ \varphi_k - arctg\dfrac{2\xi(\omega/\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}-\pi, & |\omega|>\omega_0\end{cases} \qquad \textbf{(4.187)}$$

Pentru $\omega \# 0{,}1\omega_o$ obţinem $20\lg|H(\omega_o)| - 20\lg|k|$, ecuaţia asimptotei la frecvenţe joase.

Pentru $\omega \$ 10\omega_o$ obţinem $20\lg|H(\omega_o)| - 20\lg|k| - 40\lg(\omega/\omega_o)$, ecuaţia asimptotei la frecvenţe mari. Panta ei este de -40dB/dec sau -12dB/oct .

Cele două asimptote se întretaie pe verticala de abscisă ω_o, numită şi frecvenţă de tăiere. La această frecvenţă,

$$\begin{aligned} 20\ lg|H(\omega_o)| &= 20\ lg|k| - 20\,lg\ 2 - 20\ lg\ \xi \\ 20\ lg|H(\omega_o)| &= 20\ lg|k| - 6 - 20\ lg\ \xi\ . \end{aligned} \qquad \textbf{(4.188)}$$

Pentru $\xi = 1$ căderea caracteristicii reale, în raport cu asimptotele este de 6dB (la frecvenţa ω_o). Dacă $\xi = 1/\sqrt{2}$ atunci $20\lg|H(\omega_o)| = 20\lg|k| - 6 + 3 = 20\lg|k| - 3$, rezultând o cădere de numai 3dB. Se poate studia $|H(\omega)|$ utilizând metodologia cunoscută. Expresia de sub radical, conduce prin derivare după ω şi anularea derivatei la:

$$-4(\omega_o^2-\omega^2)\omega + 8\xi^2\omega_o^2\omega = 0\ ,$$

de unde:

$$\omega_m=\omega_o\sqrt{1-2\xi^2}\quad \xi<\frac{1}{\sqrt{2}}\ . \qquad \textbf{(4.189)}$$

La această frecvenţă se poate constata existenţa unui minim al expresiei de sub radical şi deci a unui maxim pentru $|H(\omega)|$. Valoarea maximului este:

$$|H(\omega_m)|=\frac{|k|}{2\ \xi\ \sqrt{1-\xi^2}}\ . \qquad \textbf{(4.190)}$$

Pentru $\xi > 1/\sqrt{2}$ expresia de sub radical este strict crescătoare şi deci $|H(\omega)|$ este o funcţie strict descrescătoare. Maximele ce apar pentru $\xi < 1/\sqrt{2}$, pot fi exprimate în funcţie de factorul de calitate Q :

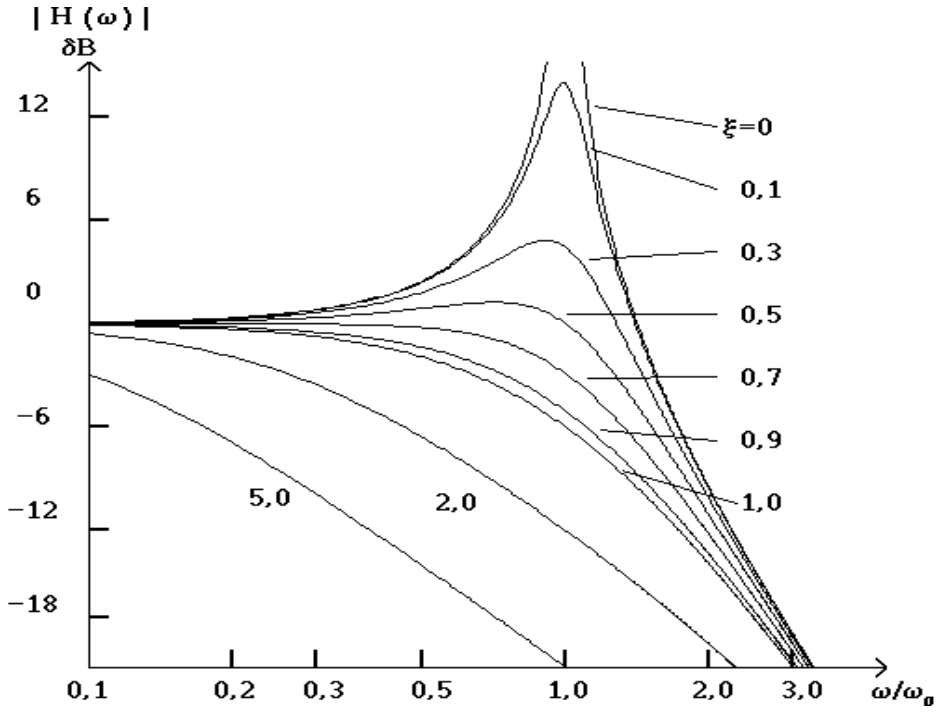


Fig. 4.31 Caracteristicile de modul |H(ω)| ale unui sistem de ordinul doi pentru diverõi factori de amortizare, ξ.

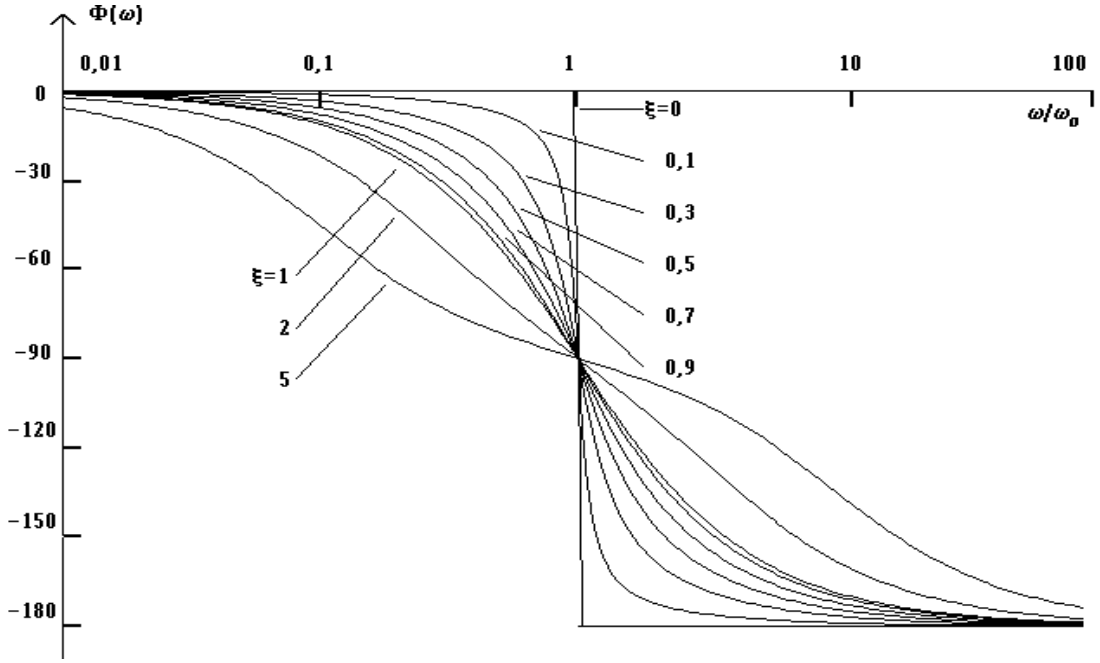


Fig. 4.32 Caracteristicile de faz| Φ(ω) ale unui sistem de ordinul doi pentru diverõi factori de amortizare, ξ.

$$|H(\omega_m)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\ , \qquad \textbf{(4.191)}$$

ùi la fel ùi frecvenùele la care acest maxim apare:

$$x(t) = e^{-\omega_o t}\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{\omega_o + j\omega} \qquad \textbf{(4.192)}$$

Dac| factorul de calitate este suficient de mare, Q > 10 , $|H(\omega_m)| \approx Q$ iar $\omega_m \approx \omega_o$.

Expresia fazei, (4.187), ne indic| faptul c| pentru $\omega = \omega_o$:

$$X(\omega) = \frac{x(0)}{j\omega} + \frac{\dot{x}(0)}{(j\omega)^2} + \frac{1}{(j\omega)^2}\int_{0^-}^{\infty}\ddot{x}(t)e^{-j\omega t}dt;\ \ddot{x}(t) \neq 0 \qquad \textbf{(4.193)}$$

La frecvenùa ω_o apare o întârziere de faz| de 90° . Dac| $\omega \to \infty$:

$$\Phi(\omega) = \varphi_k - \pi\ , \qquad \textbf{(4.194)}$$

ùi deci defazajul suplimentar introdus de sistem tinde spre 180° .

În figura 4.31 sunt trasate caracteristicile de modul iar în figura 4.32 caracteristicile de faz|, în vecin|tatea frecvenùei ω_o . Trasarea caracteristicii de faz| s-a f|cut considerând k > 0 deci $n_k = 0$.

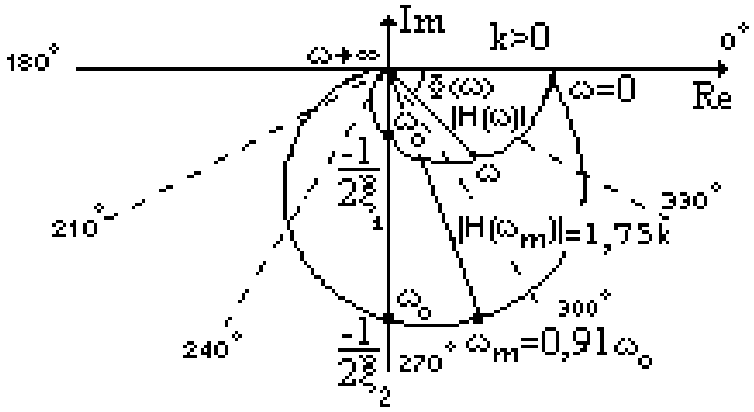


Fig. 4.33 Hodograful funcùiei de frecvenù| a unui sistem de ordin doi pentru $\xi_1 = 1$ ùi $\xi_2 = 0{,}3$.

În figura 4.33 este desenat hodograful unui sistem de ordinul doi având k > 0 pentru dou| valori ale lui ξ .

Axa imaginar| este intersectat| la ordonata $-1/(2\xi)$, frecvenùa (parametrul curbei) fiind ω_o . Curba $\xi_1 = 1$ are modulul monoton descresc|tor cu frecvenùa. Curba $\xi_2 = 0{,}3$ are un maxim al modulului $|H(\omega_m)| \approx 1{,}75$ k , parametrul fiind în acel punct $\omega_m \approx 0.91\omega_o$. Toate curbele sunt tangente la axa real| în origine, punct corespunz|tor frecvenùei infinite. (defazajul maxim introdus de sistemul de ordinul 2 este de 180°).

4.2.5 Alte tipuri de sisteme

Pentru a aprofunda utilizarea metodei de reprezentare grafic| vom mai urm|ri câteva exemple.

Sistem de tip trece sus

Pentru sistemul din figura 4.34 se poate scrie ecuaûia:

$$\frac{d\,y(t)}{d\,t}+\frac{1}{RC}\,y(t)=\frac{d\,x(t)}{d\,t}\ .$$

Este ecuaûia unui sistem de ordinul unu. Forma ei general|, în care apare ôi un câôtig k este:

$$\frac{d\,y(t)}{d\,t}+\omega_o\,y(t)\ =\ k\ \frac{d\,x(t)}{d\,t}\ ;\omega_o>0\ \ . \qquad \textbf{(4.195)}$$

R|spunsul în frecvenû| al acestui sistem se scrie imediat sub forma:

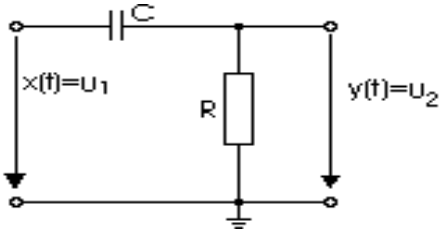


Fig. 4.34 Circuit de tip " Trece sus".

$$H(\omega)=\frac{k\ (\ \ j\omega\ )}{(\ \ j\omega\ )\ +\ \omega_o}\ \ . \qquad \textbf{(4.196)}$$

Pentru a stabili forma r|spunsului la impuls se procedeaz| mai întâi la efectuarea unei împ|rûiri deoarece num|r|torul are acelaôi grad cu numitorul în ceea ce priveôte variabila (jω) . Se obûine:

$$H(\omega)=k-\frac{k\omega_o}{j\omega+\omega_o}\leftrightarrow h(t)=k\delta(t)-k\omega_o e^{-\omega_o t}\sigma(t)\ . \qquad \textbf{(4.197)}$$

$$S(\omega)=\frac{k\ \ j\omega}{j\omega+\omega_o}\ \left[\ \frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta\,(\omega)\ \right]=\frac{k}{j\omega+\omega_o}\leftrightarrow s(t)=k\,e^{-\omega_o t}\sigma\,(t). \qquad \textbf{(4.198)}$$

R|spunsul la treapta unitar| S(ω) conduce la stabilirea lui s(t):
Din (4.196) se obûin imediat:

$$|H(\omega)|=\frac{|k|\omega}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}=|k|\frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}} \qquad \textbf{(4.199)}$$

$$\Phi(\omega) = \varphi_k + \frac{\pi}{2} - arctg \frac{\omega}{\omega_o} . \qquad \textbf{(4.200)}$$

În coordonate logaritmice caracteristica de modul devine:

$$20 \ lg|H(\omega)| = 20 \ lg|k| + 20 \ lg \frac{\omega}{\omega_o} - 10 \ lg \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right) . \qquad \textbf{(4.201)}$$

Analizând relaţia (4.201) în baza cunoştinţelor deja acumulate, se constată că e format din trei termeni.

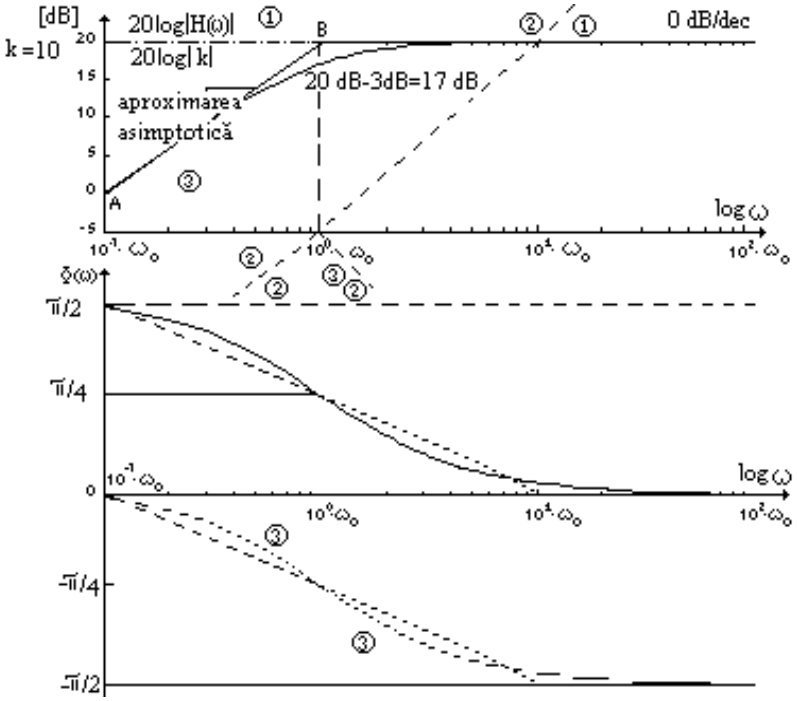


Fig. 4.35 Caracteristicile de modul şi de fază pentru un sistem " trece sus".

Primul, $20\lg|k|$ este o paralelă la axa $\lg\omega$ ce este reprezentată prin dreapta **1** în figura 4.35. Al doilea termen, $20\lg\omega/\omega_o$ reprezintă o dreaptă în coordonate logaritmice. Ea are panta de +20 dB/decadă şi este ascendentă. În figura 4.35 ea este marcată cu **2**. Al treilea termen a fost deja studiat. Pentru $\omega \approx 0{,}1\omega_o$ el se reduce la $-10\lg1 = 0$ iar pentru $\omega \gg 10\omega_o$ se aproximează cu $-20\lg\omega/\omega_o$, o dreaptă ce cade cu 20dB/decadă. În figură cel de al treilea termen, compus din două segmente, este notat cu **3**.

Procedând la însumarea celor trei termeni se obţine linia plină din figura 4.35. Din punctul A până în punctul B pantele însumate dau 0+20+0 = 20dB/decadă. Segmentul AB este ascendent cu panta de 20 dB/decadă. Din punctul B spre punctul C suma pantelor este 0+20-20 = 0dB/decadă motiv pentru care BC este orizontală. Linia frântă ABC reprezintă aproximarea prin asimptote a curbei $20\lg|H(\omega)|$. Eroarea maximă, de 3dB , apare în punctul A, având abscisa ω_o , frecvenţa de tăiere. Se observă că frecvenţele mai mici decât ω_o sunt atenuate, motiv pentru care

sistemul se numeôte de tip "trece sus". La frecvenûe peste ω_o , deoarece k = 10 în exemplul considerat, toate sinusoidele (cu $\omega \geq 10\omega_o$) sunt amplificate de 10 ori. La frecvenûa ω_o amplificarea scade cu 3 dB ceeace înseamn| c| va avea valoarea 10/ 2 –7,07 . Nivelul de putere, proporûional cu p|tratul amplific|rii, se reduce la frecvenûa ω_o la jum|tate din nivelul de la frecvenûele $\omega \geq 10\omega_o$

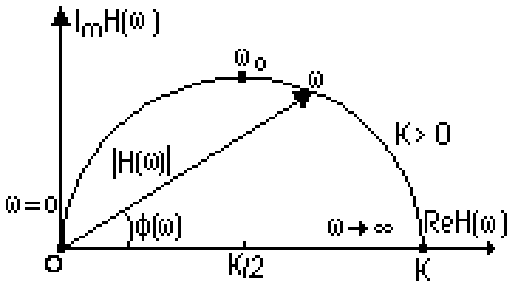


Fig. 4.36 Hodograful funcûiei H(ω) pentru sistemul " trece sus".

Caracteristica de faz| $\Phi(\omega)$ dat| de relaûia (4.200) este reprezentat| tot în figura 4.35, considerând k > 0 , adic| $n_k = 0$ (pentru k < 0 , $n_k=-\pi$). Se observ| prezenûa (cu excepûia lui n_k) a doi termeni de faz|. Primul este constanta $\pi/2$ ôi corespunde caracteristicii **2**, de pant| +20dB/decad|. Al doilea termen, -arctg ω/ω_o , corespunde caracteristicii **3**. Suma lor, efectuat| grafic a condus la curba $\Phi(\omega)$ din figur|. În figura 4.36 este prezentat ôi hodograful sistemului. El este un cerc cu centrul în k/2 (s-a considerat k > 0).

Puntea Wien

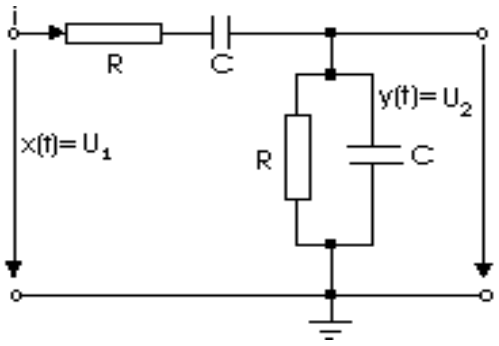


Fig. 4.37 Puntea Wien.

Circuitul din figura 4.37, cunoscut sub denumirea de "Reûeaua Wien" este utilizat în construcûia oscilatoarelor sinusoidale.

Impedanûa în regim armonic v|zut| de la intrare este:

$$X(\omega)=\frac{x(t)e^{-j\omega t}}{j\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{j\omega}\int_{-\infty}^{0}\dot{x}(t)e^{-j\omega t}dt+\frac{1}{j\omega}\int_{0}^{+\infty}\dot{x}(t)e^{-j\omega t}dt$$

Curentul **i** , absorbit de la sursa de tensiune x(T) = $U_1(t)$, se calculeaz| cu i=U/Z iar tensiunea de ieôire y(t) = $U_2(t)$ se obûine înmulûind curentul i cu impedanûa circuitului RC paralel :

$$\frac{X(\omega)}{\dfrac{(j\omega)^2(RC)^2+3j\omega RC+1}{j\omega C(1+j\omega RC)}}\cdot\frac{R}{1+j\omega RC}=Y(\omega);\quad\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{j\omega RC}{(j\omega)^2(RC)^2+3j\omega RC+1}.$$

Se determin| r|spunsul în frecvenû| al punûii Wien:

$$H(\omega)=\frac{j\,\frac{\omega}{\omega_o}}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_o^2}+3\,j\,\frac{\omega}{\omega_o}+1}=\frac{j\,\frac{\omega}{\omega_o}}{(\frac{j\omega}{\omega_o}+2{,}62)\,(\frac{j\omega}{\omega_o}+0{,}38)}\;;\;\omega_o=\frac{1}{RC}\;, \qquad \textbf{(4.202)}$$

ði din acesta modulul ði faza:

$$20lg|H(\omega)|=20lg\frac{\omega}{\omega_0}-10lg\left[1+\left(\frac{\omega}{0{,}38\omega_0}\right)^2\right]-10lg\left[1+\left(\frac{\omega}{2{,}62\omega_0}\right)^2\right] \qquad \textbf{(4.203-204)}$$

$$\Phi(\omega)=\frac{\pi}{2}-arctg\frac{\omega}{0{,}38\omega_0}-arctg\frac{\omega}{2{,}62\omega_0}$$

Cele dou| caracteristici sunt ar|tate în figura 4.38a. Referindu-ne la modulul r|spunsului în frecvenû| se vede din relaûia (4.203) c| el este suma a trei termeni.

Primul este corespunz|tor dreptei **1** cu panta de +20dB/decad| ce taie axa orizontal| la frecvenûa ω_o . Al doilea ði al treilea termen dau liniile frânte **2** ði **3** cu punctele de frângere $0{,}38\omega_o$ respectiv $2{,}62\omega_o$. Însumând caracteristicile **1**) **3** se obûine aproximarea curbei $20\lg|H(\omega)|$ prin asimptote, desenat| cu linie plin| în figura 4.38. Pentru comparaûie este trasat| ði curba real|. La frecvenûa ω_o atenuarea introdus| de puntea Wien (în gol) este de 1/3 sau -9,54 dB. Caracteristica de faz| este suma a trei termeni. Primul, constanta $\pi/2$, corespunde dreptei **1** de pant| +20 dB/decad|. Ceilalûi doi au fost deja

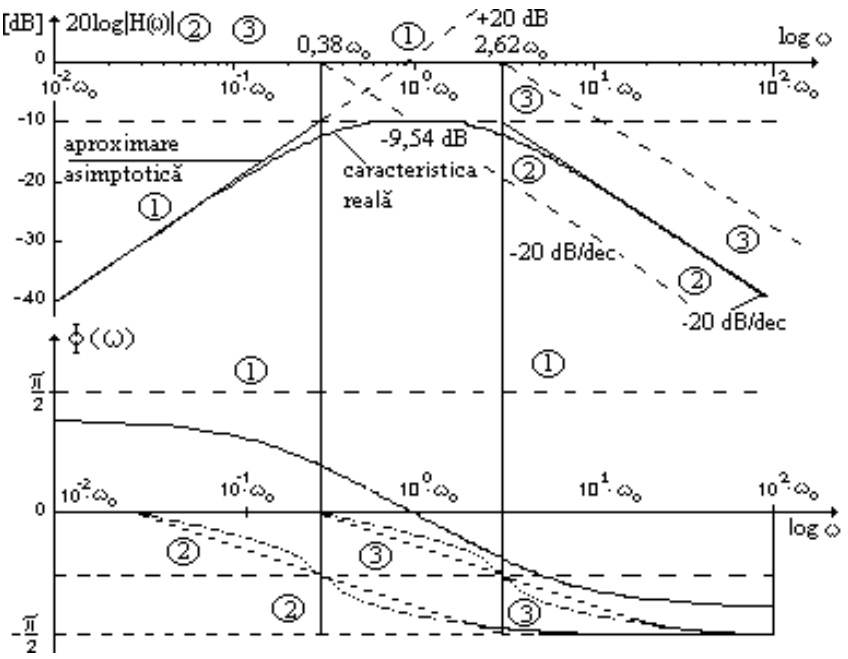


Fig. 4.38a Caracteristicile de modul ði de faz| ale r|spunsului în frecvenû| H(ω) corespunz|toare punûii Wien.

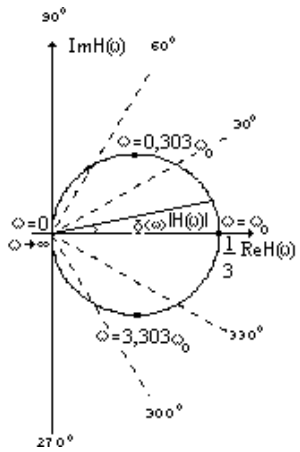


Fig. 4.38b Hodograful r|spunsului în frecven|| al pun||ii Wien.

analiza|i ||i curbele respective sunt marcate în figura 4.37. Însumând cei trei termeni, se ob|ine caracteristica $\Phi(\omega)$ ce traverseaz| axa la $\omega = \omega_o$. Prin urmare, la frecven|a $\omega_o = 1/RC$ [rad/sec] , puntea nu defazeaz| ||i introduce o atenuare de valoare 1/3 (-9,54 dB). În figura 4.38b este ar|tat hodograful r|spunsului în frecven|| al pun||ii Wien. El este un cerc pentru ω variind între 0 ||i 4 .

Realizarea unei pante echivalente de 10 dB/decad| pentru caracteristica de frecven||

Se consider| sistemul din figura 4.39. Amplificatoarele opera||ionale se consider| ideale. Referindu-ne numai la primul etaj se |tie c|:

$$H_1(\omega) = \frac{U_1(\omega)}{X(\omega)} = 1 + \frac{Z_R(\omega)}{R}\ ; \qquad \textbf{(4.205)}$$

$$Z_R(\omega) = \frac{R_1}{1 + j\omega r_1 C} = \frac{R_1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}\ ;\ \omega_1 = \frac{1}{R_1 C}.$$

Prin urmare:

$$H_1(\omega) = 1 + \frac{R_1}{R(1 + j\omega R_1 C)} = \frac{R + R_1}{R}\,\frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}\ ;\ \omega_2 = \frac{1}{R_P C}\ ;\ R_P = \frac{R R_1}{R + R_1}. \qquad \textbf{(4.206)}$$

R|spunsul în frecven|| al primului etaj este deci:

$$H_1(\omega) = A\,\frac{1 + j(\omega/\omega_2)}{1 + j(\omega/\omega_1)}\ . \qquad \textbf{(4.207)}$$

În mod asem|n|tor se determin| func||iile de transfer ale etajelor realizate cu amplificatoarele A_2 ||i A_3 . Deoarece rezisten||ele din schem| sunt acelea||i iar capacitatea scade de 10 ori respectiv de 100 de ori, frecven||ele de t|iere ce intervin cresc de 10 ori respectiv de 100 de ori:

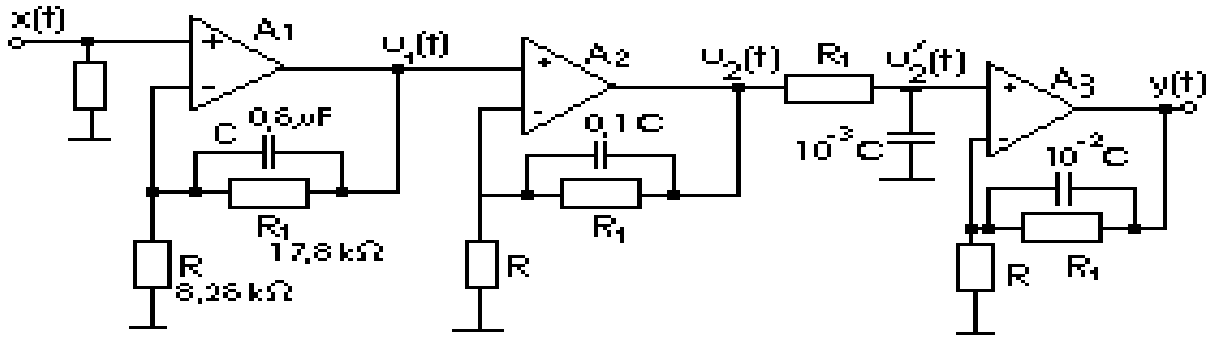


Fig. 4.39 Sistem ce realizeaz| o pant| echivalent| de -10 dB/decad| pentru modulul r|spunsului în frecven]|.

$$H_2(\omega) = A\,\frac{1 + j\frac{\omega}{10\,\omega_2}}{1 + j\frac{\omega}{10\,\omega_1}}\;;\quad H_3(\omega) = A\,\frac{1 + j\frac{\omega}{100\,\omega_2}}{1 + j\frac{\omega}{100\,\omega_1}}\;. \qquad \textbf{(4.208-209)}$$

În ceea ce priveÕte circuitul (R_1 ; 10^{-3}C) situat între al doilea Õi al treilea etaj, pentru el se deduce imediat c|:

$$H_4(\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega / 1000\,\omega_1)}\;. \qquad \textbf{(4.210)}$$

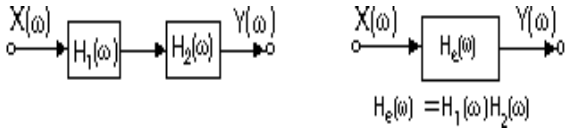


Fig. 4.40 Sistemul echivalent celor dou| sisteme conectate în cascad| .

Consider|m dou| sisteme conectate în cascad|, caracterizate de r|spunsurile la impuls Õi r|spunsurile în frecven]|:

h_1<—> $H_1(\omega)$;

h_2<—> $H_2(\omega)$.

Dar, aÕa cum s-a demonstrat, în anumite condi]ii, h este r|spunsul la impuls al sistemului ce echivaleaz| cele dou|

$$h_e(t) = h_1(t) * h_2(t) \leftrightarrow H_e(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)\;. \qquad \textbf{(4.211)}$$

sisteme. Aplicând teorema convolu]iei se ob]ine:

În condi]iile în care sistemele sunt stabile, r|spunsul în frecven]| al sistemului

echivalent este produsul r|spunsurilor în frecven]| ale celor dou| sisteme componente. În m|sura în care opera]iile au sens, rela]ia (4.211) se poate extinde, din aproape în aproape, la mai multe sisteme. În cazul de fa]| avem patru subsisteme conectate în cascad|. Pentru ele, r|spunsul în frecven]| echivalent H(ω) este:

$$H(\omega) = A^3 \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{10\omega_2}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{100\omega_2}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{10\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{100\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{1000\omega_1}\right)} . \qquad \textbf{(4.212)}$$

Elementele schemei se aleg astfel încât:

$$\omega_2 = 3{,}162\ \omega_1 . \qquad \textbf{(4.213)}$$

Dac| se]ine seam| de expresiile (4.205)]i (4.206) rezult|, înlocuind ω_1]i ω_2 în rela]ia anterioar| c|:

$$A = 3{,}162 . \qquad \textbf{(4.214)}$$

Deoarece lg3,162 = 0,5 , rezult| c| ω_2 se plaseaz|, în scar| logaritmic| la jum|tatea distan]ei între ω_1]i $10\omega_1$. Se calculeaz| $20\lg A^3 = 60\lg 3{,}162 = 60 \cdot 0{,}5 = 30$dB]i se ob]ine pentru modulul r|spunsului în frecven]|, în sc|ri logaritmice, expresia:

$$20lg|H(\omega)| = 30 - 10lg\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] + 10lg\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - 10lg\left[1 + \left(\frac{\omega}{10\omega_1}\right)^2\right] +$$
$$+ 10lg\left[1 + \left(\frac{\omega}{10\omega_2}\right)^2\right] - 10lg\left[1 + \left(\frac{\omega}{100\omega_1}\right)^2\right] - 10lg\left[1 + \left(\frac{\omega}{1000\omega_1}\right)^2\right] \qquad \textbf{(4.215)}$$

Cu excep]ia valorii ini]iale de +30dB, nemarcat| în figura 4.41, to]i ceilal]i 7 termeni sunt marca]i, în ordinea în care apar în rela]ia (4.215). Termenii **1**, **3**, **5**]i **7** corespund unor linii frânte ce cad cu 20dB/decad| începând cu frecven]ele de t|iere (frângere) ω_1 , $10\omega_1$, $100\omega_1$]i, respectiv $1000\omega_1$. Termenii **2**,**4**]i **6** corespund unor linii frânte ce urc| cu 20 dB/decad|, începând cu frecven]ele de t|iere ω_2, $10\omega_2$]i, respectiv $100\omega_2$. Însumând toate cele 7 caracteristici,]i adunând valoarea ini]ial| de 30 dB, se ob]ine o caracteristic| ce poate fi aproximat| cu caracteristica desenat| cu linie plin|. Deoarece frecven]ele ω_2, $10\omega_2$]i $100\omega_2$ sunt logaritmic plasate la jum|tate între ω_1]i $10\omega_1$, $10\omega_1$]i $100\omega_1$ respectiv $100\omega_1$]i $1000\omega_1$, caracteristica cade, în medie, cu

10 dB/decad|. Cu linie - punct este marcat| în figur| caracteristica medie. Aproximarea este valabilă între $-\omega_1$ şi $-10^3\omega_2 = 316\omega_1$.

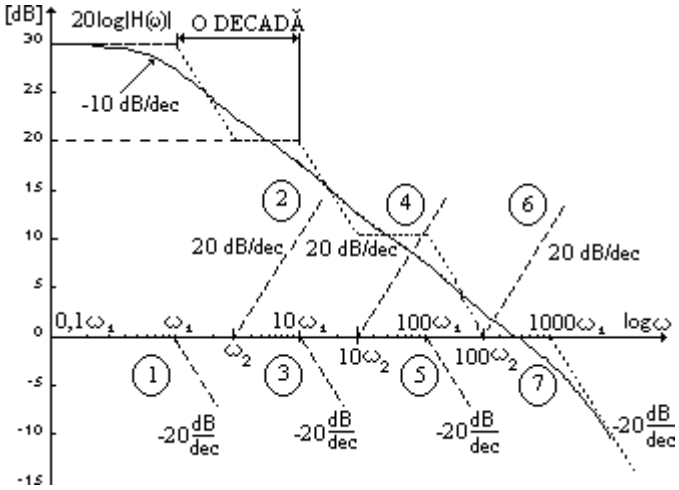


Fig. 4.41. Modulul răspunsului în frecvență al sistemului din figura 4.39.

4.3 Funcții de corelație

4.3.1 Funcûia de corelaûie. Densitatea spectral| de putere Õi energie

Pentru un semnal de energie infinit| dar de putere medie finit| se defineÕte funcûia de corelaûie prin relaûia:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\_>\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt \quad , \quad \tau \in \_ \; . \tag{4.216}$$

În afar| de operaûia de mediere, produsul x*(t)øx(t+τ) se construieÕte ca Õi în cazul convoluûiei, f|r| îns| a reflecta un termen.

Dac| semnalul x(t) este periodic de perioad| T_o (s-a impus notarea cu T_o a perioadei pentru a nu crea confuzii în privinûa simbolului T din relaûia anterioar| care reprezint| o limit| de trunchiere variabil|), el satisface condiûia de aplicare a definiûiei (4.216). Scriind semnalul descompus conform seriei Fourier exponenûiale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{j k \omega_o t} \quad ; \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T_o} \quad , \tag{4.217}$$

obûinem:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_o t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o(t+\tau)}\, dt \ .$$

Schimbând succesiunea operaţiilor expresia se transformă în:

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k^* c_n e^{jn\omega_o\tau} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{j(n-k)\omega_o t}\, dt \ . \qquad \textbf{(4.218)}$$

Dar:

$$\int_{-T}^{T} e^{j(n-k)\omega_o t}\, dt = \begin{cases} \dfrac{2j\ \sin[(n-k)\omega_o T]}{j(n-k)\omega_o}, & n \neq k \\ 2T, & n = k \end{cases} , \qquad \textbf{(4.219)}$$

şi deci limita din relaţia (4.218) este nulă, cu excepţia cazului n = k , caz în care limita este unu. Avem deci:

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2\ e^{jk\omega_o\tau} \ . \qquad \textbf{(4.220)}$$

Se poate calcula, pe aceeaşi cale expresia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt &= \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k^* c_n\ e^{j(n-k)\omega_o t}\ e^{jn\omega_o\tau}\, dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k^* c_n\ e^{jn\omega_o\tau}\ \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} e^{j(n-k)\omega_o t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 e^{jk\omega_o\tau} \ . \end{aligned} \qquad \textbf{(4.221)}$$

În consecinţă, dacă x(t) este un semnal periodic, de perioadă T_o, $\omega_o = 2\pi/T_o$, funcţia sa de corelaţie se calculează cu relaţia:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x^*(t)\ x(t+\tau)\ dt \quad . \tag{4.222}$$

Se poate demonstra direct, dar se poate vedea õi din (4.220) c|, pentru un semnal periodic, funcûia de corelaûie este periodic|, având aceeaõi perioad| T_o ca õi semnalul x(t). Coeficienûii seriei Fourier exponenûiale ataõate funcûiei de corelaûie sunt $|c_k|^2$:

$$\begin{aligned} x(t) \quad &\leftrightarrow \quad \{ c_k \} \\ R_x(\tau) \quad &\leftrightarrow \quad \{ |c_k|^2 \} \ . \end{aligned} \tag{4.223}$$

Expresia (4.220) mai poate fi scris| õi sub forma:

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{-1} |c_k|^2 e^{jk\omega_o\tau} + |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 e^{jk\omega_o\tau} \ .$$

Se õtie c|, pentru x(t) 0 ú , $|c_{-k}| = |c_k|$ õi f|când în prima sum| schimbarea k —> -k:

$$R_x(\tau) = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{jk\omega_o\tau} + e^{-jk\omega_o\tau} \right) \ ,$$

dup| ce se aplic| relaûia lui Euler, se ajunge la forma final|:

$$R_x(\tau) = |c_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \ \cos\ k\omega_o\tau \ . \tag{4.224}$$

Se poate deduce imediat c|:

$$R_x(0) = R_x(nT_o) = P \ , \tag{4.225}$$

unde P este puterea medie pe o perioad| a semnalului x(t). Mai avem:

$$|R_x(\tau)| \le |c_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 |\cos\ k\omega_o\tau| \le |c_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = P \, .$$

sau:

$$|R_x(\tau)| \le R_x(nT_o) \quad \forall \tau \in R\ ,\ \forall n \in Z\ . \tag{4.226}$$

Tot din relaûia (4.225) se poate vedea c|, deoarece cos $k\omega_o\tau$ sunt toate funcûii pare Õi $R_x(\tau)$ este o funcûie par|, adic|:

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau) \quad \forall \tau \in R\ . \tag{4.227}$$

AÕa cum s-a v|zut în '3.3.4, diagrame ce reprezint| $|c_k|^2$ în funcûie de frecvenûele $k\omega_o$ arat| modul de repartizare a puterii P a semnalului între componentele sale armonice. Se poate defini Õi transformata Fourier a funcûiei periodice $R_x(\tau)$:

$$\mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi |c_k|^2 \delta(\omega - k\omega_o) \tag{4.228}$$

$$R_x(\tau) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi |c_k|^2 \delta(\omega - k\omega_o)\ .$$

Transformata Fourier a funcûiei de corelaûie defineÕte densitatea spectral| de putere a semnalului periodic:

$$S_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi |c_k|^2 \delta(\omega - k\omega_o)\ . \tag{4.229}$$

adic|:

$$R_x(-\tau) = R_x^*(\tau)\ . \tag{4.230}$$

Ea se compune din linii spectrale discrete, distribuûii Dirac de intensitate

$$R_x(-\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^*(t)\, x(t-\tau)\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^*(u+\tau)\, x(u)\, du = R_x^*(\tau)\ ,$$

$2\pi|c_k|^2$. Fie acum un semnal x(t) neperiodic dar de putere medie finit|, P. F|când în relaûia (4.216) schimbarea $\tau \longrightarrow -\tau$ se obûine:
Funcûia de corelaûie este conjugat simetric| (sau se mai spune c| are simetrie hermitic|). Dac| semnalul x(t) este real atunci funcûia este par|,

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)\ ,\ x(t) \in R\ ,\ \forall \tau \in R\ . \tag{4.227'}$$

Pentru a defini densitatea spectral| de putere vom considera semnalul x(t)

trunchiat la "T :

$$x_T(t) = p_T(t) \cdot x(t) \quad ; \quad \lim_{T \to \infty} x_T(t) = x(t) \quad . \tag{4.231}$$

El este un semnal de energie finit| Õi are transformata Fourier

$$x_T(t) \leftrightarrow X_T(\omega) \quad . \tag{4.232}$$

Rela Ûia lui Parseval este deci aplicabil| semnalului trunchiat. Energia W_T a acestui semnal, $x_T(t)$ este:

$$W_T = \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 \, d\omega \quad . \tag{4.233}$$

Puterea medie pe durata 2T a semnalului trunchiat este $P_T = W_T/(2T)$. Trecând la limit| pentru T –> 4 , $x_T(t)$ –> x(t) Õi deci P_T –> P , puterea medie a semnalului x(t) :

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{W_T}{2T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 \, d\omega . \tag{4.234}$$

Prin definiÛie, densitatea spectral| de putere a semnalului x(t) , neperiodic, de energie infinit| dar de putere P finit| este:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} \quad . \tag{4.235}$$

Introducând $S_x(\omega)$ în (4.234) se obÛine c| puterea P a semnalului x(t) se calculeaz| cu relaÛia:

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \, d\omega \quad . \tag{4.236}$$

Rela Ûia justific| denumirea de "densitate spectral| de putere" pentru func Ûia $S_x(\omega)$.

Pentru $R_x(\tau)$ se poate determina transformata Fourier:

$$\mathcal{F}\{ R_x(\tau) \} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt\, e^{-j\omega\tau}\, d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^*(t)\, x(t+\tau)\, dt \right] e^{-j\omega\tau}\, d\tau \quad .$$

Se ûine seama de:

$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \;\; ; \;\; X_T(\omega)\, e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \;\; ,$$

õi cu aceasta, relaûia precedent| devine:

$$\mathcal{F}\{ R_x(\tau) \} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot X_T(\omega)\, e^{j\omega t}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\, X_T(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{j\omega t}\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\, X_T(\omega)\, X_T^*(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} = S_x(\omega) \;\; ;$$

$$\mathcal{F}\{ R_x(\tau) \} = S_x(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.237')}$$

Rezultatul obûinut este deosebit de important fiind cunoscut sub numele de teorema Wiener-Hincin.

Teorema Wiener-Hincin

Funcûia de corelaûie õi densitatea spectral| de putere a unui semnal formeaz| o pereche de transformate Fourier:

$$R_x(\tau) \;\leftrightarrow\; S_x(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.238)}$$

Conform afirmaûiei de mai sus se poate scrie õi relaûia de recuperare a semnalului:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \quad , \qquad \textbf{(4.237'')}$$

în care punând $\tau = 0$ se obûine:

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega = P \quad . \tag{4.239}$$

Valoarea funcûiei de corelaûie în origine reprezint| chiar putere medie a semnalului.

Analizând relaûia de definire a densit|ûii spectrale de putere (4.235), se observ| c| ea nu poate fi negativ|, $S_x(\omega)$ $ 0 .

Pentru funcûii x(t) O ú , $R_x(\tau)$ este o funcûie par| Õi deci transformata ei este real| Õi par|, $S_x(-\omega) = S_x(\omega)$.

Din (4.238) Õi (4.239) se deduce, ûinând seama de $|S_x(\omega)| = S_x(\omega)$, c|:

$$|R_x(\tau)| \le R_x(0) \quad . \tag{4.240}$$

Exemple

i) Fie semnalul treapt| unitar| x(t) = σ(t) . Puterea medie a semnalului este:

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T dt = \lim_{T \to \infty} \frac{T}{2T} = \frac{1}{2} \quad .$$

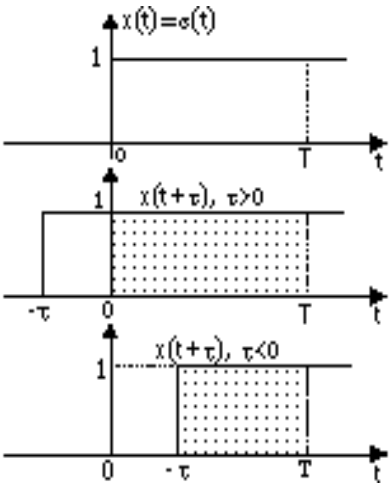


Fig. 4.42 Semnalele implicate în calculul corelaûiei semnalului x(t) = σ(t) .

Funcûia de corelaûie a semnalului se calculeaz| aplicând relaûia de definiûie (4.216). Se va avea în vedere Õi figura 4.42 unde se pot vedea semnalul x(t) Õi semnalul deplasat x(t+τ) , pentru un deplasament τ pozitiv Õi pentru unul negativ.

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T dt = \frac{1}{2} \ , \ \tau > 0 \ .$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^{T} dt = \lim_{T \to \infty} \frac{T+\tau}{2T} =$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{T \to \infty} \frac{\tau}{2T} = \frac{1}{2} \ , \ \tau < 0 \ .$$

Nu este necesar calculul pentru τ < 0 întrucât $R_x(\tau)$ este o funcûie par|. Dar 1/2 <—> πδ(ω) Õi deci densitatea spectral| de putere pentru treapta unitar| este πδ(ω) . Dac| se consider| acum semnalul treapt| unitar| trunchiat la "T se determin|

$X_T(\omega)$:

$$x_T(t) = \sigma(t) - \sigma(t-T) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega) - e^{-j\omega T}\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right)$$

$$X_T(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega) - \pi\,\delta(\omega) = 2\,e^{-j\frac{\omega T}{2}}\,\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}$$

$$X_T(\omega) = e^{-j\frac{\omega T}{2}}\,\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega}{2}} \quad .$$

Relaûia (4.235) aplicat| spectrului semnalului trunchiat d|:

$$S_x(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2 = \pi\lim_{T\to\infty}\left[\frac{T}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2\right] = \pi\delta(\omega)$$

expresia din parantezele drepte fiind un δ-ûir.

ii) Semnalul x(t)=A (o constant|). Este un semnal de energie infinit| dar de putere finit|:

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\,dt = A^2 \quad .$$

Corelaûia se calculeaz| cu:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\,dt = A^2 \quad .$$

Cum $A^2 \longleftrightarrow 2\pi A^2\delta(\omega)$ rezult| c| $S(\omega) = 2\pi A^2\delta(\omega)$ pentru x(t) = A .

Semnalul trunchiat la [-T,T] , $x_T(t) = A\,p_T(t)$ are ca spectru $X_T(\omega)=2A(\sin\omega T)/\omega$. Se aplic| acum (4.235):

$$S_x(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}4A^2\left(\frac{\sin\omega T}{\omega}\right)^2 = 2\pi A^2\lim_{T\to\infty}\left[\frac{T}{\pi}\left(\frac{\sin\omega T}{\omega T}\right)^2\right] = 2\pi A^2\delta(\omega)$$

iii) Semnalul x(t) = sgn(t) . Puterea semnalului este evident P = 1. Funcûia de corelaûie se calculeaz| - vezi Ói figura 4.43 - cu:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left[\int_{-T}^{-\tau} dt - \int_{-\tau}^{0} dt + \int_{0}^{T} dt\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{2T - 2\tau}{2T} = 1 \quad , \quad \tau > 0 \ .$$

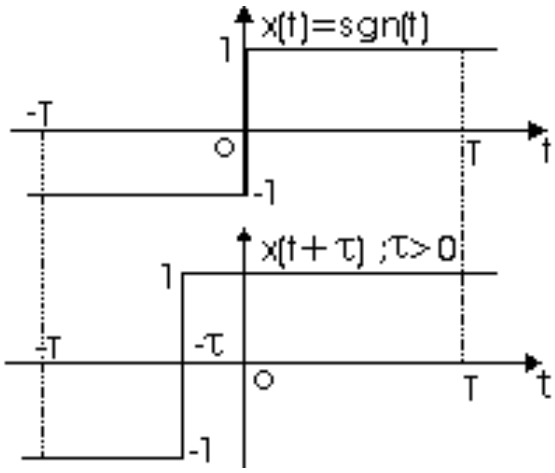


Fig. 4.43 Semnalele utilizate pentru calculul corelaûiei lui sgn(t).

Pentru $\tau < 0$, $R_x(\tau) = 1$ deoarece semnalul este real.
Cum 1 <—> 2π@δ(ω) rezult| c| $S_x(\omega) = 2\pi@\delta(\omega)$, ca Ói pentru semnalul constant, A=1 . Explicaûia este simpl|. Schimbarea polarit|ûii tensiunii la un moment dat la bornele rezistorului nu modific| puterea disipat| fa@| de situaûia în care polaritatea tensiunii aplicate s-ar fi p|strat.

Aplicarea direct| a relaûiei (4.239) nu este posibil| deoarece limita nu exist|. Semnalul trunchiat la [-T, T]

$$x_T(t) = p_{T/2}(t - T/2) - p_{T/2}(t + T/2)$$

:
are spectrul:

$$X_T(\omega) = e^{-j\frac{\omega T}{2}} 2\,\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} - e^{j\frac{\omega T}{2}} 2\,\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} = -4j\,\frac{\sin^2\frac{\omega T}{2}}{\omega} \ ,$$

iar limita: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\, 16\, \frac{\sin^4\frac{\omega T}{2}}{\omega^2}$ *nu exist|. Concluzia care se poate trage din acest exemplu este aceea c| limita dat| de relaûia (4.239) nu exist| întotdeauna. Se poate ocoli îns| aplicarea ei, calculând direct funcûia de corelaûie.*

4.3.2 Funcûia de intercorelaûie pentru semnale de putere finit|

Prin definiûie funcûia de intercorelaûie a dou| semnale x(t) Ói y(t) de energie infinit| dar de putere finit| este:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^*(t)\, y(t+\tau)\, dt \quad . \qquad \textbf{(4.241)}$$

În cazul semnalelor periodice, de aceeaõi perioad| T_o , $\omega_o = 2\pi/T_o$, se poate ar|ta c| $R_{xy}(\tau)$ este õi ea periodic| având perioada T_o egal| cu a semnalelor. În plus, pentru acest caz funcûia de intercorelaûie se poate calcula cu:

Substituind în (4.241) τ cu $-\tau$ se obûine:

$$R_{xy}(-\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^*(t)\, y(t-\tau)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^*(u+\tau)\, y(u)\, du = R^*_{yx} .$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x^*(t)\; y(t+\tau)\; dt \quad . \qquad \textbf{(4.242)}$$

Acelaõi rezultat se obûine õi pentru semnalele periodice. În ambele cazuri:

$$R_{xy}(-\tau) = R^*_{yx}(\tau) \quad , \qquad \textbf{(4.243)}$$

funcûia nefiind în general par|. Se poate determina:

$$\left|R_{xy}(\tau)\right|^2 = \left| \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x^*(t) y(t+\tau) dt \right|^2 = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T}\right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt \right|^2$$

Aplicând inegalitatea lui Schwartz rezult|:

$$|\, R_{xy}(\tau)\,|^{\,2} \le \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |y(t+\tau)|^2\, dt = P_x \cdot P_y \ .$$

Având în vedere faptul c| puterile sunt egale cu valoarea funcûiei de corelaûie în origine se ajunge la inegalitatea:

$$|\, R_{xy}(\tau)\,|^{\,2} \le R_x(0)\; R_y(0) \quad . \qquad \textbf{(4.244)}$$

Se poate defini aõa numitul coeficient de intercorelaûie al semnalelor:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0)\; R_y(0)}} \quad ; \quad |\rho_{xy}(\tau)| \le 1 \quad . \qquad \textbf{(4.245)}$$

Semnalele pentru care $R_{xy}(\tau) = 0$, œ τ O ú sunt ortogonale sau necorelate.

Uneori se utilizeaz| o form| uÕor modificat| pentru funcÛia de intercorelaÛie, numit| Õi funcÛie de intercovarianÛ|, notat| $K_{xy}(\tau)$ sau $C_{xy}(\tau)$:

$$K_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} [x(t) - m_x]^* [y(t+\tau) - m_y] dt \qquad \textbf{(4.246)}$$

în care cu m_x respectiv m_y s-au notat valorile medii temporale ale celor dou| semnale. Media temporal| se defineÕte prin relaÛia:

$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt \quad , \qquad \textbf{(4.247)}$$

pentru semnalul x(t) Õi printr-una asem|n|toare pentru semnalul y(t). În cazul în care aceste semnale sunt periodice de perioad| T_o , relaÛia (4.247) se mai poate scrie:

$$m_x = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x(t)\, dt \quad . \qquad \textbf{(4.247')}$$

Se constat| c| media unui semnal periodic este tocmai componenta sa continu| (coeficientul c_0 din dezvoltarea sa în serie Fourier). Se poate lesne observa c| funcÛia de intercorelaÛie devine chiar funcÛia de corelaÛie atunci când y(t) = x(t) . Acesta este motivul pentru care funcÛiei de corelaÛie i se spune Õi de "autocorelaÛie". Similar se defineÕte, pornind de la (4.246) autocovarianÛa sau pe scurt covarianÛa semnalului x(t):

$$K_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x]^* [x(t+\tau) - m_x] dt \qquad \textbf{(4.248)}$$

Din (4.246), efectuând produsele Õi integrând cei patru termeni, având în vedere constanÛa mediilor rezult|:

$$K_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - m_x^* m_y \quad . \qquad \textbf{(4.249)}$$

În cazul (auto)covarianÛei:

$$K_x(\tau) = R_x(\tau) - |m_x|^2 \quad . \tag{4.250}$$

4.3.3 Trecerea semnalelor de putere medie finit| prin sisteme liniare õi invariante în timp

Pentru comoditatea calculului se noteaz|:

$$x(\tau) \bar{*} y(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, y(\tau - t)\, dt \quad . \tag{4.251}$$

Cu aceast| notaûie funcûiile de intercorelaûie õi (auto)corelaûie se exprim| prin:

$$R_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) \bar{*} y(\tau) \;\; ; \;\; R_x(\tau) = x^*(-\tau) \bar{*} x(\tau) \quad . \tag{4.252}$$

Simbolul introdus permite calculul formal al corelaûiei, aplicat exclusiv semnalelor de putere finit|. Fie un sistem LIT caracterizat de r|spunsul la impuls h(t). La intrarea sa se aplic| un semnal x(t) de putere finit| având funcûia de corelaûie $R_x(\tau)$. La ieõire se obûine semnalul y(t), de putere finit| $y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$. Funcûia de corelaûie a semnalului de ieõire este:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= y^*(-\tau) \bar{*} y(\tau) = [h^*(-\tau) * x^*(-\tau)] \bar{*} [x(\tau) * h(\tau)] = \\ &= [h^*(-\tau) * h(\tau)] * [x^*(-\tau) \bar{*} x(\tau)] = [h^*(-\tau) * h(\tau)] * R_x(\tau) \\ R_y(\tau) &= R_x(\tau) * [h^*(-\tau) * h(\tau)] \quad . \end{aligned} \tag{4.253}$$

Aplicând transformarea Fourier acestei relaûii obûinem:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)\, \mathcal{F}\{h^*(-\tau)\}\, H(\omega) = S_x(\omega)\, H^*(\omega)\, H(\omega)$$

õi deci:

$$S_y\omega) = |H(\omega)|^2 \; S_x(\omega) \quad . \tag{4.254}$$

Densit|ûile spectrale de putere ale semnalelor de intrare õi ieõire sunt legate printr-o relaûie extrem de simpl|. Se observ| c| $|H(\omega)|^2$ este factorul ce permite calculul lui $S_y(\omega)$. Pentru un semnal periodic, $S_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi |c_k|^2 \delta(\omega - k\omega_o)$ õi prin urmare:

$$S_y(\omega)=|H(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi |c_k|^2 \delta(\omega - k\omega_o) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi |c_k|^2 |H(k\omega_o)|^2 \delta(\omega - k\omega_o).$$

Se õtie îns|, c| pentru semnalul de ieõire, coeficienûii seriei Fourier exponenûiale sunt $c = c_k H(k\omega_o)$. Aplicând relaûia de calcul direct a densit|ûii spectrale, cunoscând coeficienûii seriei se ajunge la:

$$S_y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi |c_k^y|^2 \delta(\omega - k\omega_o) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi |c_k|^2 |H(k\omega_o)|^2 \delta(\omega - k\omega_o) ,$$

rezultat în acord cu cel anterior.

4.3.4 Funcûia de intercorelaûie pentru semnalele de energie finită

Fie dou| semnale x(t) õi y(t) de energie finit|. Între cele dou| semnale b|nuim c| exist| o "potrivire", în sensul c| diferenûa dintre un semnal õi versiunea deplasat| a celui de-al doilea, x(t)-y(t+τ) , este, pentru o valoare τ, minim| ca medie p|tratic|. Gradul de asem|nare poate fi "m|surat" introducând deci ca õi criteriu de eroare:

$$\varepsilon(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)-y(t+\tau)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)-y(t+\tau)]^* [x(t)-y(t+\tau)] dt$$

Efectuând calculele rezult|:

$$\varepsilon(\tau)=\|x(t)\|_2^2 + \|y(t)\|_2^2 - \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, y(t+\tau)\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t+\tau)\, dt ,$$

sau:

$$\varepsilon(\tau)=\|x(t)\|_2^2 + \|y(t)\|_2^2 - 2\,Re\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, y(t+\tau)\, dt \right\} . \qquad \textbf{(4.255)}$$

Dac| semnalele sunt õi reale dispare steluûa de conjugare õi simbolul de parte real| Re{@}. Analizând relaûia (4.255) se vede c| un minim al erorii medii p|tratice apare atunci când partea real| a integralei este maxim|. În consecinû|, ea pare s| m|soare direct gradul de "asem|nare" al celor dou| semnale. Se introduce õi pentru semnalele de energie finit| o funcûie de intercorelaûie definit| prin:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\ y(t+\tau)\ dt = x^*(-\tau) * y(\tau) = \breve{x}^*(\tau) * y(\tau)\ . \quad \textbf{(4.256)}$$

De aceast| dat| simbolul convoluûiei are semnificaûia uzual|, spre deosebire de definiûia (4.251).
Se poate defini õi o (auto)corelaûie pentru un semnal de energie finit| prin:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\ x(t+\tau)\, dt = x^*(-\tau) * x(\tau) = \breve{x}^*(\tau) * x(\tau)\ . \quad \textbf{(4.257)}$$

Valoarea corelaûiei în origine este energia semnalului:

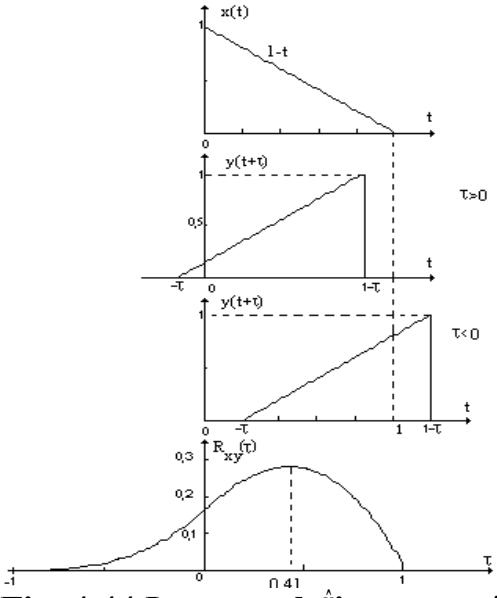


Fig. 4.44 Intercorelaûia nu este în general o funcûie par|.

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\ dt = \quad \textbf{(4.258)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\ d\omega = \|x(t)\|_2^{\,2}\ .$$

Se verific| imediat c|:

$$R_{xy}(-\tau) = R^*_{yx}(\tau)\ \ ;\ \ R_x(-\tau) = R^*_x(\tau)\ \ , \quad \textbf{(4.259)}$$

iar dac| semnalele sunt ambele reale:

$$R_{xy}(\tau)=R_{yx}(\tau)\ ;\ R_x(\tau)=R_x(\tau)\ . \quad \textbf{(4.260)}$$

Funcûia de (auto)corelaûie este simetric|, dar nu õi funcûia de intercorelaûie. Fie, spre exemplu x(t)=(1-t)[σ(t)-σ(t-1)] õi y(t) = t[σ(t)-σ(t-1)] - vezi õi figura 4.44. Pentru $\tau > 0$:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{0}^{1-\tau} (1-t)(t+\tau)\, dt = \frac{(1-\tau)^3}{6} + \tau(1-\tau)\ ;\ 0 \le \tau \le 1\ .$$

Dac| $\tau < 0$ atunci:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\tau}^{1} (1 - t)(t + \tau)\, dt = \frac{1}{6}(\tau + 1)^3 \quad -1 \le \tau \le 0 .$$

După cum rezultă şi din figura 4.44 curba $R_{xy}(\tau)$ nu este pară; ea are un maxim de ~ -0,276 pentru t=0,41. Aplicând relaţiei (4.256) inegalitatea lui Schwartz:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt \right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

şi ţinând seama de (4.258) rezultă că:

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \le R_x(0)\ R_y(0) = \|x(t)\|_2^2\ \|y(t)\|_2^2 \quad . \qquad \textbf{(4.261)}$$

Coeficientul de intercorelaţie are acum expresia:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\|x(t)\|_2\ \|y(t)\|_2} \ ; \ |\rho_{xy}(\tau)| \le 1 \quad . \qquad \textbf{(4.262)}$$

În cazul (auto)corelaţiei inegalitatea (4.261) devine:

$$|R_x(\tau)| \le R_x(0) = \|x(t)\|_2^2 \quad . \qquad \textbf{(4.263)}$$

Având în vedere proprietăţile convoluţiei, se mai poate deduce că la infinit funcţiile de intercorelaţie şi (auto)corelaţie se anuleaz㠖

$$\lim_{\tau \to \pm\infty} R_{xy}(\tau) = 0 \ ; \quad \lim_{\tau \to \pm\infty} R_x(\tau) = 0 \quad . \qquad \textbf{(4.264)}$$

Transformata Fourier a funcţiei de (auto)corelaţie este densitatea spectrală de energie conform teoremei Wiener-Hincin. Vom utiliza aceeaşi notaţie $S_x(\omega)$ ca şi în cazul densităţii spectrale de putere, dar semnificaţia notaţiei este alta:

$$R_x(\tau) \leftrightarrow S_x(\omega) \quad . \qquad \textbf{(4.265)}$$

Dar:

$$R_x(\tau) = x^*(-t) * x(t) \leftrightarrow X^*(\omega) \cdot X(\omega) = |X(\omega)|^2 .$$

Am obûinut deci c| densitatea spectral| de energie este p|tratul modulului transformatei Fourier a semnalului, $|X(\omega)|^2$, transformat| care, spre deosebire de cazul semnalelor de energie infinit| exist|:

$$S_x(\omega) = |X(\omega)|^2 . \qquad \textbf{(4.266)}$$

Densitatea spectral| de energie este o funcûie nenegativ|, $S_x(\omega) \geq 0$. Dac| semnalul x(t) 0 ú , atunci $|X(\omega)| = |X(-\omega)|$ õi în consecinû| $S_x(\omega) = S_x(-\omega)$, densitatea spectral| de energie este o funcûie par| de frecvenû|. Prin definiûie densitatea interspectral| de energie a dou| semnale x(t) õi y(t) este transformata Fourier a funcûiei de intercorelaûie, $R_{xy}(\tau)$:

$$R_{xy}(\tau) \leftrightarrow S_{xy}(\omega) . \qquad \textbf{(4.267)}$$

Úinând seama de relaûia (4.256) avem:

$$S_{xy}(\omega) = \mathcal{F}\{ x^*(-\tau) * y(\tau) \} = X^*(\omega)\, Y(\omega) . \qquad \textbf{(4.268)}$$

Se poate verifica imediat proprietatea:

$$S_{xy}(\omega) = S^*_{yx}(\omega) . \qquad \textbf{(4.269)}$$

Vom mai menûiona c| densitatea interspectral| de energie se mai numeõte õi densitate spectral| mutual| de energie.

4.3.5 Trecerea semnalelor de energie finit| prin sisteme liniare õi invariante în timp

Dac| x(t) õi y(t) sunt semnalul de intrare respectiv de ieõire al unui sistem LIT, semnalele având energie finit|: $y(t) = h(t) * x(t)$ õi deci $Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$. Avem:

$$R_x(\tau) \leftrightarrow |X(\omega)|^2 \;\; ; \;\; R_y(\tau) \leftrightarrow |Y(\omega)|^2 . \qquad \textbf{(4.270)}$$

Densitatea spectral| de energie a semnalului de intrare este $S_x(\omega) = |X(\omega)|^2$. Densitatea spectral| de energie a semanlului de ieõire se poate exprima prin relaûia:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) . \qquad \textbf{(4.271)}$$

Ôi densit|Ûile spectrale de energie ale semnalelor de intrare Õi ieÕire sunt legate, formal, prin aceeaÕi relaÛie, ca Õi densit|Ûile spectrale de putere ale unor semnale de energie infinit| dar de putere finit|. FuncÛia de corelaÛie a semnalului de ieÕire poate fi determinat| pe baza funcÛiei de corelaÛie a semnalului de intrare:

$$R_y(\tau) = y^*(-\tau) * y(\tau) = [\ h^*(-\tau) * x^*(-\tau)\ ] * [\ h(\tau) * x(\tau)\ ]\ ,$$

Õi, în m|sura în care operaÛiile implicate au sens, rezult|:

$$R_y(\tau) = [\ h^*(-\tau) * h(\tau)\ ] * [\ x^*(-\tau) * x(\tau)\ ] = [\ h^*(-\tau) * h(\tau)\ ] * R_x(\tau).$$

În final:

$$R_y(\tau) = R_h(\tau) * R_x(\tau)\ . \qquad \textbf{(4.272)}$$

în care s-a notat:

$$R_h(\tau) = h^*(-\tau) * h(\tau)\ . \qquad \textbf{(4.273)}$$

Se poate determina Õi densitatea interspectral| de energie între semnalul de ieÕire Õi cel de intrare:

$$R_{yx}(\tau) = y^*(-\tau) * x(\tau) = h^*(-\tau) * [\ x^*(-\tau) * x(\tau)\ ]\ ,$$

sau:

$$R_{yx}(\tau) = h^*(-\tau) * R_x(\tau)\ . \qquad \textbf{(4.274)}$$

Aplicând acestei relaÛii transformarea Fourier:

$$\mathcal{F}\{\ R_{yx}(\tau)\ \} = \mathcal{F}\{\ h^*(-\tau)\ \}\ \mathcal{F}\{\ R_x(\tau)\ \}\ .$$

se obÛine relaÛia c|utat|:

$$S_{yx}(\omega) = H^*(\omega)\ S_x(\omega)\ . \qquad \textbf{(4.275)}$$

Exemple

1) *Semnalul poart| temporal| x(t) = $p_T(t)$ are energie finit|, deci i se poate aplica definiÛia (4.257). FuncÛia de autocorelaÛie nu difer| de cea de convoluÛie a semnalului cu el însuÕi, deoarece semnalul este real Õi simetric. În consecinÛ|:*

$$R_x(\tau) = tri_{2T}(\tau) = 2T\left(-1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) p_{2T}(\tau) \ .$$

Densitatea spectral| de putere a acestui semnal, conform rela\^iei (4.73) este:

$$S_x(\omega) = 4\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2$$

2) Semnalul triunghiular x(t) = tri$_T$(t) de suport [-T , T] are func\^ia de (auto)corela\^ie R . Densitatea spectral| de energie a semnalului triunghiular $S_x(\omega)$ este:

$$S_x(\omega) = \left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^4$$

Lobul lateral, cuprins între $\omega = 2\pi/T$ \^i $\omega = 4\pi/T$ are un maxim de $-2\cdot10^{-3}$. Comparativ cu maximul lobului central care apare la $\omega = 0$ \^i este 1 , acest maxim secundar este neglijabil. Se poate spune c|, pentru semnalul triunghiular toat| energia este concentrat| în lobul central.

3) Pentru semnalul cauzal $x(t) = e^{-\omega_o t}\,\sigma(t)$, $\omega_o > 0$, func\^ia de autocorela\^ie se calculeaz| cu:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_o t}\,\sigma(t)\; e^{-\omega_o(t+\tau)}\,\sigma(t+\tau)\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2\omega_o t}\; e^{-\omega_o \tau}\,dt = \frac{e^{-\omega_o\tau}}{2\omega_o}, \tau > 0 \ .$$

Func\^ia x(t) fiind real|, $R_x(\tau)$ este par| \^i deci: $R_x(\tau) = \frac{1}{2\omega_o}\, e^{-\omega_o|\tau|}$.

Densitatea spectral| de energie a semnalului, transformata Fourier a func\^iei de autocorela\^ie este:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\omega_o} e^{-\omega_o|\tau|}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\omega_o} e^{-\omega_o\tau}\,\sigma(\tau)\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\omega_o} e^{\omega_o\tau}\,\sigma(-\tau)\right\} =$$

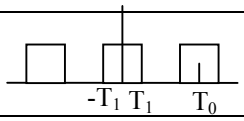
$$= \frac{1}{2\omega_o}\cdot\frac{1}{\omega_o + j\omega} + \frac{1}{2\omega_o}\cdot\frac{1}{\omega_o - j\omega} = \frac{1}{\omega_o^2 + \omega^2} \ .$$

În final: $S_x(\omega) = \frac{1}{\omega_o^2 + \omega^2}$.

Tabelul 4.2. Proprietăţile transformării Fourier în timp

Semnalul aperiodic	Transformata Fourier
$x(t)$	$X(\omega)$
$y(t)$	$Y(\omega)$
$a\,x(t) + b\,y(t)$	$a\,X(\omega) + b\,Y(\omega)$
$x(t - t_o)\ ,\ t_o \in R$	$e^{-j\omega t_o}\ X(\omega)$
$e^{j\omega_o t}\ x(t)\ \ ,\omega_o \in R$	$X(\omega - \omega_o)$
$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t) = x(t)$	$X(-\omega)$
$x(a\,t)\ ,\ a \in R$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(t) * y(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$x^*(\tau) * y(\tau)$	$X^*(\omega) \cdot Y(\omega)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\ X(\omega) * Y(\omega)$
$\frac{d}{dt}\ x(t)$	$j\omega\ X(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ d\tau$	$\frac{1}{j\omega}\ X(\omega) + \pi\ X(0)\ \delta(\omega)$
$t\ x(t)$	$j\ \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$x(t) \in R$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ $\lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert$; $Arg\ X(\omega) = -\ Arg\ X(-\omega)$ $Re\{X(\omega)\} = Re\{X(-\omega)\}$ $Im\{X(\omega)\} = -\ Im\{X(-\omega)\}$
$x_p(t) \leftrightarrow Re\{X(\omega)\}$	$x_i(t) \leftrightarrow j\ Im\{X(\omega)\}$
$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2\ dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2\ d\omega$	
$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ $X(t) \leftrightarrow 2\pi\ x(-\omega)$	

Tabelul 4.3. Perechi semnal - transformat|

Semnalul	Transformata Fourier	Coeficienûii seriei exponenûiale (pentru semnale periodice)
$\sum_k c_k e^{jk\omega_o t}$	$\sum_k 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_o)$	$\{c_k\}$
$e^{j\omega_o t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_o)$	$c_1 = 1 \; ; \; c_k = 0 \quad k \neq 1$
$\cos \omega_o t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)]$	$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2} \; ; \; c_k = 0, k \notin \{-1, 1\}$
$\sin \omega_o t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_o) - \delta(\omega + \omega_o)]$	$c_1 = -c_{-1} = \frac{1}{2j} \; ; \; c_k = 0, k \notin \{-1, 1\}$
$x(t) = 1$ (constanta)	$2\pi \cdot \delta(\omega)$	$c_0 = 1 \; ; \; c_k = 0, k \neq 0$
	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin k\omega_o T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_o)$	$c_k = \frac{\sin k\omega_o T_1}{k\pi}, k \neq 0 \; ; \; c_0 = \frac{2T_1}{T_o}$
$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\omega_o \delta_{\omega_o}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$	$c_k = \frac{1}{T}$
$p_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < \tau \\ 0, & \lvert t\rvert > \tau \end{cases}$	$\frac{2 \sin \omega \tau}{\omega}$	—
$\frac{\sin \omega_o t}{\pi t}$	$p_{\omega_o}(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_o \\ 0, & \lvert\omega\rvert > \omega_o \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1 (constanta)	—
$\delta(t - t_o) \; t_o \in R$	$e^{-j\omega t_o}$	—
$\sigma(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	—
$e^{-at}\sigma(t); Re\{a\} > 0$	$(a + j\omega)^{-1}$	—
$te^{-at}\sigma(t); Re\{a\} > 0$	$(a + j\omega)^{-2}$	—
$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}\sigma(t) \; ; \; Re\{a\} > 0$	$(a + j\omega)^{-n}$	—

Problema 1

Se consideră semnalul:

$$x_0(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & 0\le t\le 1 \\ 0, & in\ \ rest \end{cases}, \qquad \alpha > 0$$

Determinaţi transformatele Fourier ale semnalelor din figura 1.1, folosind proprietăţile acestei transformări şi calculând doar transformata lui $x_0(t)$.

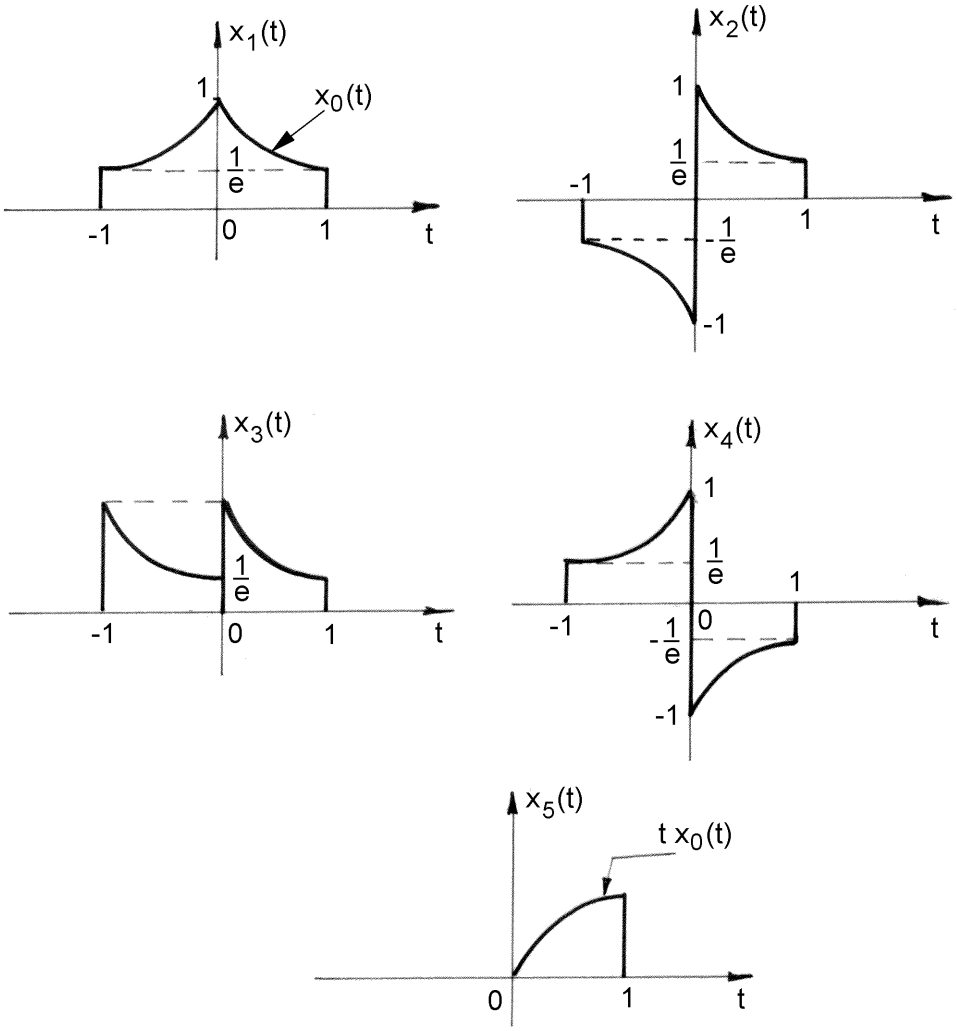


Fig. 1.1. Formele de undă ale semnalelor ale căror spectre trebuiesc calculate.

Rezolvare:

a). Pornind de la proprietăţile transformatei Fourier se pot calcula direct transformatele Fourier ale semnalelor din figura 1.1, astfel:

$$x_1(t) = x_0(t) + x_0(-t) \quad \Rightarrow \quad X_1(\omega) = X_0(\omega) + X_0(-\omega)$$
$$x_2(t) = x_0(t) - x_0(-t) \quad \Rightarrow \quad X_2(\omega) = X_0(\omega) - X_0(-\omega)$$
$$x_3(t) = x_0(t) + x_0(t+1) \quad \Rightarrow \quad X_3(\omega) = X_0(\omega) + e^{j\omega} \cdot X_0(\omega)$$
$$x_4(t) = x_0(-t) - x_0(t) \quad \Rightarrow \quad X_4(\omega) = X_0(-\omega) - X_0(\omega)$$
$$x_5(t) = t \cdot x_0(t) \quad \Rightarrow \quad X_5(\omega) = \Im\{t \cdot x_0(t)\} = j \cdot \frac{dX_0(\omega)}{d\omega}$$

În relaţiile de mai sus transformata Fourier directă a lui $x_0(t)$ *este* $X_0(\omega)$*, care se determină în modul următor:*

$$X_0(\omega) = \int_0^1 e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^1 e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} \int_0^1 d\left[e^{-(\alpha + j\omega)t}\right] =$$
$$= -\frac{1}{\alpha + j\omega}\left[e^{-(\alpha + j\omega)} - 1\right] \quad \Rightarrow \quad X_0(\omega) = \frac{1 - e^{-(\alpha + j\omega)}}{\alpha + j\omega}$$

În continuare, pornind de la relaţiile de mai sus, prin calcul direct se pot obţine expresiile lui $X_1(\omega)$*,* $X_2(\omega)$*,* $X_3(\omega)$*,* $X_4(\omega)$ *şi* $X_5(\omega)$*.*

Problema 2.

Notând cu X(ω) transformata Fourier a semnalului x(t), având reprezentarea grafică din figura 2.1, determinaţi fără a calcula explicit X(ω):

a). $\arg\{X(\omega)\}$*;* *b). X(0);* *c).* $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$*;* *d).* $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot \frac{\sin\omega}{\omega} \cdot d\omega$*;*

e). $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$*;*

f). Schiţaţi transformarea Fourier inversă a lui Re{X(ω)}.

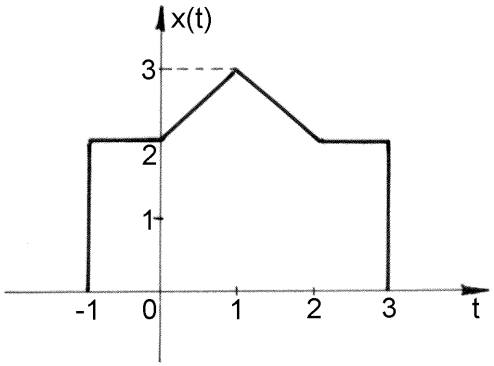


Fig. 2.1. Semnalul a cărui transformată Fourier se presupune cunoscută.

Rezolvare:

a). Analizând variaţia temporală a lui x(t), se constată că funcţia $x(t+1)$ *este reală şi pară şi ca urmare,* $arg\{\mathcal{F}\{x(t+1)\}\} = 0$ *sau* π. *În acest caz, pornind de la proprietăţile transformatei Fourier se poate scrie relaţia:*

$$\mathcal{F}\{x(t+1)\} = e^{j\omega} \cdot X(\omega) \;\Rightarrow\; \pi,\ 0 = \omega + arg\{X(\omega)\} \;\Rightarrow$$

$$\arg\{X(\omega)\} = \begin{cases} -\omega \\ \text{sau} \\ -\omega + \pi \end{cases} \quad \textit{în funcţie de argumentul funcţiei } x(t+1).$$

b). Se calculează $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j\omega t} dt$ *pe intervalul [-1, 3] pentru care este definit semnalul* $x(t)$ *şi pentru* $\omega = 0$, *obţinându-se:*

$$X(0) = \int_{-1}^{3} x(t) \cdot dt = 9$$

c). $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \;\Rightarrow\; x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot d\omega \;\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot d\omega = 2\pi \cdot x(0) = 4\pi$$

d). $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot \frac{\sin\omega}{\omega} \cdot d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) \cdot \mathcal{F}\{p_1(t)\}(\omega) \cdot d\omega =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) \cdot P_1(\omega) \cdot d\omega \quad \textit{unde} \quad P_1(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega}$$

Relaţia de mai sus s-a scris pornind de la teorema lui Parseval conform căreia:

$$\langle f(t),\ g(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F(\omega),\ G(\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot G^*(\omega) d\omega$$

Pentru semnalul treaptă unitate $p_T(t)$ *definit pe intervalul [-T, T], transformata Fourier este descrisă de expresia:*

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}\,dt = -\frac{1}{j\omega}\int_{-T}^{T} d\left[e^{-j\omega t}\right] = -\frac{1}{j\omega}\left(-2j\cdot sin\omega T\right) =$$

$$= \frac{2}{\omega}\cdot \sin \omega T = 2T\cdot \frac{\sin \omega T}{\omega T} = 2T\cdot \sin c(\omega T)$$

Pentru T=1 se obține $\mathcal{F}\{p_1(t)\} = 2\cdot sin\,c\omega = \frac{sin\omega}{\omega} = 2\cdot P_1(\omega)$, *unde lui* $P_1(\omega)$ *îi corespunde* $\frac{1}{2}p_1(t)$.

Deci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot \frac{\sin \omega}{\omega}\cdot d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot \frac{1}{2}\cdot p_1(t)\cdot dt = \pi \int_{-1}^{1} x(t)\cdot dt = \frac{9\pi}{2} = 4{,}5\pi$$

Integrala de mai sus s-a calculat doar pentru intervalul [-1, 1] pe care este definită treapta $p_1(t)$. *În figura 2.2 se reprezintă variația temporală a lui* $x(t)$ *pentru intervalul respectiv, pe care se realizează integrarea.*

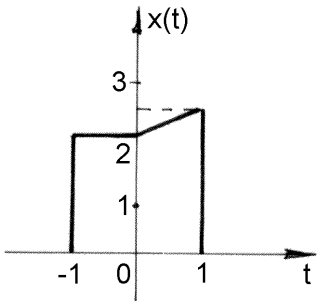


Fig. 2.2. Bucata din semnalul considerat implicată în rezolvarea punctului d).

e).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \left(2\cdot 4 + \int_{0}^{1} (t+2)^2\,dt + \int_{1}^{2} (4-t)^2\,dt\right)\cdot (2\pi) =$$

$$= 2\pi\cdot\left[8 + \int_{0}^{1}\left(t^2+4t+4\right)\cdot dt + \int_{1}^{2}\left(16-8t+t^2\right)\cdot dt\right] =$$

$$= 2\pi\cdot\left[8 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + 2t^2\Big|_0^1 + 4t\Big|_0^1 + 16t\Big|_1^2 - 4t^2\Big|_1^2 + \frac{t^3}{3}\Big|_1^2\right] = \frac{124}{3}\pi$$

În figura 2.3 se reprezintă variația temporală a lui $|x(t)|^2$.

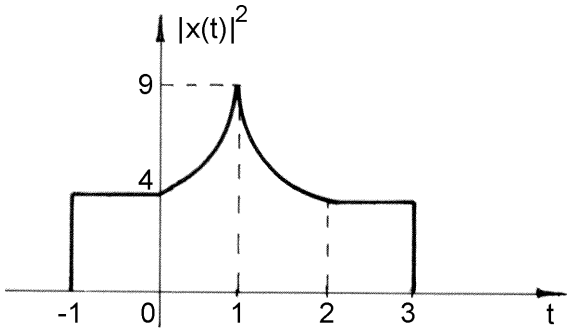


Fig. 2.3. Pătratul modulului semnalului considerat.

f). Lui $\mathrm{Re}\{X(\omega)\}$ *îi corespunde partea pară a semnalului* $x(t)$*, adică* $x_p(t)$*, a cărei variație temporală este prezentată în figura 2.4.*

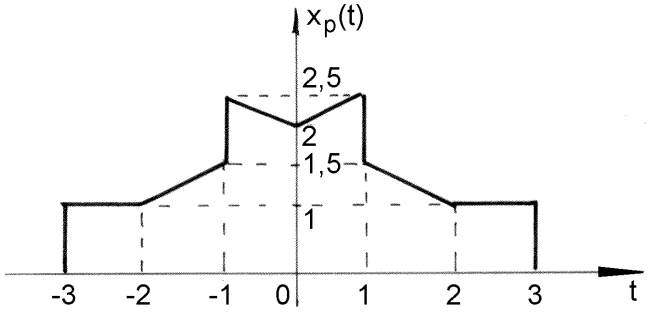


Fig. 2.4. Partea pară a semnalului considerat.

Problema 3.

Se consideră sistemul din figura 3.1 unde:

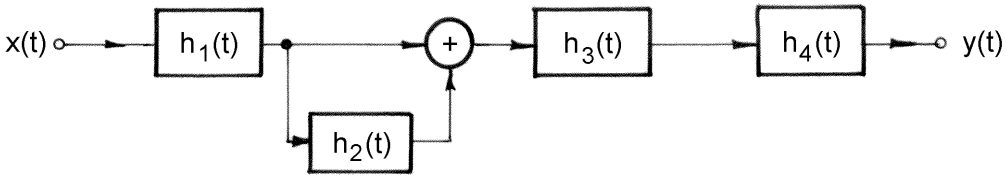


Fig. 3.1. Sistemul analizat.

$$h_1(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\omega_0\cdot\frac{\cos(\omega_0 t)}{t}-\frac{\sin(\omega_0 t)}{t^2}\right];\qquad h_2(t)=\delta\left(t-\frac{2\pi}{\omega_0}\right);$$

$$h_3(t)=\frac{\sin(3\omega_0 t)}{\pi t};\qquad h_4(t)=\sigma(t).$$

a). Determinaţi şi schiţaţi $H_1(\omega)$,$H_2(\omega)$,$H_3(\omega)$ şi H_4
b). Determinaţi răspunsul la impuls al sistemului global, h(t).
c). Care este răspunsul sistemului considerat la semnalul: $x(t)=\sin(2\omega_0 t)+\cos\left(\omega_0\frac{t}{4}\right)$? *Ce rol are un astfel de sistem*?

Rezolvare:

a). $$h_1(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\omega_0\cdot\frac{\cos(\omega_0 t)}{t}-\frac{\sin(\omega_0 t)}{t^2}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\omega_0 t}{t}\right]'$$

$$H_1(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot(j\omega)\cdot\mathcal{F}\left\{\frac{\sin\omega_0 t}{t}\right\}=\frac{\omega_0}{2\pi}\cdot(j\omega)\cdot\mathcal{F}\left\{\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}\right\}=$$

$$=\frac{\omega_0}{2\pi}\cdot(j\omega)\cdot\mathcal{F}\{sinc(\omega_0 t)\}$$

Pentru funcţia treaptă unitate temporală $p_T(t)$ *definită pe intervalul [-T, T] se poate scrie relaţia:*

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\}=2T\cdot sinc(\omega T)\ \Rightarrow\ \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{p_T(t)\}\}=2\pi\cdot p_T(t)\ \Rightarrow$$
$$\mathcal{F}\{2T\cdot sinc(\omega T)\}=2\pi\cdot p_T(t)$$

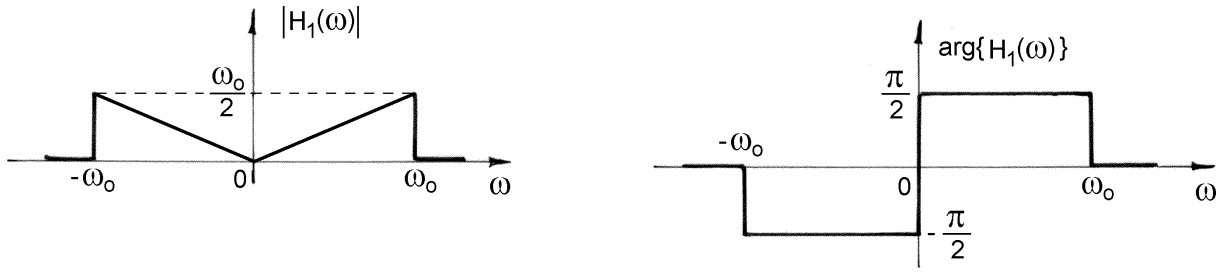
Dacă în expresia de mai sus se fac schimbările de variabilă $T\leftrightarrow\omega_0$ *şi* $t\leftrightarrow\omega$ *se obţine:*

$$\mathcal{F}\{2\omega_0\cdot sinc(\omega_0 t)\}=2\pi\cdot p_{\omega 0}(\omega)\ \Rightarrow\ \mathcal{F}\{sinc(\omega_0 t)\}=\frac{\pi}{\omega_0}\cdot p_{\omega 0}(\omega)$$

$$H_1(\omega)=\frac{\omega_0}{2\pi}\cdot(j\omega)\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\cdot p_{\omega 0}(\omega)=\frac{1}{2}\cdot j\omega\cdot p_{\omega 0}(\omega)$$

$$|H_1(\omega)|=\frac{1}{2}\cdot|\omega|\cdot p_{\omega 0}(\omega);\qquad \arg\{H_1(\omega)\}=\arg\{j\omega\}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \omega\ \rangle\ 0\\ -\frac{\pi}{2}, & \omega\ \langle\ 0\end{cases}$$

În figurile 3.2 a,b sunt reprezentate variațiile lui $|H_1(\omega)|$ *şi* $\arg\{H_1(\omega)\}$ *în raport cu* ω.



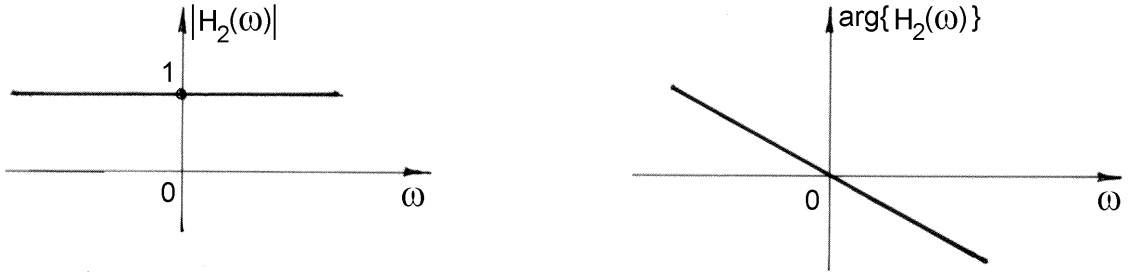
a). *b).*

Fig. 3.2. Răspunsul în frecvență al primului subsistem.

$$h_2(t) = \delta\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}\right) \quad \Rightarrow \quad H_2(\omega) = e^{-j\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}\cdot\omega} \quad \Rightarrow$$

$$|H_2(\omega)| = 1; \qquad \arg\{H_2(\omega)\} = -\frac{2\pi}{\omega_0}\cdot\omega$$

În figurile 3.3 a,b sunt reprezentate variațiile lui $|H_2(\omega)|$ *şi* $\arg\{H_2(\omega)\}$ *în raport cu* ω.



a). *b).*

Fig. 3.3. Răspunsul în frecvență al celui de al doilea subsistem.

$$h_3(t) = \frac{\sin(3\omega_0 t)}{\pi t} = \frac{\sin\omega_1 t}{\pi t} = \frac{\omega_1}{\pi}\cdot\sin c(\omega_1 t) \quad \textit{unde} \quad \omega_1 = 3\omega_0 \Rightarrow$$

$$H_3(\omega) = \frac{\omega_1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\omega_1}\cdot p_{\omega_1}(\omega) = p_{\omega_1}(\omega) = p_{3\omega_0}(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$|H_3(\omega)| = p_{3\omega_0}(\omega); \qquad \arg\{H_3(\omega)\} = 0$$

În figura 3.4 este reprezentată variația lui $|H_3(\omega)|$ *în raport cu* ω.

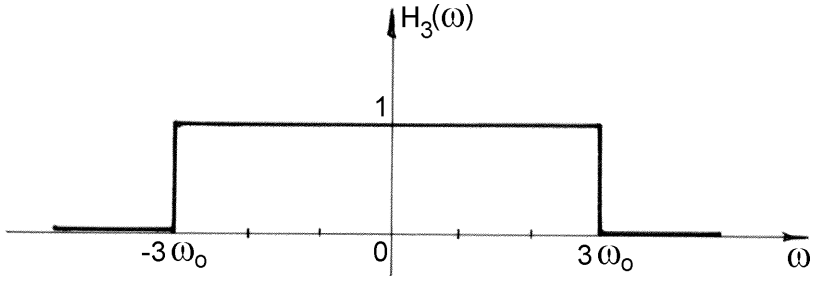


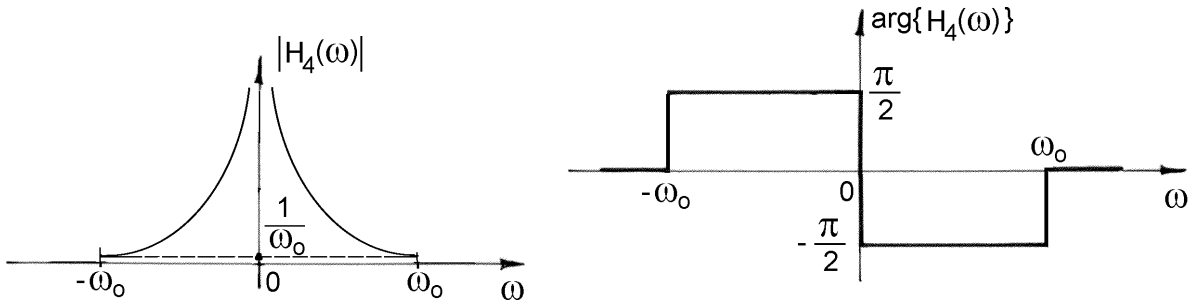
Fig. 3.4. Modulul răspunsului în frecvență al celui de al treilea subsistem.

$$h_4(t)=\sigma(t) \quad \textit{unde} \quad \sigma(t)=\begin{cases} 1 \text{ pentru } t\in[0,\infty) \\ 0 \text{ pentru } t\in(-\infty,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$H_4(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h_4(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{j\omega}\int_{0}^{\infty} d\left(e^{-j\omega t}\right)=-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{j\omega}=-j\frac{1}{\omega} \Rightarrow |H_4(\omega)|=\frac{1}{|\omega|};\ arg\{H_4(\omega)\}=-arg\{j\omega\}=\begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega\ \rangle\ 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega\ \langle\ 0 \end{cases}$$

În figurile 3.5 a,b sunt reprezentate variațiile lui $|H_4(\omega)|$ *și* $\arg\{H_4(\omega)\}$ *în raport cu* ω.



a). *b).*

Fig. 3.5. Răspunsul în frecvență al celui de al patrulea subsistem.

b). $h(t) = h_1(t) * [\delta(t) + h_2(t)] * h_3(t) * h_4(t)$

$$H(\omega) = H_1(\omega) \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t) + \delta\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right\} \cdot H_3(\omega) \cdot H_4(\omega)$$

Dar:

$$H_1(\omega) \cdot H_4(\omega) = j\omega \cdot \frac{1}{2} \cdot p_{\omega_0}(\omega) \cdot \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{2} \cdot p_{\omega_0}(\omega)$$

De aceea:

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \cdot p_{\omega_0}(\omega) \cdot \mathcal{F}\left\{\delta(t) + \delta\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right\} \cdot p_{3\omega_0}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot p_{\omega_0}(\omega)\left[1 + e^{-j\frac{2\pi}{\omega_0}\omega}\right]$$

$$h(t) = \frac{\omega_0}{2\pi}\sin c(\omega_0 t) * \left[\delta(t) + \delta\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] =$$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi}\sin c(\omega_0 t) + \frac{\omega_0}{2\pi}\sin c\left[\omega_0\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]$$

$$h(t) = \frac{\omega_0}{2\pi}\left[\sin c(\omega_0 t) + \sin c\left[\omega_0\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]\right]$$

c). $x(t) = \sin(2\omega_0 t) + \cos\left(\omega_0 \frac{t}{4}\right)$

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \cdot p_{\omega_0}(\omega) \cdot \left[1 + e^{-j\frac{2\pi}{\omega_0}\omega}\right] \Rightarrow$$

$$y(t) = H\left(\frac{\omega_0}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{j\frac{\omega_0}{4}t} + H\left(-\frac{\omega_0}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\omega_0}{4}t}$$

$$H\left(\frac{\omega_0}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + e^{-j\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1 - j}{2}$$

$$H\left(-\frac{\omega_0}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + e^{j\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1 + j}{2}$$

$$y(t) = \frac{1 - j}{4}e^{j\frac{\omega_0}{4}t} + \frac{1 + j}{4}e^{-j\frac{\omega_0}{4}t} = \frac{1}{4}\left[e^{j\frac{\omega_0}{4}t} + e^{-j\frac{\omega_0}{4}t}\right] - \frac{j}{4}\left[e^{j\frac{\omega_0}{4}t} - e^{-j\frac{\omega_0}{4}t}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\omega_0}{4}t\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_0}{4}t\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\sin\left(\frac{\omega_0}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\omega_0}{4}t\right)\right]$$

Analizând semnalul de răspuns y(t) se constată că dintre cele două componente ale

semnalului x(t), cea de frecvență înaltă $\sin(2\omega_0 t)$*, este complet rejectată. În concluzie, sistemul este un filtru trece-jos.*

Problema 4.

Semnalul $x(t)=\cos(\alpha t)+\cos(3\alpha t)$ *este conectat la intrarea sistemelor cu răspunsurile la impuls:* $h_a(t)=\dfrac{\sin(2\alpha t)}{\frac{\alpha}{2}t}$ *;* $h_b(t)=\dfrac{\sin(2\alpha t)\cdot\sin(4\alpha t)}{\frac{\alpha}{2}t^2}$ *şi* $h_c(t)=\dfrac{\sin(2\alpha t)\cdot\cos(4\alpha t)}{\frac{\alpha}{2}t}$.

a). Determinați răspunsurile în frecvență ale celor trei sisteme. Schițați caracteristicile de frecvență ale modulelor acestor răspunsuri.
b). Determinați expresiile celor trei răspunsuri, ale sistemelor considerate, la semnalul x(t).
c). Dacă semnalul x(t) ar avea o componentă utilă şi una perturbatoare, pe care dintre cele trei sisteme l-ați alege presupunând că perturbația este $\cos(\alpha t)$ *? Dar dacă perturbația ar fi* $\cos(3\alpha t)$ *?*

d). Cum răspunde sistemul având $h_a(t)$ *la semnalul* $x(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ *?*

Rezolvare:

a). $$h_a(t)=\frac{\sin(2\alpha t)}{\frac{\alpha}{2}t}\overset{\beta=2\alpha}{=}\frac{\sin\beta t}{\frac{\beta}{4}t}=4\sin c(\beta t)=4\sin c(2\alpha t)$$

Ştiind că $\mathcal{F}\{sinc(\omega_0 T)\}=\dfrac{\pi}{\omega_0}\cdot p_{\omega 0}(\omega)$*, se constată că* $H_a(\omega)=4\dfrac{\pi}{\beta}\cdot p_\beta(\omega)=\dfrac{2\pi}{\alpha}\cdot p_{2\alpha}(\omega)$.

În figura 4.1.a se reprezintă $|H_a(\omega)|$.

$$h_b(t)=\frac{\sin(2\alpha t)\cdot\sin(4\alpha t)}{\frac{\alpha}{2}t^2}=\frac{\sin(2\alpha t)}{\frac{\alpha}{2}t}\cdot\frac{\sin(4\alpha t)}{t}=h_a(t)\cdot 4\alpha\sin c(4\alpha t)$$

$$H_b(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[H_a(\omega)*(4\alpha)\frac{\pi}{4\alpha}p_{4\alpha}(\omega)\right]=\frac{1}{2}\left[H_a(\omega)*p_{4\alpha}(\omega)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\left[p_{2\alpha}(\omega)*p_{4\alpha}(\omega)\right]=\frac{\pi}{\alpha}\left[p_{2\alpha}(\omega)*p_{4\alpha}(\omega)\right]$$

În figura 4.1.c se reprezintă $|H_b(\omega)|$.

$$h_c(t)=\frac{\sin(2\alpha t)\cdot\cos(4\alpha t)}{\frac{\alpha}{2}t}=\frac{\sin(6\alpha t)-\sin(2\alpha t)}{\alpha t}=6\sin c(6\alpha t)-2\sin c(2\alpha t)$$

$$H_c(\omega)=6\cdot\frac{\pi}{6\alpha}\cdot p_{6\alpha}(\omega)-2\cdot\frac{\pi}{2\alpha}\cdot p_{2\alpha}(\omega)=\frac{\pi}{\alpha}\left[p_{6\alpha}(\omega)-p_{2\alpha}(\omega)\right]$$

În figura 4.1.d se reprezintă $|H_c(\omega)|$.

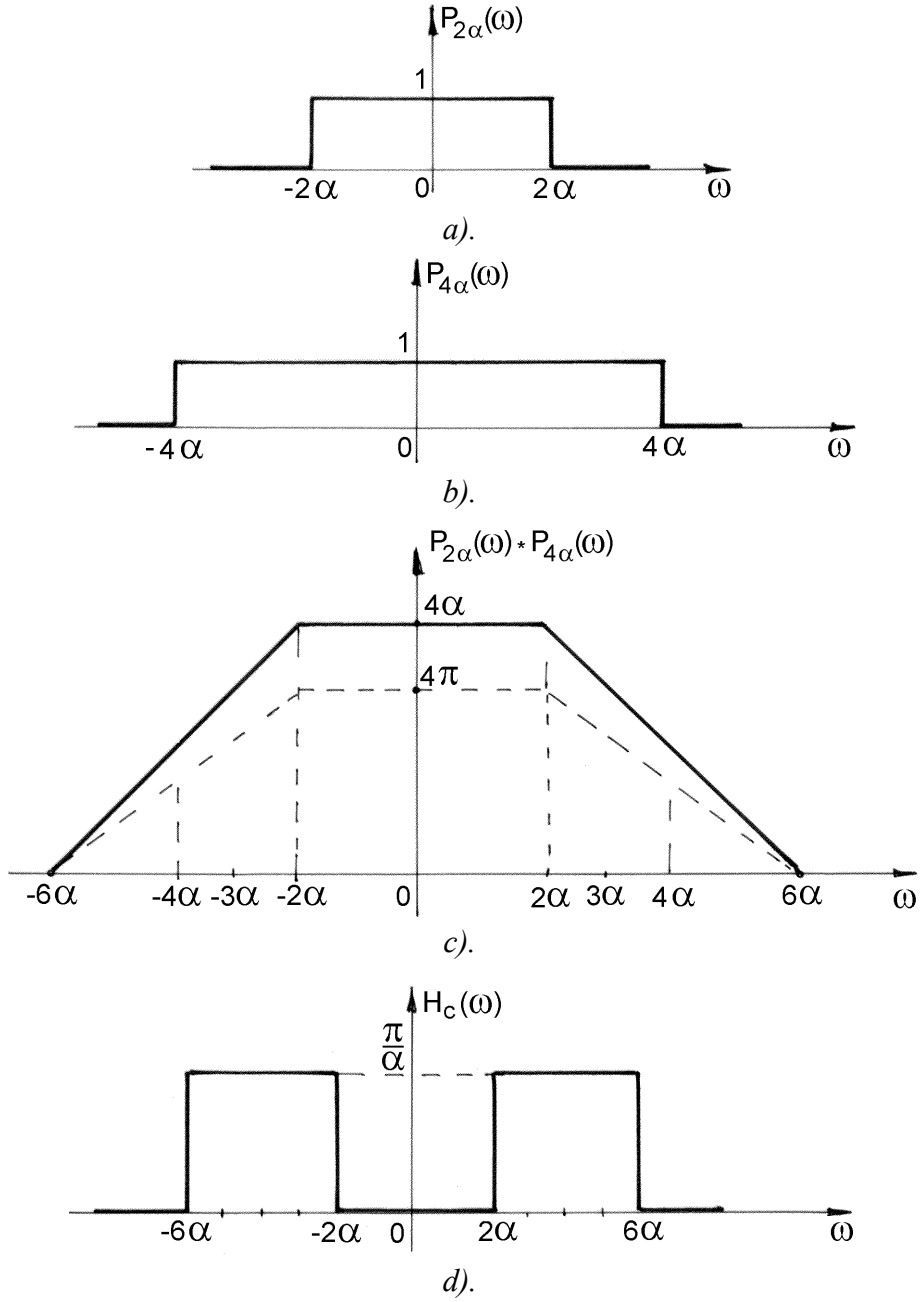


Fig. 4.1. Răspunsurile în frecvență ale celor 3 sisteme considerate.

b). În cazul sistemului având $H_a(\omega) = 4\frac{\pi}{\beta} \cdot p_\beta(\omega) = \frac{2\pi}{\alpha} \cdot p_{2\alpha}(\omega)$*, care este un fitru trece-jos, componenta* $\cos(3\alpha t)$ *este rejectată. Deci, răspunsul circuitului va fi de forma:*

$$y_a(t) = \frac{2\pi}{\alpha} \cdot \cos(\alpha t)$$

Pentru sistemul caracterizat de $H_b(\omega) = \frac{\pi}{\alpha}[p_{2\alpha}(\omega) * p_{4\alpha}(\omega)]$ *răspunsul se determină astfel:*

$$y_b(t) = H_b(\alpha) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{j\alpha t} + H_b(-\alpha) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-j\alpha t} + H_b(3\alpha) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{j3\alpha t} +$$

$$+ H_b(-3\alpha) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-j3\alpha t} = 4\pi \cdot \cos(\alpha t) + 3\pi \cdot \cos(3\alpha t)$$

În cazul celui de al treilea sistem, $H_c(\omega) = \frac{\pi}{\alpha}[p_{6\alpha}(\omega) - p_{2\alpha}(\omega)]$*, răspunsul este de forma:*

$$y_c(t) = \frac{\pi}{\alpha} \cdot \cos(3\alpha t)$$

c). Presupunând că perturbaţia conţinută în semnalul de intrare x(t) este $\cos(\alpha t)$*, pentru ca să se obţină rejectarea acestei componente se alege cel de al treilea sistem, având* $H_a(\omega)$*. În cazul în care perturbaţia conţinută în semnalul de intrare x(t) este* $\cos(3\alpha t)$*, pentru ca aceasta să fie rejectată se alege primul sistem.*

d). $h_a(t) = \frac{\sin(2\alpha t)}{\frac{\alpha}{2} t}$*;* $H_a(\omega) = \frac{2\pi}{\alpha} \cdot p_{2\alpha}(\omega)$*;* $x(t) = \frac{1}{1 + t^2}$

Se determină spectrul semnalului de intrare. Se porneşte de la:

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha t} \cdot \sigma(t)\} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha + j\omega)t} = -\frac{1}{\alpha + j\omega} \int_0^\infty d\left[e^{-(\alpha + j\omega)t}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\alpha + j\omega}(-1) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{e^{-t} \cdot \sigma(t)\} = \frac{1}{1 + j\omega}$$

La fel:

$$\mathcal{F}\left\{e^{\alpha t}\cdot\sigma(-t)\right\}=\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha t}\cdot e^{-j\omega t}dt\overset{u=-t}{=}\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha u}\cdot e^{j\omega u}du=\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha-j\omega)u}du=$$

$$=-\frac{1}{\alpha-j\omega}\int_{0}^{\infty}d\left[e^{-(\alpha-j\omega)u}\right]=\frac{1}{\alpha-j\omega}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{F}\left\{e^{t}\cdot\sigma(-t)\right\}=\frac{1}{1-j\omega}$$

De aceea:

$$\mathcal{F}\left\{e^{t}\cdot\sigma(-t)+e^{-t}\cdot\sigma(t)\right\}=\frac{1}{1+j\omega}+\frac{1}{1-j\omega}=\frac{2}{1+\omega^{2}}$$

Aplicând teorema simetriei:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2}{1+\omega^{2}}\right\}(t)=2\pi\cdot\left[e^{-t}\cdot\sigma(t)+e^{t}\cdot\sigma(-t)\right]$$

sau transformând constantele şi variabilele de timp în constante şi variabile de frecvenţă şi reciproc:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2}{1+t^{2}}\right\}(\omega)=2\pi\cdot\left[e^{-\omega}\cdot\sigma(\omega)+e^{\omega}\cdot\sigma(-\omega)\right]$$

Deci:

$$\mathrm{Y}(\omega)=2\pi\cdot\left[\mathrm{e}^{-\omega}\cdot\sigma(\omega)+\mathrm{e}^{\omega}\cdot\sigma(-\omega)\right]\cdot\frac{2\pi}{\alpha}\cdot\mathrm{p}_{2\alpha}(\omega)$$

sau inversând transformata Fourier:

$$\mathrm{y}(\mathrm{t})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Y}(\omega)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\mathrm{d}\omega=\frac{2\pi}{\alpha}\int_{-2\alpha}^{2\alpha}\left[\mathrm{e}^{-\omega}\cdot\sigma(\omega)+\mathrm{e}^{\omega}\cdot\sigma(-\omega)\right]\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\mathrm{d}\omega=$$

$$=\frac{2\pi}{\alpha}\left[\int_{-2\alpha}^{0}\mathrm{e}^{-(-1+\mathrm{jt})\omega}\mathrm{d}\omega+\int_{0}^{2\alpha}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{jt})\omega}\mathrm{d}\omega\right]=\frac{2\pi}{\alpha}\left[\int_{-2\alpha}^{0}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{jt})\omega}\mathrm{d}\omega+\int_{0}^{2\alpha}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{jt})\omega}\mathrm{d}\omega\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{\alpha}\left[\frac{1}{1-\mathrm{jt}}\int_{-2\alpha}^{0}\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{(1-\mathrm{jt})\omega}\right]-\frac{1}{1+\mathrm{jt}}\int_{0}^{2\alpha}\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{jt})\omega}\right]\right]=\frac{2\pi}{\alpha}\left[\frac{1}{1-\mathrm{jt}}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{jt})\omega}\Big|_{-2\alpha}^{0}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1+\mathrm{jt}}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{jt})\omega}\Big|_{0}^{2\alpha}\right]=\frac{2\pi}{\alpha}\left[\frac{1}{1-\mathrm{jt}}\left(1-\mathrm{e}^{-2(1-\mathrm{jt})\alpha}\right)-\frac{1}{1+\mathrm{jt}}\left(\mathrm{e}^{-2(1+\mathrm{jt})\alpha}-1\right)\right]$$

5. ANALIZA FOURIER A SEMNALELOR DEFINITE ÎN TIMP DISCRET 284
5.1 Răspunsul sistemelor discrete, liniare şi invariante în timp la exponenţiala complexă de modul unitar 285
5.2 Seria Fourier în timp discret pentru semnale discrete periodice 286
5.2.1 Proprietăţile seriei Fourier în timp discret 293
5.3 Transformarea Fourier în timp discret, pentru semnale discrete 298
5.3.1 Definiţia formală a transformatei Fourier în timp discret pentru semnale discrete şi aperiodice 301
5.3.2 Transformarea Fourier în timp discret pentru semnale discrete şi periodice 306
5.3.3 Proprietatile transformarii Fourier in timp discret 309
5.4 Răspunsul în frecvenţă al sistemelor discrete liniare şi invariante în timp 316
5.4.1 Calculul răspunsului unui sistem discret liniar şi invariant în timp la un semnal de intrare discret şi periodic 317
5.4.2 Cazul sistemelor discrete liniare şi invariante în timp caracterizate de ecuaţii cu diferenţe finite liniare şi cu coeficienţi constanţi 318
5.4.3 Sisteme discrete liniare şi invariante in timp de ordinul întâi şi doi 321
5.5 Funcţia de corelaţie. Densitatea spectrală de putere şi de energie a semnalelor discrete 326
Tabelul 5.1 Proprietăţile seriei Fourier în timp discret 331
Tabelul 5.2 Proprietăţile transformării Fourier în timp discret 332
Tabelul 5.3. Perechi semnal-transformată Fourier în timp discret 333

5. ANALIZA FOURIER A SEMNALELOR DEFINITE ÎN TIMP DISCRET

Studiul circuitelor şi al semnalelor electrice, ce sunt prin excelenţă funcţii de timpul continuu t, a favorizat analiza Fourier în timp continuu. Eforturile făcute în domeniul studiului semnalelor şi sistemelor definite în timp continuu pot fi urmărite până în anii 1700, practic fără întrerupere.

Conceptele legate de timpul discret şi metodele de investigare sunt proprii analizei numerice. Încă de pe timpul lui Newton (anii 1600) s-au căutat formule pentru rezolvarea numerică (aproximativă) a unor probleme de interpolare, integrare şi derivare. Observaţiile astronomice asupra mişcării corpurilor cereşti, permiteau determinarea poziţiei acestora la anumite momente de timp. Fiind dată o secvenţă de observaţii făcute, se punea problema determinării poziţiei viitoare a corpului ceresc. Problema a impulsionat studiul seriilor temporale şi printre altele, a condus la conceptul de eroare medie pătratică minimă.

Se poate spune că formarea conceptelor şi metodelor de studiu adecvate pentru semnalele şi sistemele în timp discret s-a desfăşurat în paralel cu formarea conceptelor şi metodelor adecvate semnalelor în timp continuu, dar în mod independent.

Ca urmare a apariţiei şi a dezvoltării calculatoarelor electronice numerice, în anii '40 şi mai ales în anii '50 s-au realizat progrese importante în tehnicile de prelucrare a semnalelor discrete în general şi în utilizarea analizei Fourier în timp discret în special. S-au studiat sisteme ce prelucrau semnale eşantionate, sisteme discrete, şi s-au pus în evidenţă efectele cauzate de cuantizarea valorilor eşantioanelor.

Pe măsură ce impactul calculatorului numeric în prelucrarea semnalelor a crescut, s-a realizat o întrepătrundere şi unificare a metodelor specifice timpului discret şi timpului continuu. În plus, calculatorul numeric a permis implementarea unor metode şi sisteme de prelucrare a semnalelor discrete ce nu puteau fi realizate în timp continuu din punct de vedere practic, ca urmare a limitării echipamentelor. Cele mai multe dintre metodele implementate cereau calculul unei transformate Fourier în timp discret, operaţie ce consumă un timp îndelungat. Apariţia, la mijlocul anilor '60 a algoritmului FFT, de transformare rapidă, a făcut prelucrarea numerică deosebit de eficientă.

Astăzi, practic nu se poate concepe prelucrarea semnalelor fără ajutorul calculatorului electronic numeric, devenit mai mult "bun de larg consum" decât un instrument de cercetare teoretică. Mai mult, s-au realizat chiar capsule ce incorporează microprocesorul, memoria de program de prelucrare şi de stocare a semnalului în acelaşi "chip" cu sistemele de eşantionare, conversie şi reconversie.

5.1 Răspunsul sistemelor discrete, liniare şi invariante în timp la exponenţiala complexă de modul unitar

Un SLIT discret este complet caracterizat de răspunsul său la impuls, h[n] , numit şi funcţie pondere. Între semnalele posibile de intrare, un rol aparte revine exponenţialei complexe discrete de modul unitar:

$$x[n] = e^{j\Omega_o n} \triangleq \Phi_o[n] \quad . \tag{5.1}$$

La ieşirea sistemului se obţine semnalul discret:

$$y[n] = h[n] * e^{j\Omega_o n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\Omega_o (n-k)} = e^{j\Omega_o n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega_o k} \quad .$$

Se notează cu H(Ω) funcţia de variabilă continuă Ω:

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k} \quad . \tag{5.2}$$

Ea depinde numai de răspunsul la impuls al sistemului şi, probabil, caracterizează sistemul în domeniul variabilei Ω, numită şi ea frecvenţă. Reamintim că Ω este de fapt un arc, dar are, în sensul dat în capitolul 1, o semnificaţie legată de variaţia după n a exponenţialei, ceea ce îi conferă atributul de "frecvenţă".

Răspunsul la semnalul de intrare de tip exponenţială complexă discretă este:

$$y[n] = e^{j\Omega_o n} H(\Omega_o) = |H(\Omega_o)| \cdot e^{j[\Omega_o n + \Phi(\Omega_o)]} \quad . \tag{5.3}$$

La ieşire se obţine tot o exponenţială complexă discretă, de aceiaşi frecvenţă Ω_o ca şi a semnalului aplicat la intrare, dar de modul şi fază iniţială afectate de $|H(\Omega_o)|$ (multiplicativ), respectiv de $\Phi(\Omega_o)$ (aditiv). Prin urmare, exponenţiala complexă discretă este o funcţie proprie a unui SLIT discret (SLITD). Valoarea proprie asociată este $H(\Omega_o)$. Se mai poate scrie:

$$S_d\left\{e^{j\Omega_o n}\right\} = H(\Omega_o) e^{j\Omega_o n} \quad , \tag{5.3'}$$

S_d fiind operatorul ataşat sistemului liniar invariant în timp discret (SLITD).

Fie acum un semnal de intrare x[n] ce apare ca o combinaţie liniară a unor exponenţiale complexe de forma: $\Phi_k[n] = e^{j\Omega_k n}$, şi anume:

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\Omega_k n} \quad . \tag{5.4}$$

Deoarece operatorul S_d este liniar, punând (5.4) în (5.3'), rezultă un semnal de ieşire:

$$y[n] = \sum_k a_k H(\Omega_k) e^{j\Omega_k n} \quad . \tag{5.5}$$

Dacă semnalul de intrare se poate pune sub forma unei sume de exponenţiale discrete, este suficientă cunoaşterea funcţiei H(Ω) pentru a determina răspunsul y[n].

5.2 Seria Fourier în timp discret pentru semnale discrete periodice

Un semnal discret x[n] este periodic de perioadă N dacă x[n] = x[n+N] , ∀n∈Z. Într-o perioadă a semnalului există întotdeauna numai N valori, de exemplu {x[0], x[1], x[2],...,x[N-1]} , după care ele se repetă, x[N] = x[0] , x[N+1] = x[1] etc. Se mai poate scrie că x[n] = x[$(n)_N$] unde $(n)_N$ este reprezentarea lui n în clase de resturi modulo N. Astfel $(7)_8 = 7$, deoarece 7 = 0·8+7 ; $(15)_8 = 7$, pentru că 15 = 1·8+7 . Pentru n < 0 restul $(n)_N$ trebuie să fie pozitiv. Astfel $(-15)_8 = 1$ deoarece -15=-2·8+1.

Această observaţie atestă faptul că spaţiul semnalelor discrete şi periodice, de perioadă N, are dimensiunea N. Ca atare bazele din spaţiul respectiv sunt N dimensionale. Astfel, funcţiile periodice, de perioadă N:

$$\left\{ \phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \;\; , \;\; 0 \le k \le N-1 \right\} \;\; , \tag{5.6}$$

formează o bază ortogonală în spaţiul funcţiilor discrete periodice, de perioadă N.

Condiţia de ortogonalitate se verifică imediat. Pentru comoditate se notează:

$$\Omega_o = \frac{2\pi}{N} \;\; , \tag{5.7}$$

şi se calculează produsul scalar a două funcţii:

$$\left\langle \phi_k[n] , \phi_l[n] \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\Omega_o n} e^{-jl\Omega_o n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j(k-l)\Omega_o} \right)^n =$$

$$= \frac{1 - e^{j(k-l)\Omega_o N}}{1 - e^{j(k-l)\Omega_o}} = \frac{1 - e^{j(k-l)2\pi}}{1 - e^{j(k-l)\Omega_o}} \;\; , \;\; l \neq k \quad .$$

Pentru k = l :

$$\left\langle \phi_k[n] , \phi_k[n] \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\Omega_o n} e^{-jk\Omega_o n} = N \quad .$$

În concluzie:

$$\left\langle \phi_k[n] , \phi_l[n] \right\rangle = \begin{cases} N & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} , \qquad \textbf{(5.8)}$$

şi $\|\Phi_k[n]\|_2^2 = N$, unde cu $\|\cdot\|_2$ s-a notat norma în $l^2[0 , N-1]$, spaţiul semnalelor de pătrat sumabil, cu suportul $0 \le n \le N-1$.

Vom arăta că pentru x[n] , semnal periodic, de perioadă N, există coeficienţii c_k , unic determinaţi, astfel încât să existe relaţia:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_o n} \quad ; \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \quad . \qquad \textbf{(5.9)}$$

Relaţia se poate transcrie sub o altă formă. Notăm $\Phi_n=\exp(j\Omega_o n)$ şi $\Phi_n^k=\exp(jk\Omega_o n)$. Relaţia (5.9) se explicitează, utilizând notaţia de mai sus, sub forma:

$$\begin{aligned}
&c_0 + c_1\phi_0 + c_2\phi_0^2 + \ldots + c_{N-1}\phi_0^{N-1} = x[0] && (n=0)\\
&c_0 + c_1\phi_1 + c_2\phi_1^2 + \ldots + c_{N-1}\phi_1^{N-1} = x[1] && (n=1)\\
&c_0 + c_1\phi_2 + c_2\phi_2^2 + \ldots + c_{N-1}\phi_2^{N-1} = x[2] && (n=2)\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&c_0 + c_1\phi_{N-1} + c_2\phi_{N-1}^2 + \ldots + c_{N-1}\phi_{N-1}^{N-1} = x[N-1] && (n=N-1).
\end{aligned} \qquad \textbf{(5.10)}$$

Sistemul de N ecuaţii liniare cu N necunoscute, c_0, c_1,...,c_{N-1} are determinantul sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \phi_0 & \phi_0^2 & \ldots & \phi_0^{N-1} \\ 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \ldots & \phi_1^{N-1} \\ 1 & \phi_2 & \phi_2^2 & \ldots & \phi_2^{N-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \phi_{N-1} & \phi_{N-1}^2 & \ldots & \phi_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix} = \qquad \textbf{(5.11)}$$

$$(\phi_1 - \phi_0)(\phi_2 - \phi_0)\ldots(\phi_{N-1} - \phi_0)(\phi_2 - \phi_1)\ldots(\phi_{N-1} - \phi_{N-2})$$

un determinant Vandermonde de ordin N.

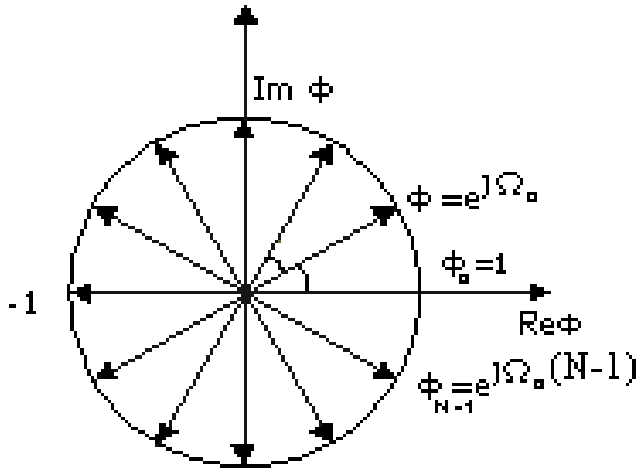


Fig. 5.1 Reprezentarea vectorilor $\Phi_0,...\Phi_{N-1}$, coeficienţi în sistemul (5.10).

În figura 5.1 sunt reprezentaţi vectorii $\Phi_0, \Phi_1,...,\Phi_{N-1}$ pentru cazul N = 12. Ei au modulul unitar şi pasul unghiular $\Omega_o = 2\pi/N$. Nici una din diferenţele $\Phi_k - \Phi_l$, $k \neq l$, $0 \leq k, l \leq N-1$, ce intră ca factori în relaţia (5.11) nu este nulă, aşa cum rezultă şi din figura 5.1. În consecinţă $\Delta \neq 0$ şi, prin urmare, sistemul (5.10) are o soluţie unică.

Deci, pentru orice semnal $x[n] \in l_N^2$ (spaţiul semnalelor în timp discret de energie finită şi de durată N, nenule pentru n = 0, N-1) există o mulţime de coeficienţi $\{c_0, c_1,..., c_{N-1}\}$ care pot fi folosiţi pentru dezvoltarea (5.9). Dacă se consideră două semnale diferite $x_1[n]$ şi $x_2[n]$, prin rezolvarea sistemului (5.10) se obţin două soluţii diferite $\{c_0^1 , c_1^1 ,..., c_{N-1}^1\}$ şi $\{c_0^2 , c_1^2 ,..., c_{N-1}^2\}$. Dacă acestea ar fi identice, atunci sistemul ar fi nedeterminat. Deci orice semnal din l_N^2 se poate exprima ca o combinaţie liniară a elementelor mulţimii (5.6). De aceea, aceasta este o mulţime completă. Având în vedere faptul că mulţimea este alcătuită din elemente ortogonale, rezultă că ea este o bază ortogonală pe l_N^2 .

În plus, dacă $x[0] = x[1] = ... = x[N-1] = 0$, sistemul admite numai soluţia banală $c_0 = c_1 = ... = c_{N-1} = 0$ şi reciproc, dacă $c_0 = c_1 = ... = c_{N-1} = 0$, atunci x[0], x[1], ..., x[N-1] nu pot fi decât valori nule. Am arătat că mulţimea de funcţii (5.6) formează o bază pentru semnalele discrete şi periodice de perioadă N. Relaţia (5.9) poate fi privită şi ca dezvoltarea semnalului x[n] în serie Fourier cu utilizarea bazei ortogonale (5.6). Acesta este motivul pentru care determinarea coeficienţilor c_k nu face apel la rezolvarea sistemului (5.10). Se aplică relaţia (3.31), valabilă pentru orice transformare ortogonală:

$$c_k = \frac{\langle x[n], \phi_k[n] \rangle}{\| \phi_k[n] \|_2^2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \, e^{-jk\Omega_o n} \quad ; \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \qquad \textbf{(5.12)}$$

Se spune că relaţiile (5.9) şi (5.12) definesc o pereche Fourier:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \, e^{-jk\Omega_o n} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad , \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \qquad \textbf{(5.12)}$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{jk\Omega_o n} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad , \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \qquad \textbf{(5.9)}$$

şi se notează simbolic:

$$x[n] \longleftrightarrow \{c_k\} \quad . \tag{5.13}$$

Relaţia (5.9) reprezintă o serie Fourier exponenţială în timp discret. Ea poate fi privită ca o relaţie de sinteză a semnalului x[n] printr-o sumă ponderată de N exponenţiale complexe discrete. Relaţia (5.12) este de fapt o relaţie de analiză, ce furnizează proiecţiile semnalului pe cei N vectori ai bazei.

Menţionăm faptul că în relaţiile (5.9) şi (5.12) indicii de însumare trebuie să ia N valori consecutive şi nu neapărat valorile {0, 1,..., N-1} , ceea ce se verifică uşor, deoarece semnalul, exponenţialele şi, după cum vom vedea imediat, coeficienţii sunt periodici. În literatură se marchează n ∈ <N> pentru a reprezenta faptul că n ia N valori consecutive.

Referindu-ne la expresia (5.12), vom arăta faptul că $\{c_k\}$ reprezintă o secvenţă periodică, de perioadă N. Pentru aceasta vom calcula c_{k+N} :

$$c_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} e^{-j2\pi N} = c_k \ , \ 0 \le k \le N-1 \ .$$

În consecinţă:

$$c_k = c_{k+N} \quad sau \quad c_k = c_{(k)_N} \ . \tag{5.14}$$

Ca urmare a acestei proprietăţi, diagramele spectrale de modul ($|c_k|$) şi de fază ($\mathrm{Arg}\{c_k\}$) sunt periodice, de perioadă N.

Exemple:

1. Semnalul x[n] = sin(2π/N n) are perioada N. Utilizând relaţia lui Euler se obţine:

$$\sin\frac{2\pi n}{N} = \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j}e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} \ ,$$

adică $c_1 = 1/2j$, $c_{N-1} = -1/2j$, iar în rest coeficienţii sunt nuli.

În figura 5.2 se prezintă diagrama spectrului de modul, $|c_k|$ şi diagrama spectrului de fază $Arg\{c_k\}$, pentru semnalul sinusoidal discret cu N = 6.

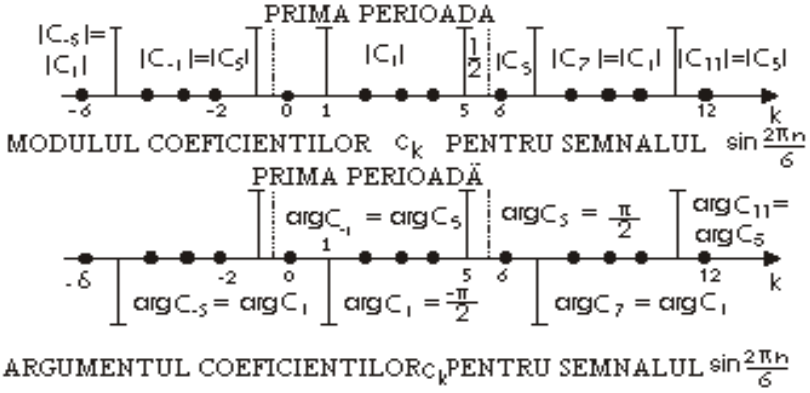


Fig.5.2 (a) Modulul şi (b) argumentul coeficienţilor c_k pentru semnalul sin(2πn/6).

C u n o s c â n d coeficienţii din prima perioadă a spectrului, se cunoaşte toată secvenţa de coeficienţi, periodică şi ea, cu perioada N.

Evident, în locul relaţiei lui Euler se putea aplica direct relaţia de calcul a coeficienţilor, (5.12).

2. Semnalul x[n] = = 1 + sin(2πn/N) + 4 c o s (2 π n / N) + cos(4πn/N+π/2) are perioada N (constanta 1 are orice perioadă, deci şi N). Fiind compus din sinusoide, este recomandabilă utilizarea relaţiei lui Euler, în locul relaţiei (5.12), calculul fiind mai simplu. Se scrie, deci:

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j}e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} + 2e^{j\frac{2\pi}{N}n} + 2e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j(N-2)\frac{2\pi}{N}n} ,$$

din care rezultă:

$$c_0 = 1 \;;\; c_1 = 2 + \frac{1}{2j} \;;\; c_2 = \frac{j}{2} \;;\; c_{N-2} = -\frac{j}{2} \;;\; c_{N-1} = 2 - \frac{1}{2j} \;.$$

3. Fie semnalul din figura 5.3. El are $2N_1+1$ valori succesive egale cu 1 într-o perioadă de lungime N. Coeficienţii seriei se calculează conform relaţiei (5.12) unde, reamintim, n trebuie să ia nu neapărat valorile 0, 1,..., N-1 ci N valori succesive. În consecinţă:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}\sum_{n=0}^{2N_1}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)^n \;;\; 0 \le k \le N-1 \;.$$

Pentru k = 0 cei $2N_1+1$ termeni ai sumei sunt egali cu 1, şi deci:

$$c_0 = \frac{2N_1+1}{N} \quad . \qquad \textbf{(5.15)}$$

Pentru $1 \le k \le N-1$ suma se calculează şi coeficienţii devin:

$$c_k = \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}}{N} \cdot \frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} = \frac{e^{-jk\frac{\pi}{N}N_1}}{N} \cdot \frac{e^{-jk\frac{\pi}{N}(2N_1+1)}\left[e^{jk\frac{\pi}{N}(2N_1+1)} - e^{-jk\frac{\pi}{N}(2N_1+1)}\right]}{e^{-jk\frac{\pi}{N}}\left[e^{jk\frac{\pi}{N}} - e^{-jk\frac{\pi}{N}}\right]},$$

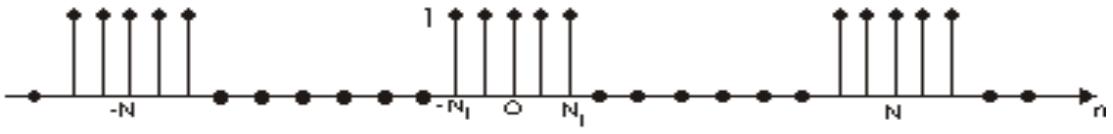


Fig. 5.3 Semnal discret, tip undă rectangulară. Într-o perioadă N sunt $2N_1+1$ valori succesive egale cu 1.

sau, aplicând relaţia lui Euler:

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\frac{2N_1+1}{2}\right)}{\sin k\frac{2\pi}{2N}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left[(2N_1+1)\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\Bigg|_{\Omega = k\frac{2\pi}{N}} ; \; 1 \le k \le N-1 \; .$$

(5.16)

În cazul semnalelor periodice în timp continuu, unde dimensiunea spaţiului este infinită, trunchierea seriei conduce la apariţia unor oscilaţii la trecerea bruscă a semnalului de la o valoare la alta. Mărind numărul de termeni ai seriei, amplitudinea oscilaţiilor nu se modifică, ci ele devin mai rapide. Trunchierea seriei nu duce la apariţia unui fenomen asemănător cu fenomenul Gibbs.

Trunchiind seria unui semnal periodic discret, se obţine o aproximare a acestuia. Ea devine cu atât mai bună cu cât numărul de termeni însumaţi se apropie de N. Atunci când se însumează toţi cei N termeni, semnalul obţinut este chiar x[n], **fără nici o eroare**.

Pentru ilustrarea efectului trunchierii seriei, fie semnalul dreptunghiular din exemplul 3, în cazul particular N = 9 şi $2N_1+1 = 5$. Aplicând relaţiile (5.15) şi (5.16) se calculează coeficienţii: $c_0 \approx 0{,}556$, $c_1 = c_8 \approx 0{,}32$, $c_2 = c_7 \approx -0{,}059$, $c_3 = c_6 \approx \approx -0{,}111$ şi $c_4 = c_5 \approx 0{,}073$.

Expresia de sinteză a semnalului se trunchiază în continuare, conform relaţiei (N= 9):

$$x_M[n] = \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{-jk\frac{2\pi}{9}n} \; . \qquad \textbf{(5.17)}$$

Pentru: M = 1, 2, 3 şi 4 avem:

$$x_1[n] = 0{,}556 + 0{,}64\cos\frac{2\pi n}{9},$$

$$x_2[n] = 0{,}556 + 0{,}64\cos\frac{2\pi n}{9} - 0{,}118\cos\frac{4\pi n}{9},$$

$$x_3[n] = 0{,}556 + 0{,}64\cos\frac{2\pi n}{9} - 0{,}118\cos\frac{4\pi n}{9} - 0{,}222\cos\frac{6\pi n}{9},$$

$$x_4[n] = 0{,}556 + 0{,}64\cos\frac{2\pi n}{9} - 0{,}118\cos\frac{4\pi n}{9} - 0{,}222\cos\frac{6\pi n}{9} + 0{,}146\cos\frac{8\pi n}{9}.$$

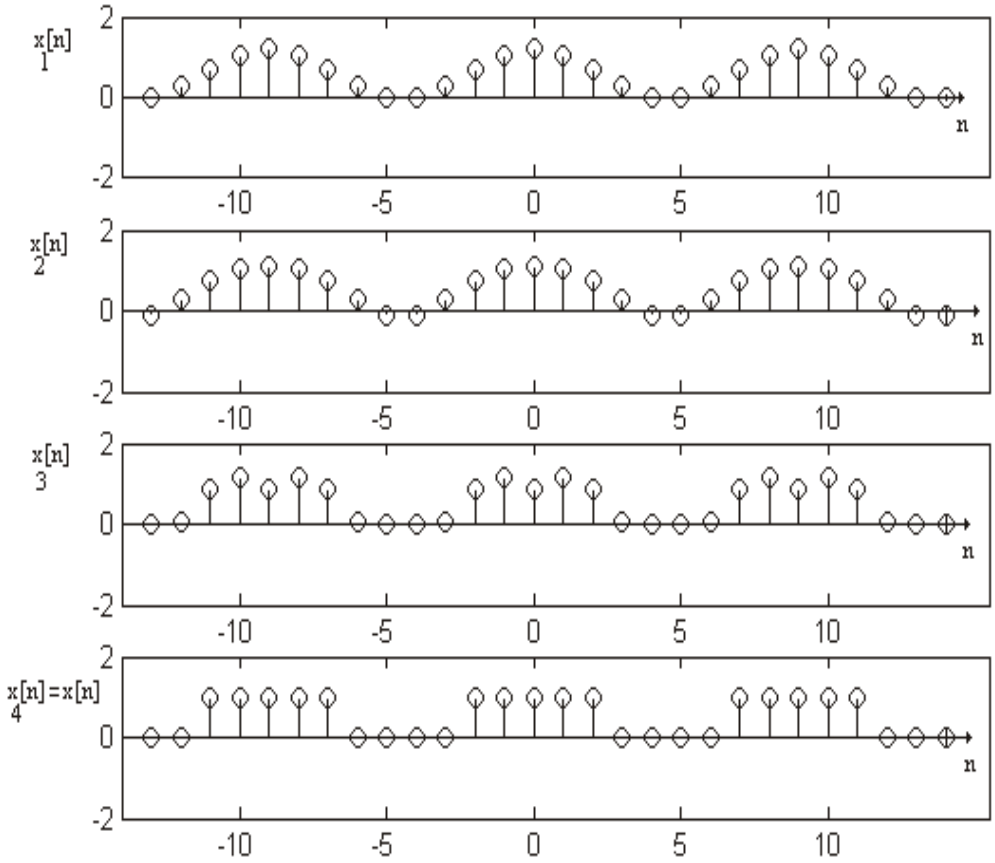


Fig.5.4 Trunchierea seriei de reconstruncţie a undei rectangulare din figura 5.3. Nu apare o comportare asemănătoare fenomenului Gibbs ($x_4[n] \equiv x[n]$).

Cele patru forme de undă $x_1[n] \div x_4[n]$ sunt prezentate în figura 5.4. Nu se observă apariţia vreunui efect de trunchiere similar celui studiat sub numele de fenomenul Gibbs. Ultima sumă, care conţine toţi termenii din seria Fourier în timp discret, reproduce exact semnalul original, x[n].

5.2.1 Proprietăţile seriei Fourier în timp discret

1. Liniaritatea: Transformările (5.9) şi (5.12) ce definesc o pereche Fourier: $x[n] \longleftrightarrow \{c_k^x\}$ şi $y[n] \longleftrightarrow \{c_k^x\}$ sunt evident liniare:

$$ax[n] + by[n] \longleftrightarrow \left\{ac_k^x + bc_k^y\right\} \quad . \tag{5.18}$$

2. Deplasarea (translatarea) în timp: Pentru semnalul x[n] deplasat cu n_o , $x[n-n_o]$ se arată că:

$$x[n-n_o] \longleftrightarrow \left\{e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_o} c_k\right\} \quad . \tag{5.19}$$

Spectrul de modul al semnalului nu este afectat de deplasare. Spectrul de fază se modifică în schimb.

Demonstraţia este imediată. Coeficienţii c_k ai semnalului deplasat $x[n-n_o]$ se calculează, aplicând (5.12):

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n-n_o]e^{-jk\Omega_o n} = \frac{1}{N}\sum_{m=-n_o}^{N-n_o-1} x[m]e^{-jk\Omega_o(m+n_o)} =$$

$$= e^{-jk\Omega_o n_o}\frac{1}{N}\sum_{m=-n_o}^{N-n_o-1} x[m]e^{-jk\Omega_o m} \quad ; \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \quad .$$

Cum nu contează originea domeniului de însumare ci doar faptul ca el să înglobeze N valori în succesiune, relaţia (5.19) este demonstrată.

3. Conjugarea complexă: Fie $x[n] \in \mathbb{C}$. Se caută coeficienţii c_k' ai semnalului complex conjugat x*[n]:

$$c_k' = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n]e^{-jk\Omega_o n} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(-k)\Omega_o n}\right)^* = c_{-k}^* = c_{(-k)_N}^* \; .$$

În concluzie:

$$x^*[n] \longleftrightarrow \left\{c_k^*\right\} = \left\{c_{(-k)_N}^*\right\} \quad . \tag{5.20}$$

4. Reflectarea semnalului: Prin calcul direct se poate arăta:

$$x[-n] \longleftrightarrow \left\{c_{-k}\right\} = \left\{c_{(-k)_N}\right\} \quad . \tag{5.21}$$

5. Modificarea scării timpului: Aşa cum s-a procedat în §1.1.4, şi pentru

semnalele periodice x[n], de perioadă N se defineşte un semnal cu derulare de m ori mai lentă prin:

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & ; \ daca \quad n \vdots m \\ 0 & ; \ în \ rest \end{cases} . \qquad \textbf{(5.22)}$$

Perioada N' a semnalului $x_{(m)}[n]$ se determină după cum urmează:

$$x_{(m)}[n+N'] = \begin{cases} x[(n+N')/m] & ; \ daca \quad n+N' \vdots m \\ 0 & ; \ în \ rest \end{cases} . \qquad \textbf{(5.23)}$$

Definiţia periodicităţii implică $x_{(m)}[n+N'] = x_{(m)}[n]$, $\forall n \in Z$. Comparând (5.22) şi (5.23), dacă n m şi n+N' m , atunci şi N' m . Alegând N' = Km , $K \in \mathbb{N}$, rezultă:

$$x_{(m)}[n+N'] = \begin{cases} x\left[(n/m)+K\right] & ; \ n \vdots m \\ 0 & ; \ în \ rest \end{cases} = \begin{cases} x[n/m] & ; \ n \vdots m \\ 0 & ; \ în \ rest \end{cases} .$$

Deoarece x[n] este periodic de perioadă N, obţinem K = N . Prin urmare, perioada semnalului $x_{(m)}[n]$ este N' = mN . Coeficienţii seriei sale se calculează cu:

$$c'_k = \frac{1}{mN}\sum_{n=0}^{mN-1} x_{(m)}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{mN}n} = \frac{1}{mN}\sum_{p=0}^{N-1} x_{(m)}[pm] e^{-jk\frac{2\pi}{mN}mp} =$$

$$= \frac{1}{mN}\sum_{p=0}^{N-1} x[p] e^{-jk\frac{2\pi}{N}p} = \frac{1}{m}c_k \ .$$

S-a obţinut, prin urmare:

$$x_{(m)}[n] \longleftrightarrow \left\{\frac{1}{m}c_k\right\} \quad (perioada \quad N' = mN) \ . \qquad \textbf{(5.24)}$$

6. <u>Modularea semnalului</u>: Semnalul $e^{jk_o\frac{2\pi}{N}n}$ este periodic de perioadă N. Prin înmulţirea sa cu x[n], tot periodic de perioadă N, se obţine un semnal periodic având aceeaşi perioadă N. Se arată, prin calcul direct că:

$$e^{jk_o\frac{2\pi}{N}n} x[n] \longleftrightarrow \left\{c_{k-k_o}\right\} = \left\{c_{(k-k_o)_N}\right\} \ . \qquad \textbf{(5.25)}$$

Modularea realizează translatarea cu k_o a spectrului de modul şi fază.

7. <u>Produsul a două semnale (teorema produsului)</u>: Pentru x[n] şi y[n] periodice de perioadă N, produsul x[n]y[n] este şi el periodic de perioadă N. Coeficienţii c_k ai

produsului sunt:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,y[n]\,e^{-jk\Omega_o n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} c_m^x e^{jm\Omega_o n}\right) y[n]\,e^{-jk\Omega_o n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} c_m^x \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n]\,e^{-j(k-m)\Omega_o n} = \sum_{m=0}^{N-1} c_m^x c_{k-m}^y = \sum_{m=0}^{N-1} c_m^x c_{(k-m)_N}^y \quad .$$

Dar ultima sumă este convoluţia periodică a secvenţelor discrete formate din coeficienţii c^x_k şi c^y_k . În concluzie:

$$x[n]\,y[n] \longleftrightarrow \left\{\sum_{m=0}^{N-1} c_m^x c_{(k-m)_N}^y\right\} = c_k^x \otimes c_k^y \quad . \qquad \textbf{(5.26)}$$

8. <u>Convoluţia periodică (teorema convoluţiei)</u>: Convoluţia periodică a semnalelor discrete periodice este reprezentată de simbolul utilizat în relaţia (5.26). Prin definiţie, dacă x[n] şi y[n] sunt două semnale de aceeaşi perioadă N, convoluţia lor circulară este:

$$z[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\,y[(n-k)_N] \quad . \qquad \textbf{(5.27)}$$

Se poate verifica imediat că z[n+N] = z[n] , ceea ce înseamnă că şi convoluţia z[n] are perioada N.

În figura 5.5 este prezentată modalitatea de calcul a convoluţiei circulare a două semnale discrete periodice. Însumarea produselor se efectuează pentru $0 \le k \le N-1$, deci pentru prima perioadă. Aparent, eşantioanele semnalului supus deplasării părăsesc pe o parte intervalul de însumare, reintrând pe partea opusă. De aici şi denumirea de **<u>convoluţie circulară</u>**.

Dacă considerăm x[n] şi y[n] ca semnale aperiodice, reduse la prima perioadă şi dacă N_1 şi N_2 sunt lungimile (duratele) acestor semnale, atunci convoluţia lor aperiodică are lungimea (durata) N_1+N_2-1 . Dacă semnalele x[n] şi y[n] considerate ca periodice, au perioada $N \ge N_1+N_2-1$, atunci, reţinând prima perioadă a convoluţiei circulare $x[n] \otimes y[n]$ se obţine convoluţia aperiodică a primei perioade a semnalelor considerate. Dacă însă $N < N_1+N_2-1$ se produc suprapuneri de eşantioane în convoluţia circulară şi convoluţia aperiodică nu mai poate fi extrasă din ea.

Se caută pentru $x[n] \otimes y[n]$ coeficienţii seriei Fourier. Vom determina, aplicând relaţia (5.9), semnalul q[n] ce are ca şi coeficienţi ai seriei produsele $c^x_k c^y_k$:

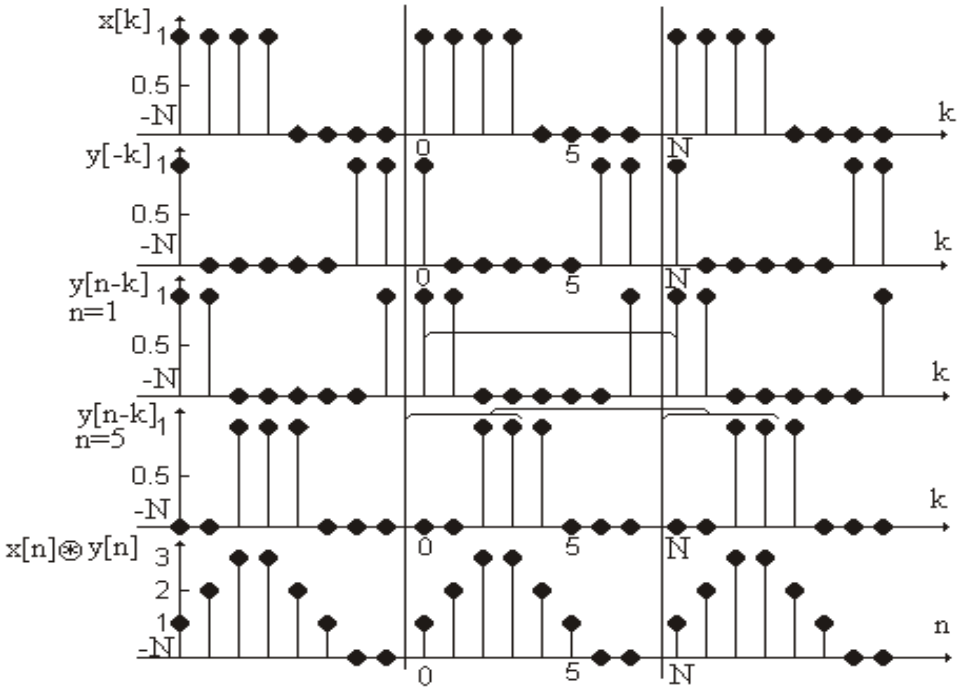


Fig.5.5 Convoluţia circulară a două semnale periodice. Se observă "efectul de circularitate".

$$q[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^x c_k^y e^{jk\Omega_o n} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-jk\Omega_o m} \right) c_k^y e^{jk\Omega_o n} \; ; \; \Omega_o = \frac{2\pi}{N}$$

$$q[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k^y e^{jk\Omega_o (n-m)} \right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, y[n-m] \quad .$$

Proprietatea referitoare la convoluţia circulară a două semnale discrete periodice, de perioadă N se scrie, prin urmare, astfel:

$$x[n] \otimes y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[(n-m)_N] \longleftrightarrow \left\{ N c_k^x c_k^y \right\} .$$

(5.28)

9. <u>Diferenţierea discretă a semnalului discret</u>: Aplicând proprietatea de liniaritate şi omogenitate precum şi cea de deplasare în timp se arată că:

$$x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow \left\{\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)c_k\right\} \quad . \tag{5.29}$$

Aceasta este proprietatea în timp discret, echivalentă diferenţierii în timp continuu.

10. <u>Însumarea în domeniul (timpului) n</u> : Însumând un semnal discret x[n] periodic de perioadă N, fără componentă continuă, adică având $c_0 = 0$, se obţine un semnal y[n] de aceeaşi perioadă:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \;\; ; \;\; y[n]-y[n-1] = x[n] \quad . \tag{5.30}$$

Fie coeficienţii Fourier ai sumei c_k^y , adică: y[n] <—> $\{c_k^y\}$ şi x[n] <—> $\{c_k^x\} = \{c_k\}$. Se aplică relaţiei (5.30) proprietatea 9 - relaţia (5.29):

$$y[n]-y[n-1] = x[n] \longleftrightarrow \left\{\left(1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)c_k^y\right\} = \left\{c_k^x\right\} = \left\{c_k\right\} \;\; ,$$

şi se obţine:

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] = y[n] \longleftrightarrow \left\{\frac{c_k}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\right\} , \; c_0 = 0 \quad . \tag{5.31}$$

11. <u>Proprietăţi specifice semnalelor reale</u>: Dacă $x[n] \in \mathbb{R}$, atunci x[n] = x*[n] şi deci, conform relaţiei (5.30) rezultă că $c_k = c_k^* = c_{(-k)_N}^*$, ceea ce se poate explicita prin:

$$c_k = c_{-k}^* = c_{(-k)_N}^*$$

$$|c_k| = |c_{-k}| = |c_{(-k)_N}^*| \qquad ; \; Arg\, c_k = -Arg\, c_{-k} = -Arg\, c_{(-k)_N}$$

$$Re\{c_k\} = Re\{c_{-k}\} = Re\{c_{(-k)_N}\} \; ; \; Im\{c_k\} = Im\{c_{-k}\} = Im\{c_{(-k)_N}\} \; .$$

(5.32)

12. <u>Seria Forier a componentei pare şi a componentei impare</u>: Se consideră un semnal real $x[n] \in \mathbb{R}$, $x[n] = x_p[n]+x_i[n]$. Aplicând definiţiile componentelor pară şi impară se deduc perechile Fourier:

$$x_p[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2} \longleftrightarrow \left\{\frac{1}{2}c_k+\frac{1}{2}c_{-k}\right\} = \left\{Re\{c_k\}\right\} \; , \tag{5.33}$$

$$x_i[n] = \frac{x[n]-x[-n]}{2} \longleftrightarrow \left\{\frac{1}{2}c_k - \frac{1}{2}c_{-k}\right\} = \left\{jIm\{c_k\}\right\} \ . \qquad \textbf{(5.34)}$$

13 <u>Relaţia lui Parseval</u>: Pentru semnale din l^2 este aplicabilă relaţia (3.39). Adaptată notaţiilor de acum, ea se scrie sub forma:

$$\|x[n]\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \left\|e^{jk\Omega_o n}\right\|_2^2 \ , \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \ .$$

Conform relaţiei (5.8), pătratul normei exponenţialelor este N şi, prin urmare, relaţia lui Parseval ia forma:

$$\mathrm{P} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \ . \qquad \textbf{(5.35)}$$

Relaţia calculează puterea P a semnalului discret ca medie a pătratelor eşantioanelor temporale sau ca sumă a pătratelor modulelor coeficienţilor seriei Fourier exponenţiale ataşate semnalului.

5.3 Transformarea Fourier în timp discret, pentru semnale discrete

Vom proceda, pentru început, la aceeaşi modalitate euristică de introducere a conceptului de transformare Fourier, pornind de la seria Fourier a unui semnal periodic a cărui perioadă tinde spre infinit.

Fie un semnal x[n] de durată finită, adică x[n] ≡ 0 pentru $|n| > N_1$ şi fie $N>2N_1+1$ perioada unui semnal x̃[n] obţinut prin periodizarea semnalului iniţial:

$$:[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & |n| \le N_1 \\ 0 & |n| \ge N-1 \end{cases} \ ; \quad \tilde{x}[n+N] = \tilde{x}[n] \ , \quad N > 2N_1+1 \qquad \textbf{(5.36)}$$

Pentru semnalul periodic x̃[n] sunt valabile relaţiile (5.9) şi (5.12):

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k\in<N>} c_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \ ; \quad c_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \ . \qquad \textbf{(5.37)}$$

Cu <N> s-a notat mulţimea indicilor în n sau k, formată din N valori consecutive din Z , fără ca valoarea iniţială să fie fixată (ea putând fi arbitrar aleasă). Se alege domeniul valorilor lui n pentru care x̃[n] = x[n], astfel că:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad .$$

Limitele de însumare au putut fi extinse la $\pm\infty$, deoarece semnalul x[n] este nul pentru $|n| > N_1$. Se defineşte anvelopa produselor Nc_k prin:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \quad , \qquad \textbf{(5.38)}$$

coeficienţii Fourier ai semnalului periodizat putând fi acum determinaţi cu relaţia:

$$c_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_o) \quad , \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \quad . \qquad \textbf{(5.39)}$$

Expresia (5.39) poate fi introdusă în relaţia de recuperare a semnalului periodic,

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k\in<N>} \frac{1}{N} X(k\Omega_o)\, e^{jk\Omega_o n} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in<N>} X(k\Omega_o)\, e^{jk\Omega_o n}\Omega_o \qquad \textbf{(5.40)}$$

$\tilde{x}[n]$ - vezi (5.37) :

Pentru precizarea ideilor considerăm semnalul din figura 5.3. Pentru acesta, aşa cum s-a arătat în relaţia (5.16), înfăşurătoarea $X(\Omega)$ are expresia:

$$X(\Omega) = \frac{\sin\left[\left(2N_1+1\right)\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\frac{\Omega}{2}} \quad .$$

În figura 5.6 este prezentată înfăşurătoarea pentru cazul $2N_1+1 = 5$. Considerând $N = 10$, rezultă 10 coeficienţi în secvenţa periodică a coeficienţilor. Produsele $10c_k(Nc_k)$ sunt prezentate în figura 5.6.a. Dacă se dublează perioada, ea devenind $2N = 20$, produsele $20c_k$ sunt cele din figura 5.6.b. În sfârşit, pentru creşterea la 40 a perioadei, produsele $40c_k$ sunt arătate în figura 5.6.c. Liniile Nc_k sunt echidistante, distanţa între ele fiind $\Omega_o = 2\pi/10$ în primul caz, $\Omega_o/2 = 2\pi/20$ în al doilea şi $\Omega_o/4 = 2\pi/40$ în al treilea. Liniile Nc_k se apropie din ce în ce mai mult pe măsură ce perioada creşte, şi deoarece produsele Nc_k rămân limitate, modulele coeficienţilor c_k scad, tinzând spre zero atunci când perioada N creşte, tinzând spre infinit.

După ce ne-am format această imagine într-un caz particular, vom reveni la cazul semnalului x[n] oarecare cu suport finit. Facem ca perioada N să tindă spre infinit. Atunci din $\tilde{x}[n]$ nu rămâne decât prima perioadă, cea centrată pe origine, unde

$x[n] = \tilde{x}[n]$. Se poate afirma deci, că $\tilde{x}[n] \longrightarrow x[n]$, pentru $n \longrightarrow \infty$. Referindu-ne la

suma (5.40), aşa cum se poate vedea şi din figura 5.7, un termen: $\frac{1}{2\pi} X(k\Omega_o)\, e^{jk\Omega_o n}\Omega_o$ reprezintă o arie elementară, iar suma în totalitatea ei o aproximare a unei arii.

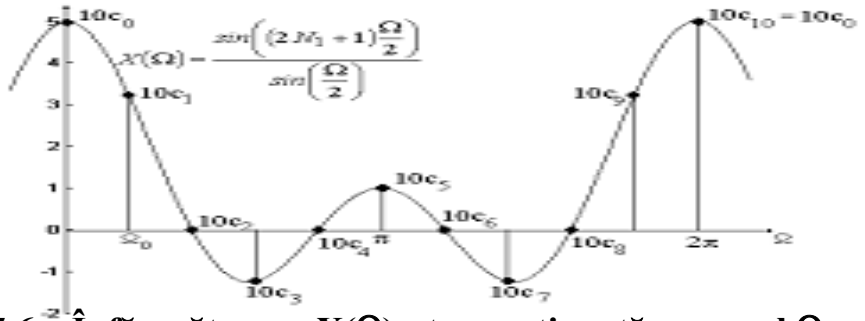


Fig.5.6.a Înfăşurătoarea X(Ω)este eşantionată cu pasul $\Omega_o = 2\pi/N$.

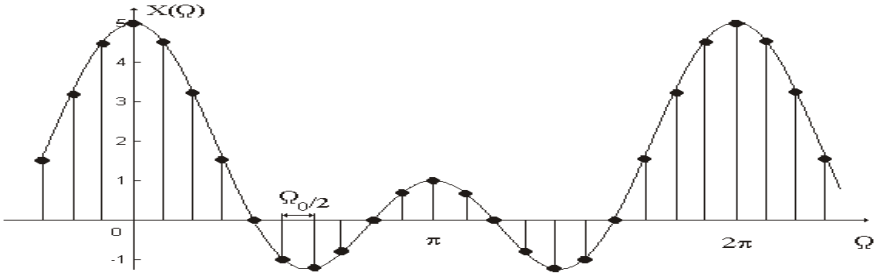


Fig.5.6.b Ca urmare a dublării perioadei, X(Ω) este eşantionată cu pasul $\Omega_o/2$.

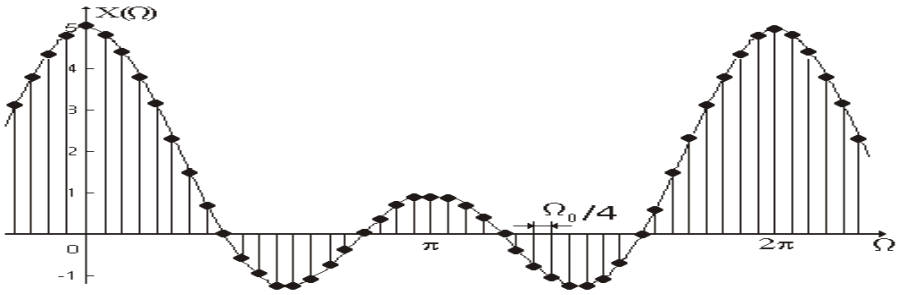


Fig.5.6.c Dacă perioada creşte de 4 ori, X(Ω) este eşantionată cu pasul $\Omega_o/4$.

Atunci când N —> ∞ şi Ω_o —> 0 , suma (5.40) are ca limită o integrală. Se are în vedere că proprietatea k ∈ <N> conduce prin multiplicare cu Ω_o la: $k\Omega_o \in <N\Omega_o> = 2\pi$. În consecinţă integrala se efectuează pe un interval de lungime 2π , fără ca originea să aibă importanţă. Admiţând că x̃[n] —> x[n], am ajuns, prin acest raţionament de extindere nelimitată a perioadei la concluzia:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \qquad \textbf{(5.41)}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad . \qquad \textbf{(5.38)}$$

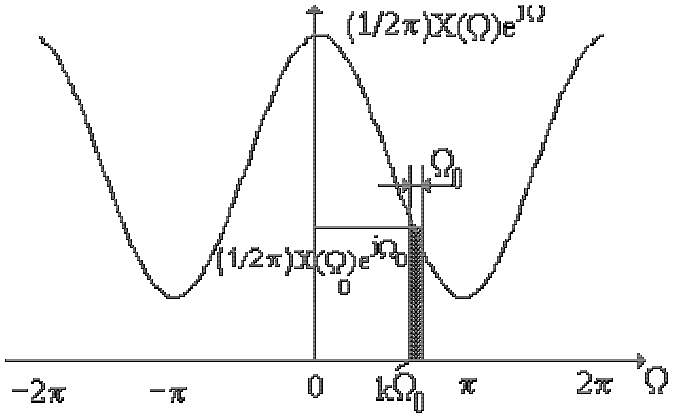


Fig.5.7 Un termen al sumei (5.40) reprezintă o arie elementară. Suma întreagă aproximează aria de sub curbă, între abscisele Ω = ±π.

Cele două relaţii definesc o transformare Fourier în timp discret şi, deci o pereche Fourier, semnal - spectru.

Evident, "demonstraţia" făcută are o serie de deficienţe. Ea se referă numai la semnalele cu suportul finit. De asemenea, ea nu specifică natura convergenţei şi nici condiţiile în care relaţiile au sens.

5.3.1 Definiţia formală a transformatei Fourier în timp discret pentru semnale discrete şi aperiodice

Prin definiţie, transformata Fourier a unui semnal discret aperiodic x[n] este:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad .$$

Această sumă nu converge pentru orice tip de semnal discret. Spre exemplu pentru x[n] = σ[n] , suma nu converge. De asemenea, ea nu converge pentru exponenţiale complexe discrete neatenuate, ş.a.

Din relaţia (5.38) se deduce că:

$$|X(\Omega)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot |e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = \|x[n]\|_1 \qquad \textbf{(5.42)}$$

şi, deci, pentru semnale absolut sumabile, $x[n] \in l^1$, convergenţa este asigurată pentru $\forall\Omega$. În plus, funcţia X(Ω) este şi continuă:

$$X(\Omega+\Delta\Omega)-X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\left(e^{-j\Delta\Omega n}-1\right)$$

$$|X(\Omega+\Delta\Omega)-X(\Omega)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|\cdot|e^{-j\Delta\Omega n}-1| \ .$$

Dar cum: $|e^{-j\Delta\Omega n}-1| \le |e^{-j\Delta\Omega n}|+1 = 2$, avem:

$$0 \le |X(\Omega+\Delta\Omega)-X(\Omega)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|\,|e^{-j\Delta\Omega n}-1| \le 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = 2\|x[n]\|_1 < \infty \ .$$

Trecând la limită pentru $\Delta\Omega$ —> 0 avem:

$$0 \le \lim_{\Delta\Omega\to 0} |X(\Omega+\Delta\Omega)-X(\Omega)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta\Omega\to 0} |e^{-j\Delta\Omega n}-1| = 0 \ ,$$

sau:

$$\lim_{\Delta\Omega\to 0} X(\Omega+\Delta\Omega) = X(\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.43)}$$

Afirmaţia este demonstrată. Pentru semnale din l^1 , X(Ω) există şi este o funcţie continuă de variabila Ω.

Vom observa că X(Ω) este periodică după Ω, ca urmare a periodicităţii exponenţialei complexe:

$$X(\Omega+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\Omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}e^{-j2\pi n} = X(\Omega)$$

$$X(\Omega+2\pi) = X(\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.44)}$$

Spectrul unui semnal discret este o funcţie de o variabilă de tip continuu, Ω, şi este periodic după Ω, având perioada 2π. Este deci suficientă reprezentarea funcţiei X(Ω) pe intervalul $[0, 2\pi)$ sau $[-\pi, \pi)$. Deoarece X(Ω) are semnificaţia unei densităţi spectrale, sau, pe scurt, a unui spectru, se spune că spectrul unui semnal discret este continuu (în sensul că este funcţie de o variabilă continuă).

Pentru semnale de pătrat sumabil, $x[n] \in l^2$, deci pentru semnalele de energie finită, pentru definirea transformatei X(Ω) suntem obligaţi să recurgem la noţiunea de convergenţă în medie pătratică.

Dacă $x[n] \in l^2$ atunci funcţia X(Ω) este definită prin:

$$\lim_{N\to\infty} \|X(\Omega) - \sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-j\Omega n}\|_2 = 0 \ , \qquad \textbf{(5.45)}$$

sau:

$$X(\Omega) = \underset{N\to\infty}{\text{l.î.m}} \sum_{n=-N}^{N} x[n]\, e^{-j\Omega n} \quad . \qquad \textbf{(5.45')}$$

Trunchierea seriei atrage după sine, ca şi în timp continuu, apariţia fenomenului Gibbs. Acesta este specific convergenţei medii pătratice.

Şi pentru semnalele din l^2 funcţia $X(\Omega)$ îşi păstrează periodicitatea după Ω, perioada fiind 2π. Ea reprezintă densitatea spectrală, sau spectrul secvenţei de energie finită.

Vom mai menţiona doar că probleme de convergenţă pun numai semnalele discrete cu suport nemărginit. Pentru celelalte tipuri, convergenţa este uniformă, ele fiind şi din l^1.

Transformarea inversă, dată prin relaţia (5.41) nu ridică probleme de convergenţă, deoarece integrarea se efectuează pe o lungime finită, şi anume 2π.

Se obişnuieşte să se noteze perechea semnal-spectru prin:

$$x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \quad , \qquad \textbf{(5.46)}$$

unde simbolul $\mathscr{F}$ lipseşte de cele mai multe ori.

Exemple:

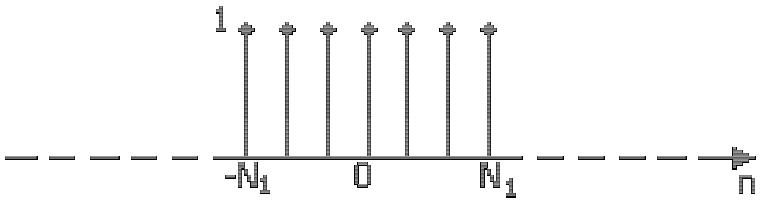


Fig. 5.8 Impuls aperiodic simetric, discret.

1. Semnalul aperiodic $x[n]=\sigma[n+N_1]-\sigma[n-N_1-1]$ *este un impuls simetric faţă de origine, având durata* $2N_1+1$. *Spectrul său a fost deja determinat şi este:*

$$X(\Omega) = \frac{\sin\left[(2N_1+1)\dfrac{\Omega}{2}\right]}{\sin\dfrac{\Omega}{2}} \quad .$$

Frecvenţele joase sunt cele din jurul valorilor $2k\pi$, *iar cele înalte din jurul valorilor* $(2k+1)\pi$. *Pentru* $\Omega = 2k\pi$:

$$X(2k\pi) = \lim_{\Omega\to 2k\pi} \frac{\sin\left[(2N_1+1)\dfrac{\Omega}{2}\right]}{\sin\dfrac{\Omega}{2}} = 2N_1+1 \quad ,$$

iar pentru $\Omega = \pi + 2k\pi$ *:*

$$X(\pi + 2k\pi) = \frac{\sin\left[(2N_1+1)\,(k\pi + \frac{\pi}{2})\right]}{\sin(k\pi + \frac{\pi}{2})} = \frac{(-1)^{k+N_1}}{(-1)^k} = (-1)^{N_1} \ .$$

În figura 5.6 se poate vedea forma funcţiei $X(\Omega)$ *pentru* $N_1=2$*. Se observă periodicitatea cu* 2π *a spectrului* $X(\Omega)$*.*

Semnalul din figura 5.8 este din l^1 *(având suportul mărginit) şi în consecinţă* $X(\Omega)$ *este continuă.*

2. Impulsul unitar $x[n] = \delta[n]$ *. Aplicând relaţia de definiţie (5.38) se determină:*

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = e^0 = 1 \quad . \qquad \textbf{(5.47)}$$

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1(\Omega)$$

Spectrul impulsului unitar $\delta[n]$ *este constant în banda* $[-\pi,\pi)$ *sau* $[0,2\pi)$ *şi joacă în domeniul timpului discret rolul distribuţiei Dirac,* $\delta(t)$*. Totuşi,* $\delta[n]$ *este o funcţie discretă, obişnuită şi nu o o distribuţie singulară (neregulată) ca* $\delta(t)$*.*

Impulsul unitar $\delta[n]$ *poate fi reconstruit din spectrul său. Fie* $n \neq 0$ *:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{e^{j\Omega n}}{2j\pi n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin \pi n}{\pi n} = 0 \quad ,$$

Dacă însă $n = 0$ *, formula de recuperare devine:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\Omega = 1 \qquad n = 0 \quad .$$

Prin urmare, semnalul reconstruit are pentru $n = 0$ *valoarea 1 şi valoare nulă pentru* $n \neq 0$*, el fiind, prin urmare,* $\delta[n]$*.*

3. Semnalul cauzal $x[n]\ a^n\sigma[n]$ *,* $|a| < 1$ *este din* l^1*. În consecinţă* $X(\Omega)$ *există şi este continuă:*

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \sigma[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\Omega}\right)^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}} \quad , \quad |a| < 1$$

$$a^n \sigma[n] \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad , \quad |a| < 1 \qquad \textbf{(5.48)}$$

Spectrul de modul, $|X(\Omega)|$ *şi spectrul de fază* $\Phi(\Omega) = ArgX(\Omega)$ *se determină utilizând relaţia lui Euler:*

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\cos\Omega + a^2}} \quad ; \quad \Phi(\Omega) = arctg\frac{a\sin\Omega}{a\cos\Omega - 1} \qquad \textbf{(5.49-50)}$$

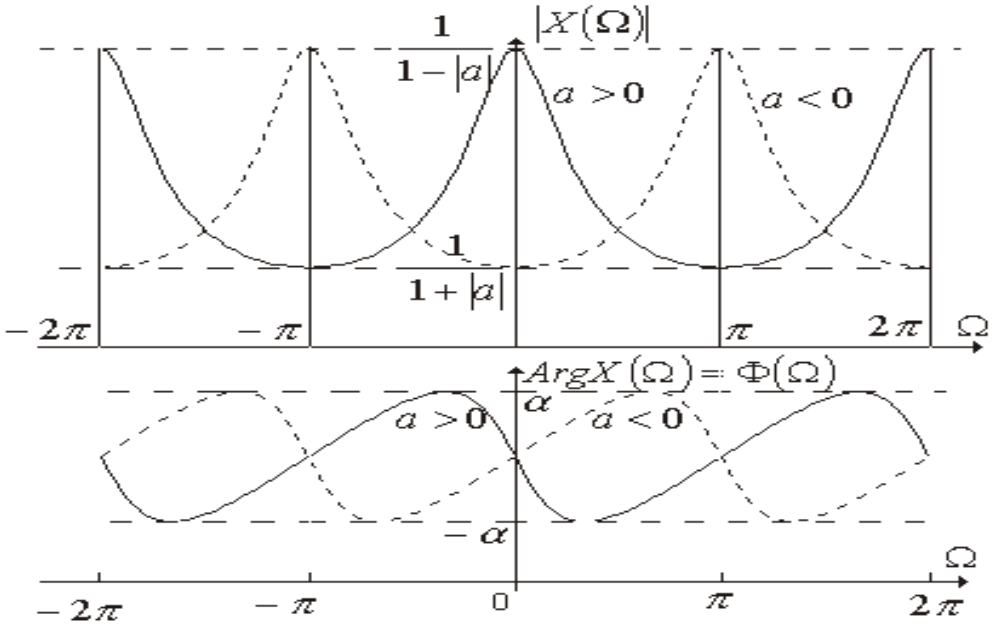


Fig. 5.9 Modulul şi argumentul spectrului semnalului cauzal x[n]=a^{n}σ[n] pentru a>0 (cu linie plină) şi pentru a<0 (cu linie punctată).

Cele două funcţii sunt reprezentate în figura 5.9 pentru a > 0 şi pentru a < 0. Dacă a > 0 , toate eşantioanele semnalului sunt pozitive şi, prin urmare, nu apar variaţii rapide ale semnalului. Spectrul său, după cum rezultă şi din figură, are maxime la $\Omega = 2k\pi$ *şi minime la* $\Omega = (2k+1)\pi$ *. Predomină frecvenţele joase. Dacă însă a < 0 , fiecare eşantion din semnalul x[n] are alt semn. Apar variaţii rapide în semnal, ceea ce se vede şi din faptul că modulul spectrului unui astfel de semnal are maximele la* $(2k+1)\pi$ *şi minimele la* $2k\pi$*. Sunt, prin urmare, predominante frecvenţele înalte ale spectrului.*

5.3.2 Transformarea Fourier în timp discret pentru semnale discrete şi periodice

Dacă x[n] este un semnal periodic de perioadă N, x[n+N] = x[n] atunci, reţinând o singură perioadă a sa, din jurul originii, şi făcând transformarea $X_{ap}(\Omega)$ a acestui semnal aperiodic, coeficienţii seriei Fourier pot fi calculaţi prin aplicarea relaţiei (5.39):

$$c_k = \frac{1}{N} X_{ap}(\Omega)$$

Vom căuta să dăm acum un sens transformatei Fourier în timp discret pentru cazul unui semnal periodic. În timp continuu, transformarea a putut fi introdusă numai în sens distribuţional. Şi în cazul semnalelor discrete periodice, tot numai în sens distribuţional se poate introduce transformarea Fourier.

Vom considera exponenţiala complexă de modul unitar $\phi[n] = e^{j\Omega_o n}$. Ea este periodică relativ la Ω_o , perioada ei fiind 2π, dar nu este neapărat periodică şi după n. Transformata ei Fourier în timp discret este, conform relaţiei (5.38):

$$X_\phi(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_o n} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega-\Omega_o)n} \quad . \qquad \textbf{(5.51)}$$

Dar, relaţia (4.117) poate fi transcrisă sub forma:

$$\delta_{\omega_o}(\omega) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_o) = \frac{1}{\omega_o} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\frac{2\pi}{\omega_o}\omega} \quad ,$$

în care ω_o este perioada în domeniul variabilei Ω. Această relaţie poate fi modificată pentru domeniul variabilei Ω , unde perioada este 2π :

$$\delta_{2\pi}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\cdot 2\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega} \quad . \qquad \textbf{(5.52)}$$

Ţinând seama de (5.52), relaţia (5.51) devine:

$$X_\phi(\Omega) = 2\pi\, \delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_o) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_o - k\cdot 2\pi) \qquad \textbf{(5.53)}$$

Transformata Fourier a exponenţialelor complexe discrete de modul unitar este o distribuţie Dirac periodică de perioadă 2π (această periodicitate cu 2π este caracteristică tuturor spectrelor semnalelor discrete). În figura 5.10 este reprezentat spectrul $X_\phi(\Omega)$ al exponenţialei complexe de modul unitar.

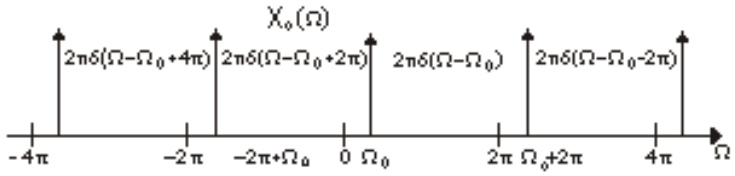


Fig. 5.10 Spectrul exponenţialei discrete exp(jΩ$_o$n) este o distribuţie Dirac periodică, de perioadă 2π.

Odată determinat spectrul exponenţialei complexe, se poate aborda problema transformării semnalelor periodice care se pot reprezenta ca o sumă ponderată de N exponenţiale complexe (seria Fourier în timp discret).

Fie x[n] , x[n+N] = x[n] , scris sub forma:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_o n} \quad , \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \quad . \tag{5.54}$$

Operatorul $\mathscr{F}$ al transformatei Fourier discrete, definit prin relaţia (5.38), este în mod evident liniar. Aplicând transformarea $\mathscr{F}$ relaţiei (5.54) şi ţinând seama de liniaritate, avem:

$$X(\Omega) = \mathscr{F}\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathscr{F}\{e^{jk\Omega_o n}\} \quad .$$

Dar, conform relaţiei (5.53), scrisă pentru frecvenţa kΩ$_o$, relaţia anterioară devine:

$$X(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \left(2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o - m\cdot 2\pi) \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi c_k \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N} - m\cdot 2\pi) \right) . \tag{5.55}$$

Pentru m fixat, termenii care rezultă din însumarea după k sunt:

$$\begin{aligned} &2\pi c_0 \delta(\Omega - m\cdot 2\pi) + 2\pi c_1 \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N} - m\cdot 2\pi) + \\ &+ 2\pi c_2 \delta(\Omega - 2\cdot\frac{2\pi}{N} - m\cdot 2\pi) + \ldots + 2\pi c_{N-1} \delta(\Omega - \frac{N-1}{N}\cdot 2\pi - m\cdot 2\pi) \end{aligned} \tag{5.56}$$

Termenii sunt distribuţii Dirac, plasate în intervalul [2πm , 2πm-2π/N] cu pasul 2π/N . Dacă se face incrementarea m —> m+1 , termenii (5.56) sunt distribuţii Dirac plasate cu acelaşi pas, 2π/N , în intervalul imediat următor [2π(m+1), 2π(m+1)-2π/N] , coeficienţii fiind aceiaşi: 2πc$_0$, 2πc$_1$,..., 2πc$_{N-1}$.

Dacă se are în vedere şi periodicitatea după k, cu perioada N, a coeficienţilor c$_k$, c$_k$ = c$_{(k)N}$, relaţia (5.55) poate fi scrisă sub forma:

$$X(\Omega) = 2\pi c_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\cdot 2\pi) + 2\pi c_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N} - m\cdot 2\pi) +$$

$$+ 2\pi c_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\cdot\frac{2\pi}{N} - m\cdot 2\pi) + ... + 2\pi c_{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{N-1}{N}\cdot 2\pi - m\cdot 2\pi)$$

şi, în final:

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_{(k)_N} \delta(\Omega - k\cdot\frac{2\pi}{N}) \quad . \tag{5.57}$$

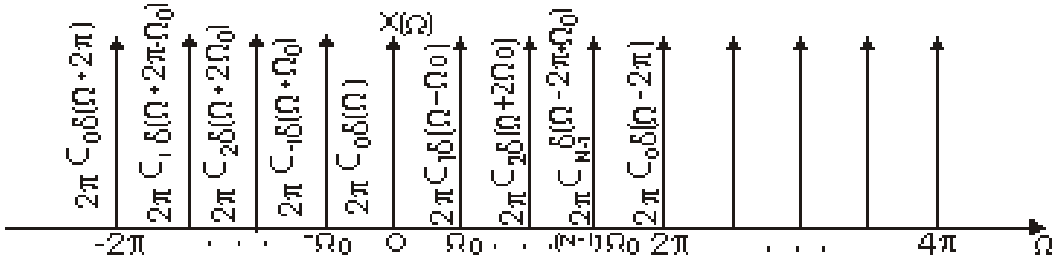


Fig. 5.11 Spectrul X(Ω) al unui semnal discret periodic. Este format din distribuţii Dirac plasate la Ω_k=2kπ/N şi este periodic de perioadă 2π.

Forma spectrului semnalului periodic este cea din figura 5.11. El se compune din linii spectrale plasate la multiplii frecvenţei Ω_o=2π/N , linii formate din distribuţii Dirac. Intensităţile liniilor spectrale sunt de valoare $2\pi c_{(k)N}$, c_k fiind coeficienţii seriei Fourier în timp discret. Se remarcă, din nou, periodicitatea cu 2π a spectrului X(Ω) , rezultat al periodicităţii coeficienţilor seriei Fourier şi al plasării distribuţiilor la multipli întregi ai frecvenţei 2π/N.

Rezultatul este similar cu cel obţinut în timp continuu, cu excepţia doar a periodicităţii spectrului semnalului discret.

Exemplu: *Fie semnalul discret periodic:*

$$\delta_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \quad . \tag{5.58}$$

prezentat în figura 5.12. El se compune din impulsuri unitare discrete, plasate la multipli întregi ai perioadei N. Coeficienţii Fourier ai acestui semnal periodic sunt:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta_N[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \quad . \tag{5.59}$$

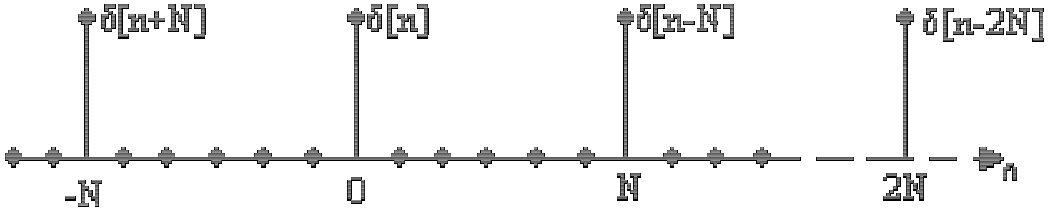


Fig. 5.12 Semnalul discret periodic $\delta_N[n]$.

În consecinţă, spectrul - transformata Fourier în timp discret - pentru acest semnal periodic este:

$$\delta_N[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N}\delta\left(\Omega - k\cdot\frac{2\pi}{N}\right) = \Omega_o \delta_{\Omega_o}(\Omega) \;;\; \Omega_o = 2\pi/ \tag{5.60}$$

sau:

$$\delta_N[n] \longleftrightarrow \Omega_o \delta_{\Omega_o}(\Omega) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\cdot\frac{2\pi}{N}) \;;\; \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \quad . \tag{5.60'}$$

5.3.3 Proprietatile transformarii Fourier in timp discret

Ca şi în cazul semnalelor în timp continuu, şi în timp discret se utilizează notaţiile: $\mathcal{F}\{x[n]\} = X(\Omega)$, $\mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = x[n]$ sau $x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$, ultima fiind şi cea mai comodă.

Proprietăţile transformării în timp discret sunt asemănătoare cu cele ale transformării în timp continuu şi vor fi prezentate în cele ce urmează. Vom reaminti că spre deosebire de $X(\omega)$, transformata $X(\Omega)$ este periodică de perioadă 2π.

1. **Liniaritatea** Relaţiile (5.38) şi (5.41) definesc operatori liniari:

$$a\,x[n] + b\,y[n] \longleftrightarrow a\,X(\Omega) + b\,Y(\Omega) \quad . \tag{5.61}$$

2. **Translaţia (deplasarea) în domeniul timp** Pentru $x[n-n_o]$, aplicând definiţia (5.38) rezultă:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_o]e^{-j\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\Omega m}e^{-j\Omega n_o} = e^{-j\Omega n_o}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\Omega m} \tag{5.62}$$

$$x[n-n_o] \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_o}X(\Omega) \quad .$$

Deplasarea în domeniul variabilei n (a timpului) afectează numai spectrul de fază $\Phi(\Omega)=\arg\{X(\Omega)\}$, nu şi spectrul de modul, $|X(\Omega)|$.

3. **Modularea în domeniul timp** se realizează prin multiplicarea semnalului în timp discret cu exponenţiala complexă de frecvenţă constantă $e^{j\Omega_o n}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(x[n]\,e^{j\Omega_o n}\right)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{-j(\Omega-\Omega_o)n} = X(\Omega-\Omega_o) \quad sau:$$

$$e^{j\Omega_o n}x[n] \quad <\!\!\longrightarrow \quad X(\Omega-\Omega_o) \quad . \qquad \textbf{(5.63)}$$

4. **Scalarea variabilei timp** Pentru semnalul x[n] am definit prin relaţia (1.57) un semnal cu derulare încetinită de k ori, $x_{(k)}[n]$. Spectrul acestui semnal este:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[mk]e^{-jk\Omega m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j(\Omega k)m} = X(k\Omega)$$

$$x_{(k)}[n] \quad <\!\!\longrightarrow \quad X(k\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.64)}$$

5. **Conjugarea complexă a semnalului** Dacă $x[n] \in \mathbb{C}$, spectrul semnalului x*[n] se calculează cu:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]\,e^{-j\Omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(-\Omega)n}\right)^* = X^*(-\Omega)$$

$$x^*[n] \quad <\!\!\longrightarrow \quad X^*(-\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.65)}$$

6. **Reflectarea în timp a semnalului** Semnalul discret reflectat, x[-n] este simetricul lui x[n] faţă de axa ordonatelor. Pentru el avem:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]\,e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{-j(-\Omega)n} = X(-\Omega)$$

$$x[-n] \quad <\!\!\longrightarrow \quad X(-\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.66)}$$

7. **Diferenţierea numerică a semnalului discret** Expresia x[n] - x[n-1] este echivalentă diferenţierii în domeniul timpului continuu. Aplicând proprietăţile de liniaritate 1 şi de deplasare 2, rezultă imediat:

$$x[n]-x[n-1] \quad <\!\!\longrightarrow \quad \left(1-e^{-j\Omega}\right)X(\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.67)}$$

8. **Convoluţia semnalelor (teorema convoluţiei)** Fie x[n] şi y[n] pentru care are sens $z[n] = x[n]*y[n]$. Spectrul convoluţiei, $Z(\Omega)$, rezultă prin calcul direct:

$$Z(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] \right) e^{-j\Omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(x[k] e^{-j\Omega k} \right) \left(y[n-k] e^{-j\Omega (n-k)} \right) \quad .$$

Punând n-k = m produsul se separă:

$$Z(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(x[k] e^{-j\Omega k} \right) \left(y[m] e^{-j\Omega m} \right) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\Omega k} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m] e^{-j\Omega m} \right) = X(\Omega) Y(\Omega) \quad .$$

S-a obţinut teorema convoluţiei:

$$x[n] * y[n] \quad \longleftrightarrow \quad X(\Omega)\, Y(\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.68)}$$

9. **<u>Însumarea în domeniul timpului</u>** Vom considera pentru început un semnal v[n] ce are proprietatea că $\sum_{k=-\infty}^{\infty} v[k] = 0$. Dar dacă V(Ω) este spectrul său, atunci punând Ω = 0 se obţine:

$$V(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n]\, e^{-j\Omega n} \Big|_{\Omega = 0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n] = 0 \quad . \qquad \textbf{(5.69)}$$

Fie acum u[n] provenit din însumarea semnalului v[n] :

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v[k] \quad ; \quad u[n] - u[n-1] = v[n] \quad ,$$

şi U(Ω) spectrul său. Conform relaţiei (5.67) se obţine:

$$(1 - e^{-j\Omega})\, U(\Omega) = V(\Omega) \quad ; \quad V(0) = 0 \quad ,$$

şi deci:

$$U(\Omega) = \frac{V(\Omega)}{1 - e^{-j\Omega}} \quad . \qquad \textbf{(5.70)}$$

Expresia are sens numai dacă V(0) = 0 , deoarece $(1\text{-}e^{-j\Omega}) \big|_{\Omega = 0} = 0$, este o condiţie satisfăcută atunci când suma semnalului v[n] pe toată axa timpului este nulă.

Vom determina acum spectrul semnalului treaptă unitară, σ[n] , care nu satisface

condiţia (5.69). Dacă $g_\sigma(\Omega)$ este componenta spectrului treptei unitare pentru frecvenţele $\Omega = 2k\pi$, componentă nulă pentru celelalte frecvenţe, atunci forma acestei funcţii trebuie să fie $g_\sigma(\Omega) = g\,\delta_{2\pi}(\Omega) = g\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - 2k\pi)$, unde g este o constantă.

Scăzând această componentă din spectrul treptei, $X_\sigma(\Omega)$, spectrul rămas: $X_\sigma(\Omega)$-$g_\sigma(\Omega)$ corespunde unui semnal ce satisface condiţia (5.69). Cum $X_\sigma(0)=g_\sigma(0)$ nu este altceva decât componenta continuă a semnalului, scăzând din semnal această componentă continuă C, semnalului nou obţinut, σ[n]-C , i se poate aplica relaţia (5.70). Dar:

$$(\sigma[n] - C) - (\sigma[n-1] - C) = \sigma[n] - \sigma[n-1] = \delta[n] \quad ,$$

şi deci:

$$X_\sigma(\Omega) - g_\sigma(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \; ; \; X_\sigma(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + g\delta_{2\pi}(\Omega) \qquad \textbf{(5.71)}$$

Rămâne doar să se determine constanta g. Pentru aceasta vom arăta că pentru σ[n] componenta impară este de forma:

$$\sigma_i[n] = \sigma[n] + a + b\delta[n] \quad . \qquad \textbf{(5.72)}$$

Cum: $\sigma_i[0] = 0$, rezultă 1+a+b = 0 . Transcriind (5.72) :

$$\frac{\sigma[n] - \sigma[-n]}{2} = \sigma[n] - 1 - b + b\delta[n] \quad ,$$

şi punând n = 1 , avem: σ[-1] = 0 , δ[1] = 0 , σ[1] = 1 , rezultă b = -1/2 şi apoi a = -1/2 . Componenta impară este deci:

$$\sigma_i[n] = \sigma[n] - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta[n] \quad , \qquad \textbf{(5.72')}$$

şi are, după cum se va vedea, un spectru pur imaginar:

$$\mathcal{F}\{\sigma_i[n]\}(\Omega) = X_\sigma(\Omega) - \frac{1}{2}2\pi\delta_{2\pi}(\Omega) - \frac{1}{2} \quad ,$$

Substituind (5.72) în această relaţie se obţine:

$$\mathcal{F}\{\sigma_i[n]\}(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} - \frac{1}{2} + (g - \pi)\delta_{2\pi}(\Omega) = \frac{1}{2}\frac{1 + e^{j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} + (g - \pi)\delta_{2\pi}(\Omega) =$$

$$= -j(\frac{1}{2})ctg(\frac{\Omega}{2}) + (g - \pi)\,\delta_{2\pi}(\Omega) \notin \mathbb{R}$$

Aceasta impune g = π şi deci relaţia (5.71) în forma finală este:

$$\sigma[n] \longleftrightarrow X_\sigma(\Omega) = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega) = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - 2k\pi) \quad .$$

(5.73)

Suntem acum în măsură să determinăm spectrul însumării unui semnal discret oarecare. Semnalul sumă y[n] se poate scrie ca o convoluţie:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] * \sigma[n] \quad .$$

Se poate aplica teorema convoluţiei :

$$Y(\Omega) = X(\Omega)X_\sigma(\Omega) \quad ,$$

şi ţinând seama de spectrul (5.73) al treptei unitare se scrie:

$$Y(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{1-e^{-j\Omega}} + X(\Omega)\,\pi\,\delta_{2\pi}(\Omega) \quad .$$

Dar $X(\Omega)\delta(\Omega-2k\pi) = X(2k\pi)\delta(\Omega-2k\pi)$ şi cum $X(\Omega)$ este o funcţie periodică, adică $X(2k\pi) = X(0)$, rezultă că $X(\Omega)\delta(\Omega-2k\pi) = X(0)\delta(\Omega-2k\pi)$. Se poate acum verifica imediat că $X(\Omega)\delta_{2\pi}(\Omega) = X(0)\delta_{2\pi}(\Omega)$. În consecinţă se ajunge la :

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \frac{X(\Omega)}{1-e^{-j\Omega}} + \pi X(0)\,\delta_{2\pi}(\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.74)}$$

Această relaţie putea fi stabilită prin analogie cu cazul integrării semnalelor în timp continuu. Spectrul integralei unui semnal în timp continuu este:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\,\delta(\omega) \quad .$$

Pentru semnalele în timp discret, jω se înlocuieşte cu $1-e^{-j\Omega}$, iar $\delta(\omega)$ cu $\delta_{2\pi}(\Omega)$ ca

urmare a periodicităţii cu 2π a spectrului $X(\Omega)$. În consecinţă se obţine relaţia (5.74).

10. **<u>Produsul semnalelor discrete</u>** Se determină spectrul $Z(\Omega)$ al produsului $z[n]=x[n]y[n]$, în condiţiile în care el există:

$$Z(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\int_{2\pi} X(u)e^{jun}du\right) y[n]e^{-j\Omega n} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{2\pi} X(u)\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j(\Omega-u)n}du = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{2\pi} X(u)Y(\Omega-u)du = \left(\frac{1}{2\pi}\right)X(\Omega)\otimes Y(\Omega) \ .$$

Spectrul produsului a două semnale discrete este de $1/2\pi$ ori convoluţia periodică a spectrelor:

$$x[n]y[n] \longleftrightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{2\pi} X(u)\,Y(\Omega-u)\,du = \left(\frac{1}{2\pi}\right)X(\Omega)\otimes Y(\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.75)}$$

11. **Derivarea în domeniul spectrului** Referindu-ne la relaţia (5.38), aceasta poate fi derivată după Ω

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{d}{d\Omega}e^{-j\Omega n} = -j\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\Omega n} \qquad \textbf{(5.76)}$$

$$nx[n] \longleftrightarrow j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad .$$

12. **Proprietăţi ale transformatelor(spectrelor) semnalelor discrete reale**

Dacă x[n] este real, x*[n] = x[n] şi în consecinţă X*(-Ω) = X(Ω). Aceasta se traduce prin:

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \quad ; \quad X(\Omega) = |X(\Omega)|\,e^{j\Phi(\Omega)}$$
$$|X(\Omega)| = |X(-\Omega)| \quad ; \quad \Phi(\Omega) = -\Phi(-\Omega) \qquad \textbf{(5.77)}$$
$$\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} \quad ; \quad \mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}$$

Semnalul discret real x[n] poate fi scris ca suma componentei pare $x_p[n]$ şi impare $x_i[n]$. Spectrul acestor componente rezultă având în vedere proprietatea de reflectare a variabilei n şi relaţia caracteristică semnalelor reale $X(\Omega) = X^*(-\Omega)$.
Avem:

$$x_p[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\Omega)+X^*(\Omega)\right] = \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = X_R(\Omega)$$
$$x_i[n] = \frac{x[n]-x[-n]}{2} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\Omega)-X^*(\Omega)\right] = j\,\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = jX_I(\Omega) \quad .$$

În concluzie:

$$x_p[n] \longleftrightarrow X_R(\Omega) \quad ; \quad x_i[n] \longleftrightarrow jX_I(\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.78-79)}$$

13. **Relaţia lui Parseval** Pentru semnalele discrete din l^2 se poate exprima energia în două moduri, rezultând o relaţie de tip Parseval. Pentru x[n], y[n] $\in l^2$, teorema produsului se scrie sub forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,y[n] \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(u)\,Y(\Omega-u)\,du \quad .$$

Se pune $\Omega = 0$ în această relaţie şi se obţine:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,y[n] \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(u)\,Y(-u)\,du \quad .$$

Dacă y[n] = x^*[n], atunci $Y(\Omega) = X^*(-\Omega)$ sau $Y(-\Omega) = X^*(\Omega)$. Cu acestea relaţia anterioară devine:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2\,d\Omega \quad . \qquad \textbf{(5.80)}$$

Spaţiul Hilbert l^2 este izomorf cu spaţiul Hilbert $L^2_{[-\pi,\pi]}$. Operatorul transformare Fourier în timp discret este definit pe l^2 şi ia valori în $L^2_{[-\pi,\pi]}$.

Într-adevăr oricare ar fi semnalul x[n] din l^2 , pe baza relaţiei lui Parseval, se poate scrie:

$$\|X(\Omega)\|^2_{L^2_{[-\pi,\pi]}} \;=\; 2\pi\,\|x[n]\|^2_{l^2} \quad .$$

Rezultă că pentru orice semnal real x[n] din l^2 , $X(\Omega) \in L^2_{[-\pi,\pi]}$.

Operatorul de transformare Fourier în timp discret conservă produsul scalar. Cu alte cuvinte:

$$\forall\, x[n]\ ,\ y[n] \in l^2 \quad , \quad \langle X(\Omega)\,,\,Y(\Omega)\rangle_{L^2_{[-\pi,\pi]}} \;=\; 2\pi\langle x[n]\,,\,y[n]\rangle_{l^2} \quad .$$

Afirmaţia se poate demonstra pe baza proprietăţii de transformare Fourier în timp discret a convoluţiei. Într-adevăr:

$$\langle x[n]\,,\,y[n]\rangle_{l^2} = x[n] * y^*[-n]\Big|_{n=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\,Y^*(\Omega)\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\,\langle X(\Omega)\,,\,Y(\Omega)\rangle_{L^2_{[-\pi,\pi]}} \quad .$$

S-a obţinut în acest mod o relaţie mai generală decât relaţia lui Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y^*[n] \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, Y^*(\Omega)\, d\Omega \quad .$$

Relaţia lui Parseval este o izometrie până la o constantă de proporţionalitate între spaţiile Hilbert l^2 şi $L^2_{[-\pi,\pi]}$. Ea exprimă energia unui semnal x[n] din l^2 ca sumă a pătratelor eşantioanelor sau ca integrală a densităţii spectrale de energie.

Prin definiţie, densitatea spectrală de energie a unui semnal de energie finită este $S_X(\Omega) = \left| X(\Omega) \right|^2$. Energia semnalului se calculează în funcţie de densitatea sa spectrală de energie cu relaţia:

$$W \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} S_X(\Omega)\, d\Omega \quad . \qquad \textbf{(5.81)}$$

5.4 Răspunsul în frecvenţă al sistemelor discrete liniare şi invariante în timp

Un SLIT discret are comportarea în timp caracterizată în mod complet de răspunsul său la impulsul unitar δ[n] , şi anume h[n] . Este suficientă cunoaşterea funcţiei h[n] pentru a putea determina răspunsul sistemului la orice semnal de intrare, aplicând relaţia de calcul a convoluţiei: $y[n] \;=\; h[n] * x[n]$.

În condiţiile în care ecuaţia are sens, i se poate aplica transformarea Fourier. Având în vedere teorema convoluţiei pentru semnalele discrete în timp rezultă:

$$Y(\Omega) \;=\; (\Omega)\, X(\Omega) \quad ; \quad H(\Omega) \;=\; \mathcal{F}\left\{h[n]\right\} \quad . \qquad \textbf{(5.82)}$$

Funcţia H(Ω) este numită şi răspunsul în frecvenţă al sistemului discret. Cunoscând răspunsul în frecvenţă şi spectrul semnalului de intrare X(Ω), spectrul semnalului de ieşire, Y(Ω) , se determină ca un simplu produs. Aplicând transformarea Fourier inversă se poate determina răspunsul y[n] din spectrul său Y(Ω) :

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\Omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(\Omega)X(\Omega)\} \quad . \tag{5.83}$$

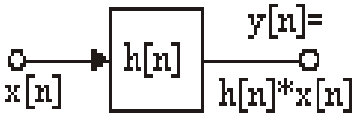


Fig. 5.13 a SLIT discret cu comportarea în timp caracterizată de h[n].

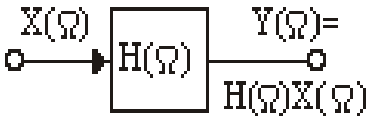


Fig. 5.13 b SLIT discret cu comportarea în frecvenţă caracterizată de H(Ω)=$\mathcal{F}${h[n]}.

Dar H(Ω) = $\mathcal{F}${h[n]} , altfel spus, răspunsul în frecvenţă este spectrul răspunsului la impuls. Ca spectru al unui semnal în timp discret, H(Ω) este o funcţie periodică cu perioada 2π. Este suficientă deci cunoaşterea ei pe ecartul [-π, π) sau [0,2π). Se pune H(Ω) sub forma $H(\Omega) = |H(\Omega)|\, e^{j\Phi(\Omega)}$. Funcţia $|H(\Omega)|$ se numeşte modulul răspunsului în frecvenţă sau caracteristica de modul a sistemului. Funcţia Φ(Ω) se numeşte faza răspunsului în frecvenţă sau caracteristica de fază a sistemului.

5.4.1 Calculul răspunsului unui sistem discret liniar şi invariant în timp la un semnal de intrare discret şi periodic

Dacă semnalul de intrare al SLITD este periodic după n, având perioada N, el se poate scrie sub forma unei serii exponenţiale finite:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_o n} \quad ; \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \quad .$$

Conform relaţiei (5.5) răspunsul y[n] (ca variaţie în timp) se calculează cu:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H(k\Omega_o)\, e^{jk\Omega_o n} \quad ; \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \quad . \tag{5.84}$$

Pentru un semnal de intrare cosinusoidal de tipul :

$$x[n] = A\cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi_o\right) = \frac{A}{2}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{N}n+\varphi_o\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}n+\varphi_o\right)} \right) \quad ,$$

coeficienţii dezvoltării în serie sunt $c_1 = \frac{A}{2}e^{j\varphi_o}$ *si* $c_{-1} = c_{N-1} = \frac{A}{2}e^{-j\varphi_o}$.

Aplicând relaţia (5.84) se determină răspunsul y[n]:

$$y[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi_o} H(\Omega_o) e^{j\Omega_o n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi_o} H(-\Omega_o) e^{-j\Omega_o n} \quad , \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N} \quad .$$

Sistemele fizice au h[n] $\in \mathbb{R}$ şi deci $H(\Omega) = H^*(-\Omega)$. Drept urmare răspunsul y[n] devine:

$$y[n] = \frac{A}{2} |H(\Omega_o)| e^{j[\Omega_o n + \Phi(\Omega_o) + \varphi_o]} + \frac{A}{2} |H(\Omega_o)| e^{-j[\Omega_o n + \Phi(\Omega_o) + \varphi_o]} \quad ,$$

şi în final:

$$n] = A|H(\Omega_o)| \cos\left[\Omega_o n + \Phi(\Omega_o) + \varphi_o\right] \quad ; \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N}$$

Semnalul cosinusoidal aplicat la intrare îşi păstrează frecvenţa Ω_o. Amplitudinea sa, A , se multiplică cu $|H(\Omega_o)|$, iar faza sa iniţială creşte cu $\Phi(\Omega_o)$.

5.4.2 Cazul sistemelor discrete liniare şi invariante în timp caracterizate de ecuaţii cu diferenţe finite liniare şi cu coeficienţi constanţi

O categorie de sisteme discrete LIT sunt cele descrise prin ecuaţii cu diferenţe finite. Dacă sistemul este LIT ecuaţia este liniară şi are coeficienţii constanţi, şi reciproc. Titlul paragrafului conţine un pleonasm de subliniere.

Fie SLITD caracterizat de ecuaţia cu diferenţe finite de ordinul N:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad , \qquad \textbf{(5.85)}$$

cu condiţii iniţiale nule.

Aplicând ecuaţiei transformarea Fourier în ambii membrii şi ţinând seama de proprietăţile acesteia se obţine:

$$Y(\Omega) \sum_{k=0}^{N} a_k \left(e^{-j\Omega}\right)^k = X(\Omega) \sum_{k=0}^{M} b_k \left(e^{-j\Omega}\right)^k \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad .$$

Ecuaţia permite determinarea răspunsului în frecvenţă al sistemului :

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \left(e^{-j\Omega}\right)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k \left(e^{-j\Omega}\right)^k} \quad ; \quad a_0 \neq 0 \quad . \qquad \textbf{(5.86)}$$

Se observă că, pentru un SLITD descris de o ecuaţie cu diferenţe finite, răspunsul în frecvenţă H(Ω) este o fracţie raţională de variabilă $e^{-j\Omega}$. Coeficienţii ce intervin în ecuaţia (5.85) şi în răspunsul în frecvenţă (5.86) sunt aceiaşi. În consecinţă una dintre forme se poate deduce imediat din cealaltă prin simplă identificare a coeficienţilor.

Având răspunsul în frecvenţă H(Ω) şi recurgând la descompunerea în fracţii simple, se poate determina uşor h[n], apelând de obicei numai la tabele ce dau transformatele inverse (originalele).

Pentru a calcula y[n] pentru un semnal x[n] dat, se procedează după cum urmează:

i) Se determină spectrul semnalului de intrare x[n], X(Ω) ;
ii) Se determină spectrul semnalului de ieşire y[n], Y(Ω) = H(Ω)X(Ω) ;
iii) Se descompune Y(Ω) într-o sumă de fracţii simple şi se aplică transformarea Fourier inversă. Pentru aceasta se recurge de obicei la tabelele de transformate.

Aplicând aceeaşi metodologie, se poate determina şi răspunsul indicial al sistemului, s[n] , dacă x[n] = σ[n] .

***Exemple**:*

i) Fie SLITD caracterizat de ecuaţia:

$$y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2} y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n] - x[n-1] \quad .$$

Răspunsul său în frecvenţă este:

$$H(\Omega) = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\Omega} + \frac{1}{4} e^{-2j\Omega}} = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{\left(1 - \alpha_1 e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \alpha_2 e^{-j\Omega}\right)} \quad ,$$

unde s-a notat $\alpha_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 \pm j) = \frac{1}{2} e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$ *. Se descompune H(Ω) în fracţii simple:*

$$H(\Omega) = \frac{A_1}{1-\alpha_1 e^{-j\Omega}} + \frac{A_2}{1-\alpha_2 e^{-j\Omega}} \quad ; \quad A_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\,\frac{2\sqrt{2}-1}{2} \quad .$$

Acum se poate determina răspunsul la impuls:

$$h[n] = \left(A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n\right)\sigma[n] = \frac{1}{2^n}\left[\left(\frac{1}{2} + j\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\right)e^{jn\frac{\pi}{4}} + \left(\frac{1}{2} - j\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\right)e^{-jn\frac{\pi}{4}}\right]\sigma[n] =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\cos n\frac{\pi}{4} - (2\sqrt{2}-1)\sin n\frac{\pi}{4}\right]\sigma[n] = \frac{\sqrt{2}}{2^n}\left(\cos\frac{n+1}{4}\pi - 2\sin n\frac{\pi}{4}\right)\sigma[n] \quad .$$

ii) Sistemul având răspunsul în frecvenţă :

$$H(\Omega) = \frac{3}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{8}e^{-j\Omega}\right)} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1-\frac{1}{8}e^{-j\Omega}} \quad ,$$

are răspunsul la impuls :

$$h[n] = \left(4\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{3n}}\right)\sigma[n] \quad .$$

iii) Pentru sistemul LIT discret : y[n]-ay[n-1] = x[n] , $|a| < 1$ se determină răspunsul indicial $s[n] = h[n] * \sigma[n]$ *:*

$$H(\Omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \quad ; \quad X_\sigma(\Omega) = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)$$

$$S(\Omega) = H(\Omega)X_\sigma(\Omega) = \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})(1-e^{-j\Omega})} + \frac{\pi}{1-a}\delta_{2\pi}(\Omega)$$

$$S(\Omega) = -\frac{a}{1-a}\,\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \frac{\pi}{1-a}\delta_{2\pi}(\Omega)$$

$$S(\Omega) = -\frac{a}{1-a}\,\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)\right] \quad .$$

Rezultă funcţia indicială:

$$s[n] = -\frac{a}{1-a}a^n\sigma[n] + \frac{1}{1-a}\sigma[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\sigma[n] \quad .$$

5.4.3 Sisteme discrete liniare şi invariante în timp de ordinul întâi şi doi

La conectarea în cascadă a două sisteme caracterizate de răspunsurile la impuls $h_1[n]$ şi $h_2[n]$ şi de răspunsurile în frecvenţă $H_1(\Omega)$ şi $H_2(\Omega)$, se obţine un sistem echivalent $h_e[n] \longleftrightarrow H_e(\Omega)$. Dar:

$$h_e[n] = h_1[n] * h_2[n] \quad ,$$

de unde, aplicând teorema convoluţiei, rezultă că răspunsul în frecvenţă al sistemului echivalent este produsul răspunsurilor în frecvenţă ale sistemelor componente:

$$H_e(\Omega) = H_1(\Omega)\, H_2(\Omega) \quad . \tag{5.87}$$

Nu este greu de arătat că prin conectarea în paralel a două sisteme DLIT se obţin $h_e[n]$ şi $H_e(\Omega)$:

$$h_e[n] = h_1[n] + h_2[n] \quad ; \quad H_e(\Omega) = H_1(\Omega) + H_2(\Omega) \quad . \tag{5.88}$$

Referindu-ne la răspunsul în frecvenţă (5.86) al unui sistem caracterizat de ecuaţia cu diferenţe finite (5.85), acesta poate fi scris sub forma unui produs de factori cu coeficienţi reali de gradul unu şi doi:

$$H(\Omega) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{P} \left(1 + \beta_{1k} e^{-j\Omega} + \beta_{2k} e^{-2j\Omega}\right) \prod_{k=1}^{M-2P} \left(1 + \mu_k e^{-j\Omega}\right)}{\prod_{k=1}^{Q} \left(1 + \alpha_{1k} e^{-j\Omega} + \alpha_{2k} e^{-2jk}\right) \prod_{k=1}^{N-2Q} \left(1 + \eta_k e^{-j\Omega}\right)} \tag{5.89}$$

Grupând corespunzător factori ai numărătorului cu factori ai numitorului sub formă de fracţii se obţine un produs de răspunsuri în frecvenţă ce corespund unor sisteme de ordinul unu sau doi conectate în serie. Având coeficienţi reali, se poate realiza implementatrea relaţiei (5.89) printr-o înseriere de sisteme de ordinul unu sau doi, realizate în forma directă II.

Fie M = N pentru simplificarea notaţiilor, subînţelegând că anumiţi coeficienţi sunt nuli. Atunci (5.86) poate fi descompusă într-o sumă de fracţii simple cu coeficienţi exclusiv reali, cu numitori de gradul unu sau doi:

$$H(\Omega) = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{k=1}^{Q} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} e^{-j\Omega}}{1 + \alpha_{1k} e^{-j\Omega} + \alpha_{2k} e^{-2j\Omega}} + \sum_{k=1}^{N-2Q} \frac{A_k}{1 + \eta_k e^{-j\Omega}} \tag{5.90}$$

Fiecare termen al relaţiei (5.90) poate fi implementat în forma directă II, deoarece are coeficienţi reali. Toţi termenii generează deci sisteme de ordinul unu sau

doi, conectate, de această dată, în paralel.

Din cele expuse rezultă importanţa studiului sistemelor de ordinul întâi şi doi.

Sisteme de ordinul întâi

Ne vom referi exclusiv la sisteme cauzale. În al treilea exemplu din §5.4.2 s-a studiat sistemul descris de ecuaţia:

$$y[n] - a\,y[n-1] = x[n] \quad , \quad |a| < 1 \quad . \tag{5.91}$$

El are răspunsul în frecvenţă şi răspunsul la impuls:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - a\,e^{-j\Omega}} \quad ; \quad h[n] = a^n\,\sigma[n] \quad . \tag{5.92-93}$$

Funcţia indicială este:

$$s[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\,\sigma[n] \quad . \tag{5.94}$$

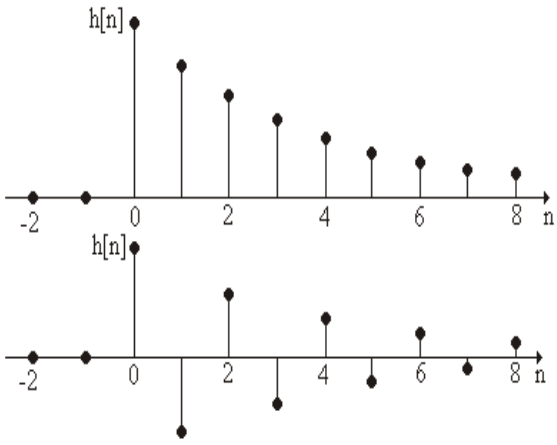


Fig. 5.14. Răspunsul la impuls al unui sistem având: (a) a = 3/4 , (b) a = -3/4.

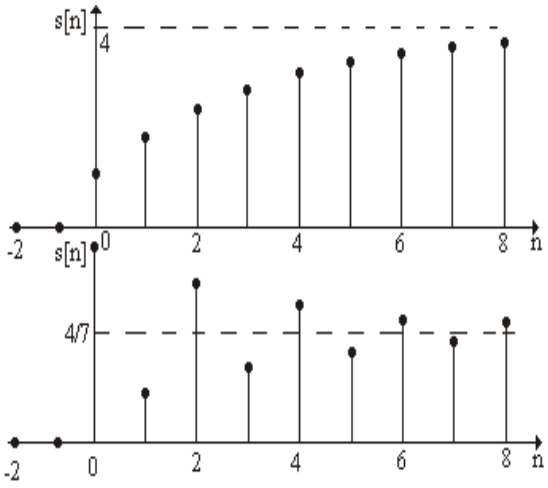


Fig. 5.15 Răspunsul indicial al unui sistem de ordinul unu cu (a) a = 3/4 , (b) a = -3/4 .

Răspunsul la impuls precum şi răspunsul indicial nu prezintă oscilaţii dacă

0<a<1 . Dacă însă -1 < a < 0 , răspunsurile au caracter oscilant. În figura 5.14 a este prezentat răspunsul la impuls pentru un sistem de ordinul întâi având a > 0 , iar în figura 5.14 b răspunsul la impuls pentru sistemul având a < 0 .

În figura 5.9, dacă în loc de X(Ω) citim H(Ω), putem vedea modulul şi faza răspunsului în frecvenţă pentru un sistem de ordinul întâi cu a > 0 şi cu a < 0 .

Sisteme de ordinul doi

În cazul sistemelor de ordinul II vom deosebi cazul în care rădăcinile în $e^{-j\Omega}$ ale numitorului răspunsului în frecvenţă sunt complexe (i) , respectiv reale (ii):

i) Fie sistemul LITD,cauzal,descris de ecuaţia cu diferenţe finite:

$$y[n] - 2\rho\cos\theta\, y[n-1] + \rho^2 y[n-2] = x[n] \ , \ 0 < \rho < 1 \ , \ 0 \le \theta \le \pi \ , \tag{5.95}$$

având răspunsul în frecvenţă :

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - 2\rho\cos\theta\, e^{-j\Omega} + \rho^2 e^{-2j\Omega}} \ . \tag{5.96}$$

Ecuaţia $x^2 - 2x\rho\cos\theta + \rho^2 = 0$ are soluţiile $x_{1,2} = \rho\cos\theta \pm j\rho\sin\theta$ sau $x_1 = \rho e^{j\theta}$ şi $x_2 = \rho e^{-j\theta}$. În consecinţă, H(Ω) se poate pune sub forma :

$$H(\Omega) = \frac{1}{(1 - \rho e^{j\theta} e^{-j\Omega})(1 - \rho e^{-j\theta} e^{-j\Omega})} = \frac{e^{j\theta}}{2j\sin\theta} \frac{1}{1 - \rho e^{j\theta} e^{-j\Omega}} - \frac{e^{-j\theta}}{2j\sin\theta} \frac{1}{1 - \rho e^{-j\theta} e^{-j\Omega}} \ , \tag{5.97}$$

dacă $\theta \in (0, \pi)$. Răspunsul la impuls al sistemului de ordinul doi este:

$$h[n] = \frac{1}{2j\sin\theta}\left[e^{j\theta}\rho^n e^{jn\theta} - e^{-j\theta}\rho^n e^{-jn\theta}\right]\sigma[n] = \rho^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\sigma[n] \ , \ \theta \in (0, \pi) \ . \tag{5.98}$$

Răspunsul indicial se determină fie direct, fie prin similitudine cu exemplul iii) din §5.4.2 :

$$s[n] = \left[\frac{e^{j\theta}}{2j\sin\theta} \frac{1 - (\rho e^{j\theta})^{n+1}}{1 - \rho e^{j\theta}} - \frac{e^{-j\theta}}{2j\sin\theta} \frac{1 - (\rho e^{-j\theta})^{n+1}}{1 - \rho e^{-j\theta}}\right]\sigma[n] \ ; \ \theta \in (0, \pi) \ . \tag{5.99}$$

Dacă θ = 0 , relaţia iniţială (5.96) devine:

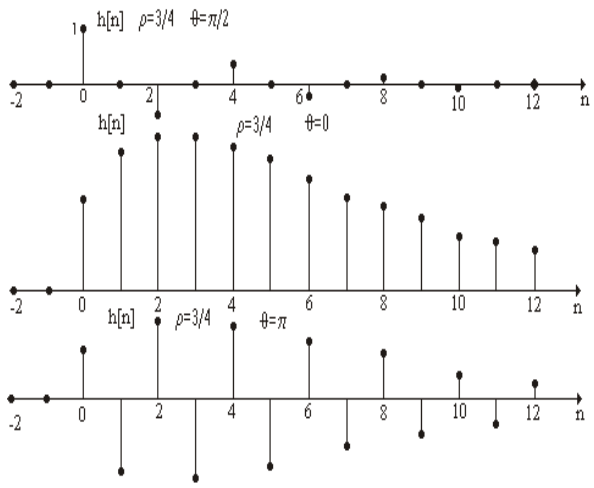


Fig. 5.16 Răspunsurile la impuls ale unui sistem de ordinul 2 având ecuaţia (5.95) pentru: ρ=3/4 şi θ=π/2 , 0, π.

$$H(\Omega) = \frac{1}{\left(1-\rho e^{-j\Omega}\right)^2} \quad , \qquad \textbf{(5.100)}$$

şi ţinând seama de teorema de derivare a spectrului sau direct din tabele:

$$h[n] = (n+1)\,\rho^n\,\sigma[n] \quad . \qquad \textbf{(5.101)}$$

Pentru s[n] se pleacă de la (5.100) şi se face produsul cu $X_\sigma(\Omega)$:

$$S(\Omega) = \frac{1}{(1-\rho e^{-j\Omega})^2}\,\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \\ + \pi\,\frac{1}{(1-\rho)^2}\,\delta_{2\pi}(\Omega) \;;$$

$$S(\Omega) = -\frac{\rho}{1-\rho}\,\frac{1}{(1-\rho e^{-j\Omega})^2} - \\ - \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\,\frac{1}{1-\rho e^{-j\Omega}} + \\ + \frac{1}{(1-\rho)^2}\,\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \frac{\pi}{(1-\rho)^2}\,\delta_{2\pi}(\Omega) \;.$$

Se poate trece acum în domeniul timpului:

$$s[n] = \left[\frac{1}{(1-\rho)^2} - \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\,\rho^n - \right. \\ \left. - \frac{\rho}{1-\rho}\,(n+1)\,\rho^n\right]\sigma[n] \quad .$$

(5.102)

Ultimul caz este dat de θ = π . Răspunsul în frecvenţă este :

$$H(\Omega) = \frac{1}{\left(1 + \rho e^{-j\Omega}\right)^2} \quad . \qquad \textbf{(5.103)}$$

Relaţiile (5.101) şi (5.102) rămân valabile cu observaţia că trebuie făcută schimbarea ρ —> -ρ (comparaţi relaţiile (5.100) şi (5.103). Rezultă:

$$h[n] = (n+1)(-\rho)^n \sigma[n] \quad , \tag{5.104}$$

$$s[n] = \left[\frac{1}{(1+\rho)^2} + \frac{\rho}{(1+\rho)^2}(-\rho)^n + \frac{\rho}{1+\rho}(n+1)(-\rho)^n \right] \sigma[n] \ . \tag{5.105}$$

Analizând relaţia (5.98) se observă că pentru $\theta \in (0\ ,\ \pi)$ răspunsul la impuls are un caracter oscilant. Sistemul discret este echivalent unui sistem de ordinul doi continuu, având ξ subunitar.

În figura 5.16 este reprezentat răspunsul la impuls pentru $\theta = \pi/2$ şi $\rho = 3/4$. Dacă $\theta = 0$, răspunsul sistemului discret corespunde, ca formă a expresiei lui h[n], răspunsului unui sistem în timp continuu, critic amortizat. Răspunsul sistemului în timp discret pentru $\theta = 0$ şi $\rho = 3/4$ este prezentat în figura 5.16. Şi pentru $\theta = \pi$ sistemul prezintă oscilaţii, aşa cum se observă din figura 5.16.

Modulul răspunsului în frecvenţă poate fi determinat pornind de la relaţia (5.96). Dacă se aplică relaţia lui Euler şi se efectuează calculele rezultă următoarea expresie pentru modul:

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{4\rho^2\cos^2\Omega - 4\rho(1+\rho^2)\cos\theta\cos\Omega + (1-\rho^2)^2 + 4\rho^2\cos^2\theta}} \ . \tag{5.106}$$

Maximul modulului apare acolo unde numitorul este minim deci pentru:

$$\cos\Omega = \frac{1+\rho^2}{2\rho}\cos\theta \quad , \tag{5.107}$$

sau la unul dintre capetele de interval. Condiţia ca să existe un maxim dat de (5.107) este ca: $\frac{1+\rho^2}{2\rho}|\cos\theta| \le 1$.

Faza răspunsului în frecvenţă se determină tot din (5.96):

$$\Phi(\Omega) = -\operatorname{arctg}\frac{2r\sin\theta(a - r\cos\Omega)}{1 - 2r\cos\theta\cos\Omega + r^2\cos 2\Omega} \quad , \tag{5.108}$$

$$\operatorname{Re}\left\{1 - 2r\cos\theta\cos\Omega + r^2\cos 2\Omega\right\} \ge 0 \quad .$$

ii) Dacă ecuaţia cu diferenţe ce descrie sistemul este de forma:

$$y[n] - (a_1 + a_2)y[n-1] + a_1 a_2 y[n-2] = x[n] \ , \ a_1, a_2 \in R \ , \ |a_1| < 1 \ ; \ |a_2| < 1 \quad , \tag{5.109}$$

atunci răspunsul în frecvenţă al sistemului devine:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1-(a_1+a_2)e^{-j\Omega}+a_1a_2e^{-2j\Omega}} = \frac{1}{(1-a_1e^{-j\Omega})(1-a_2e^{-j\Omega})} \qquad \textbf{(5.110)}$$

Descompunând în fracţii simple se obţine:

$$H(\Omega) = \frac{a_1}{a_1-a_2}\frac{1}{1-a_1e^{-j\Omega}} - \frac{a_2}{a_1-a_2}\frac{1}{1-a_2e^{-j\Omega}} \qquad a_1 \neq a_2 \ , \qquad \textbf{(5.111)}$$

şi apoi răspunsul la impuls h[n] şi răspunsul indicial s[n] :

$$h[n] = \frac{a_1^{n+1}-a_2^{n+1}}{a_1-a_2}\sigma[n] \ , \ s[n] = \frac{1}{(1-a_1)(1-a_2)}\left[1+\frac{a_2-1}{a_1-a_2}a_1^{n+2} - \frac{a_1-1}{a_1-a_2}a_2^{n+2}\right]\sigma[n] \ .$$

(5.112-113)

Dacă însă $a_1 = a_2 = a$, atunci $H(\Omega)$ devine:

$$H(\Omega) = \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2} \quad ; \quad a \in R \ , \ |a| < 1 \ , \qquad \textbf{(5.114)}$$

şi, în consecinţă, h[n] şi s[n] iau formele:

$$h[n] = (n+1)a^n\sigma[n] \ , \ s[n] = \left[\frac{1}{(a-1)^2} - \frac{a}{(a-1)^2}a^n + \frac{a}{a-1}(n+1)a^n\right]\sigma[n] \ .$$

(5.115-116)

5.5 Funcţia de corelaţie. Densitatea spectrală de putere şi de energie a semnalelor discrete

Şi pentru semnalele discrete x[n] de energie infinită dar de putere medie finită se poate defini funcţia de corelaţie $R_x[k]$ prin relaţia:

$$R_x[k] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x^*[n]\,x[n+k] \quad . \qquad \textbf{(5.117)}$$

Dacă semnalul x[n] este periodic, de perioadă N_o , $x[n+N_o] = x[n]$ atunci:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_o-1} c_k e^{jk\Omega_o n} \ , \ \Omega_o = \frac{2\pi}{N_o} \ ,$$

şi deci:

$$R_x[k] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left(\sum_{l=0}^{N-1} c_l^{*} e^{-jl\Omega_o n} \right) \left(\sum_{m=0}^{N_o-1} c_m e^{jm\Omega_o (n+k)} \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{l=0}^{N_o-1} \sum_{m=0}^{N_o-1} c_l^{*} c_m \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{j(m-l)\Omega_o n} \right) e^{jm\Omega_o k} \quad . \tag{5.118}$$

Dar:

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{j(m-l)\Omega_o n} = \begin{cases} \dfrac{\sin\left[\dfrac{m-l}{2}\Omega_o (2N+1)\right]}{\sin\left(\dfrac{m-l}{2}\Omega_o\right)} & m \neq l \\ 2N+1 & m = l \end{cases} , \tag{5.119}$$

şi substituind în (5.118) se obţine:

$$R_x[k] = \sum_{m=0}^{N_o-1} |c_m|^2 e^{jm\Omega_o k} \quad , \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N_o} \quad . \tag{5.120}$$

Se poate verifica prin calcul direct că, pentru semnalul periodic:

$$\frac{1}{N_o} \sum_{n=0}^{N_o-1} x^{*}[n] x[n+k] = \frac{1}{N_o} \sum_{n=0}^{N_o-1} \left(\sum_{l=0}^{N_o-1} c_l^{*} e^{-jl\Omega_o n} \right) \left(\sum_{m=0}^{N_o-1} c_m e^{jm\Omega_o (n+k)} \right) =$$

$$= \frac{1}{N_o} \sum_{l=0}^{N_o-1} \sum_{m=0}^{N_o-1} c_l^{*} c_m \left(\sum_{n=0}^{N_o-1} e^{j(m-l)\Omega_o n} \right) e^{jm\Omega_o k} = \sum_{m=0}^{N_o-1} |c_m|^2 e^{jm\Omega_o k} \quad . \tag{5.121}$$

În consecinţă, pentru un semnal periodic, de perioadă N_o , funcţia $R_x[k]$ este periodică tot cu perioada N_o şi se calculează cu:

$$R_x[k] = \frac{1}{N_o} \sum_{n=0}^{N_o-1} x^{*}[n] x[(n+k)_N] = \sum_{m=0}^{N_o-1} |c_m|^2 e^{jm\Omega_o k} \quad , \quad \Omega_o = \frac{2\pi}{N_o} \quad . \tag{5.122}$$

Teorema Wiener-Hincin afirmă că $R_x[k]$ are coeficienţii seriei Fourier exponenţiale, elementele secvenţei $\{|c_m|^2\}$:

$$R_x[k] \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ |c_m|^2 \right\} \quad . \tag{5.123}$$

Se remarcă imediat că funcţia de corelaţie satisface relaţiile:

$$R_x[0] = R_x[lN_o] = \mathrm{P} = \sum_{m=0}^{N_o-1} |c_m|^2 \quad , \tag{5.124}$$

unde cu P s-a notat puterea medie pe o perioadă a semnalului x[n]. De asemenea:

$$|R_x[k]| \leq \mathrm{P} \tag{5.125}$$

precum şi:

$$R_x[-k] = R_x[k] \quad . \tag{5.126}$$

Se poate defini densitatea spectrală de putere a semnalului ca transformata Fourier în timp discret a semnalului periodic:

$$R_x[k] \longleftrightarrow S_x(\Omega) = \sum_{m=0}^{N_o-1} 2\pi |c_m|^2 \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N_o}\right) \quad . \tag{5.127}$$

Această relaţie este o altă formă a teoremei Wiener-Hincin.

Pentru cazul unui semnal de energie infinită dar de putere medie finită,neperiodic,densitatea spectrală de putere este transformata Fourier a funcţiei de corelaţie:

$$S_x(\Omega) = \mathscr{F}\{R_x[k]\} \quad . \tag{5.128}$$

Funcţia $S_x(\Omega)$ este periodică de perioadă 2π, nenegativă şi pară. Deoarece pentru $k = 0$ relaţia (5.128) conduce la puterea medie a semnalului de energie infinită, de natură oarecare, rezultă că:

$$\mathrm{P} = R_x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} S_x(\Omega)\, d\Omega \quad . \tag{5.129}$$

Şi pentru un semnal oarecare rămân valabile relaţiile (5.125) şi (5.126).

<u>Funcţia de intercorelaţie pentru semnalele discrete de energie infinită dar de putere medie finită</u>

Prin definiţie $R_{xy}[k]$, funcţia de intercorelaţie a semnalelor x[n] şi y[n] de

energie infinită dar de putere medie finită este:

$$R_{xy}[k] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^*[n]\, y[n+k] \quad . \tag{5.130}$$

În cazul a două semnale periodice, de aceeaşi perioadă N_o , $R_{xy}[k+N_o] = R_{xy}[k]$, şi, prin urmare, intercorelaţia este periodică de perioadă N_o .

Relaţia de definire a intercorelaţiei semnalelor discrete periodice devine:

$$R_{xy}[k] = \frac{1}{N_o} \sum_{n=0}^{N_o-1} x^*[n]\, y[n+k] \quad . \qquad \textbf{(5.131)}$$

Se demonstrează imediat că în ambele cazuri $R_{xy}[k]$ are simetrie hermitică:

$$R_{xy}[-k] = R_{yx}^*[k] \quad . \qquad \textbf{(5.132)}$$

Se poate scrie relaţia:

$$|R_{xy}[k]|^2 \le R_x[0]\, R_y[0] = P_x P_y \quad , \qquad \textbf{(5.133)}$$

în care P_x şi P_y reprezintă puterile semnalelor discrete x[n] şi y[n].

Pentru x[n] = y[n] funcţia de intercorelaţie devine chiar funcţia de corelaţie $R_{xx}[k] = R_x[k]$. De aceea funcţiei de corelaţie i se mai spune şi funcţie de autocorelaţie.

<u>Funcţia de corelaţie pentru semnalele discrete de energie finită</u>

Ca şi cazul semnalelor de energie finită definite în timp continuu, funcţia de intercorelaţie a a două semnale discrete x[n] şi y[n] având energie finită, măsoară gradul de asemănare al celor două semnale. Prin definiţie, funcţia de intercorelaţie este în acest caz:

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]\, y[n+k] = x^*[-k] * y[k] = \breve{x}^*[k] * y[k] \quad . \qquad \textbf{(5.134)}$$

Transformata Fourier în timp discret a funcţiei de intercorelaţie este:

$$R_{xy}[k] = \breve{x}^*[k] * y[k] \longleftrightarrow X^*(\Omega)\, Y(\Omega) \quad . \qquad \textbf{(5.135)}$$

Funcţia $X^*(\Omega)Y(\Omega) = S_{XY}(\Omega)$ poartă denumirea de densitate interspectrală de energie (sau densitate spectrală mutuală de energie).

Dacă y[n] = x[n] se defineşte prin (5.139) funcţia de (auto)corelaţie a semnalului

x[n] de energie finită :

$$R_x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]\, x[n+k] = \breve{x}[k] * x[k] \quad . \qquad \textbf{(5.136)}$$

Transformata Fourier în timp discret a funcţiei de corelaţie este, conform relaţiei (5.135):

$$R_x[k] \longleftrightarrow |X(\Omega)|^2 \quad . \tag{5.137}$$

Aceasta este forma teoremei Wiener-Hincin pentru semnalele discrete de energie finită.

Densitatea spectrală de energie a semnalului discret x[n] este:

$$S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2 \quad . \tag{5.138}$$

Energia semnalului W_x se calculează aplicând relaţia lui Parseval :

$$W_x = R_x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad . \tag{5.139}$$

Funcţia $R_x[k]$ este pară şi îşi atinge maximul în origine. Relaţiile (5.125) şi (5.126) rămân valabile, înlocuind P cu W, energia semnalului.

<u>Relaţia între densităţile spectrale de putere şi de energie ale semnalelor ce trec prin sisteme discrete,linare şi invariante în timp</u>

Procedând ca şi în cazul semnalelor în timp continuu, pentru x[n] şi y[n] aflate în relaţia $y[n] = x[n] * h[n]$ se arată că:

$$S_Y(\Omega) = |H(\Omega)|^2 S_X(\Omega) \quad . \tag{5.140}$$

unde $S_x(\Omega)$ şi $S_y(\Omega)$ sunt fie densităţi spectrale de putere (pentru semnalele de putere medie finită) fie densităţi spectrale de energie (pentru semnalele de energie finită).

Tabelul 5.1 Proprietăţile seriei Fourier în timp discret

Semnalul discret periodic	Coeficienţii seriei Fourier exponenţiale
$x[n]\ ,\ x[n+N] = x[n] = x[(n)_N]$	$\{c_k^x\}\ ;\ c_{k+N}^x = c_k^x = c_{(k)_N}^x$
$y[n]\ ,\ y[n+N] = y[n] = y[(n)_N]$	$\{c_k^y\}\ ;\ c_{k+N}^y = c_k^y = c_{(k)_N}^y$
$a\,x[n] + b\,y[n]$	$\{a c_k^x + b c_k^y\}$
$x[n-n_o]\ ,\ n_o \in \mathbb{R}$	$\{e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_o} c_k^x\}$
$x^*[n]$	$\{(c_k^x)^*\}$
$x[-n]$	$\{c_{-k}\}$
$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & ,\ n \vdots m \\ 0 & ,\ \hat{i}n\ rest \end{cases}$ perioada mN	$\{\frac{1}{m} c_k^x\}\ ;\ perioada\ mN$
$x[n] \otimes y[n] = \sum_{k \in <N>} x[k]\,y[n-k]$	$\{N c_k^x c_k^y\}$
$\frac{1}{N_o}\sum_{n=0}^{N_o-1} x^*[n]\,y[n+k]$	$\{(c_k^k)^* \cdot c_k^y\}$
$x[n] \cdot y[n]$	$\{c_k^x \otimes c_k^y\} = \{\sum_{m \in <N>} c_{k-m}^x c_m^y\}$
$x[n] - x[n-1]$	$\{(1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}}) c_k^x\}$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\ ;\ c_o^x = 0$	$\{c_k^x / (1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}})\}\ ,\ c_o^x = 0$
$x[n] \in \mathbb{R}$	$c_k = (c_{-k})^*$ $\lvert c_k\rvert = \lvert c_{-k}\rvert\ ;\ \mathrm{Arg}\,c_k = -\mathrm{Arg}\,c_{-k}$ $\mathrm{Re}\{c_k\} = \mathrm{Re}\{c_{-k}\}\ ;\ \mathrm{Im}\{c_k\} = -\mathrm{Im}\{c_{-k}\}$
$x_p[n]\ ,\ x[n] \in \mathbb{R}$	$\{\mathrm{Re}\{c_k^x\}\}$
$x_i[n]\ ,\ x[n] \in \mathbb{R}$	$\{j\,\mathrm{Im}\{c_k^x\}\}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$	

Tabelul 5.2 Proprietăţile transformării Fourier în timp discret

Semnalul discret aperiodic	Transformata Fourier
$x[n]$	$X(\Omega) \;\; ; \;\; X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$
$y[n]$	$Y(\Omega) \;\; ; \;\; Y(\Omega + 2\pi) = Y(\Omega)$
$a\,x[n] + b\,y[n]$	$a\,X(\Omega) + b\,Y(\Omega)$
$x[n - n_o]$	$e^{-j\Omega n_o} X(\Omega)$
$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
$x[-n]$	$X(-\Omega)$
$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] \;, & n \vdots k \\ 0 \;, & \hat{\imath}n \; rest \end{cases}$	$X(k\Omega)$
$x[n] * y[n]$	$X(\Omega)\,Y(\Omega)$
$\breve{x}^*[k] * y[k]$	$X^*(\Omega)\,Y(\Omega)$
$x[n]\,y[n]$	$\frac{1}{2\pi} X(\Omega) \otimes Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(u)\,Y(\Omega - u)\,du$
$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - e^{-j\Omega}\right) X(\Omega)$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{X(\Omega)}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\,2\pi)$
$n\,x[n]$	$j \frac{d}{d\Omega} X(\Omega)$
$x[n] \in \mathbb{R}$	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$ $\lvert X(\Omega)\rvert = \lvert X(-\Omega)\rvert \;;\; \mathrm{Arg}X(\Omega) = -\mathrm{Arg}X(-\Omega)$ $\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} \;;\; \mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}$
$x_p[n] \;,\; x[n] \in \mathbb{R}$	$\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}$
$x_i[n] \;,\; x[n] \in \mathbb{R}$	$j\,\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$	

Tabelul 5.3. Perechi semnal-transformată Fourier în timp discret

Semnalul	Transformata Fourier	Coeficienţii seriei Fourier exponenţiale (pentru) semnale periodice
$\sum_{k\in\langle N\rangle} c_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N});\quad c_k = c_{(k)_N}$	$\{c_k\}$
$e^{j\Omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - k2\pi)$	$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \in Q: \{c_k\};\ c_k = \begin{cases} 1, (k)_N = m \\ 0, rest \end{cases}$ $\frac{\Omega_0}{2\pi} \notin Q;$ *semnalul nu este periodic*
$\cos\Omega_0 n$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi[\delta(\Omega-\Omega_0-k2\pi)+\delta(\Omega+\Omega_0-k2\pi)]$	$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \in Q: \{c_k\};\ c_k = c_{-k} = \begin{cases} 1/2, (k)_N = m \\ 0, rest \end{cases}$ $\frac{\Omega_0}{2\pi} \notin Q;$ *semnalul nu este periodic*
$\sin\Omega_0 n$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{j}[\delta(\Omega-\Omega_0-k2\pi)+\delta(\Omega+\Omega_0-k2\pi)]$	$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \in Q: \{c_k\};\ c_k = \begin{cases} 1/(2j), k = m \pm pN \\ -1/(2j), k = -m \pm pN \\ 0, rest \end{cases}$ $\frac{\Omega_0}{2\pi} \notin Q;$ *semnalul nu este periodic*
x[n]=1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k2\pi)$	$c_k = \begin{cases} 1, (k)_N = 0 \\ 0, rest \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & N_1 \le \lvert n\rvert \le N/2 \end{cases}$ $x[n+N] = x[n]$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{\sin(\frac{2N_1+1}{2}\frac{2k\pi}{N})}{N\sin\frac{2k\pi}{N}}\delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$	$c_k = \frac{\sin(\frac{2N_1+1}{2}\frac{2k\pi}{N})}{N\sin\frac{2k\pi}{N}}\ (k)_N \neq 0;\quad c_k = \frac{2N_1+1}{N};(k)_N = 0$

Semnalul	**Transformata Fourier**	**Coeficienţii seriei Fourier exponenţiale (pentru) semnale periodice**
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$	$c_k = \frac{1}{N}$
$a^n \sigma[n]; \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$	-
$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n > \rvert N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[(2N_1+1)/2]\Omega}{\sin(\Omega/2)}$	-
$\frac{\sin \Omega_0 n}{\pi n}; \quad 0 < \Omega_0 < \pi$	$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\Omega\rvert < \Omega_0 \\ 0, & \Omega_0 < \lvert\Omega\rvert \le \pi \end{cases}; X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$	-
$\delta[n]$	1 (constanta)	-
$\sigma[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$	-
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega_0 n}$	-
$(n+1)a^n \sigma[n]; \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$	-
$\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} a^n \sigma[n]; \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^m}$	-

Problema 1

Se considerã urmãtoarea mulţime de semnale:

$$\{\varphi_k[n] = \varphi[n-k]\}_{k\in Z}$$

unde:

$$\varphi[n] = \alpha^n \cdot \sigma[n] \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

a). Demonstraţi cã orice semnal de energie finitã în timp discret poate fi reprezentat sub forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \varphi[n-k]$$

determinând o expresie explicitã pentru coeficienţii a_k *în funcţie de semnalul* ***x[n].*** *Care este reprezentarea semnalului* $\delta[n]$ *?*

b). Notând cu ***r[n]*** *rãspunsul unui sistem discret liniar şi invariant în timp la semnalul* $\varphi[n]$*, determinaţi o expresie pentru rãspunsul* ***y[n]*** *al acestui sistem la semnalul* ***x[n],*** *de la punctul a), în funcţie de* ***r[n]*** *şi* ***x[n].***

c). Demonstraţi cã ***y[n]*** *poate fi scris ca:*

$$y[n] = \psi[n] * x[n] * r[n]$$

determinând semnalul $\psi[n]$***.***

d). Folosiţi rezultatul de la punctul c) pentru a exprima rãspunsul la impuls al unui sistem în funcţie de ***r[n].*** *De asemenea, demonstraţi cã:*

$$\psi[n] * \varphi[n] = \delta[n]$$

Rezolvare.

a). Deoarece: $x[n] = a[n] * \varphi[n]$ *se poate scrie în domeniul frecvenţă:*

$$X(\Omega) = A(\Omega) \cdot \Phi(\Omega) \quad \Rightarrow \quad A(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{\Phi(\Omega)}$$

Dar:

$$\Phi(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot e^{-jn\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha \cdot e^{-j\Omega}\right)^n = \frac{1}{1-\alpha \cdot e^{-j\Omega}}$$

De aceea:

$$A(\Omega) = \left(1 - \alpha \cdot e^{-j\Omega}\right) \cdot X(\Omega)$$

În figura următoare se prezintă sistemul care transformă semnalul $x[n]$ *în semnalul* $a[n]$.

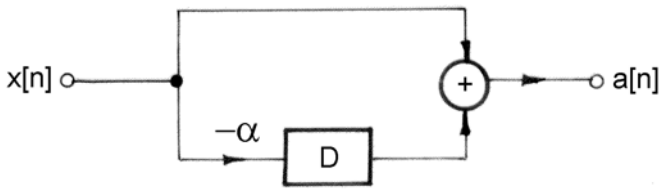


Fig. 1.1. Sistem de generare a semnalului a.

Legătura intrare-ieşire a acestui sistem este:

$$a[n] = x[n] - \alpha \cdot x[n-1]$$

Dacă:

$$x[n] = \delta[n] \;\Rightarrow\; a[n] = \delta[n] - \alpha \cdot \delta[n-1]$$

adică:

$$a[0] = 1; \quad a[1] = -\alpha; \quad a[n] = 0 \text{ în rest.}$$

Verificare:

$$x[n] = \sum_k a_k \cdot \varphi[n-k] = \alpha^n \cdot \sigma[n] - \alpha \cdot \alpha^{n-1} \cdot \sigma[n-1] = \alpha^n \cdot \delta[n] = \delta[n]$$

b). Se notează cu $h[n]$ *r[spunsul sistemului definit la punctul b), reprezentat în figura de mai jos.*

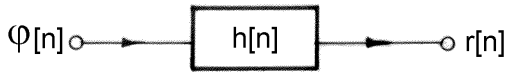


Fig.2.1. Sistemul definit la punctul b).

Răspunsul acestui sistem la semnalul $x[n]$ *este:*

$$y[n] = \vartheta\{x[n]\} = \vartheta\left\{\sum_k a[k]\cdot\varphi[n-k]\right\} =$$
$$= \sum_k a[k]\cdot r[n-k] = a[n] * r[n] =$$
$$= \left(x[n] - \alpha\cdot x[n-1]\right) * r[n] =$$
$$= x[n] * \left(\delta[n] - \alpha\cdot\delta[n-1]\right) * r[n]$$

unde $\psi[n] = \delta[n] - \alpha\cdot\delta[n-1]$.
Rezultã:

$$y[n] = \psi[n] * x[n] * r[n]$$

c). La punctul b). s-a demonstrat faptul cã relaţia dintre semnalele de intrare şi ieşire este tocmai cea care trebuie demonstratã:

$$y[n] = \psi[n] * x[n] * r[n]$$

unde s-a fãcut notaţia: $\psi[n] = \delta[n] - \alpha\cdot\delta[n-1]$

d). Dacã $x[n] = \delta[n]$ *atunci rãspunsul sistemului poate fi scris în funcţie de* **r[n]** *sub forma:*

$$y[n] = h[n] = \psi[n] * r[n] = r[n] - \alpha\cdot r[n-1]$$

Pentru a se demonstra relaţia doritã se scrie:

$$\psi[n] * \varphi[n] = \left(\delta[n] - \alpha\delta[n-1]\right) * \varphi[n] = \varphi[n] - \alpha\cdot\varphi[n-1] =$$

$$= \alpha^n\cdot\sigma[n] - \alpha\cdot\left(\alpha^{n-1}\cdot\sigma[n-1]\right) = \alpha^n\cdot\left(\sigma[n] - \sigma[n-1]\right) = \alpha^n\cdot\delta[n] = \delta[n]$$

Problema 2.

Relația intrare-ieşire pentru un mediator în timp discret este:

$$y[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[n-k]$$

a) Schițați o schemă de implementare a acestui sistem.
b) Determinați răspunsul la impuls al sistemului.
c) Determinați răspunsul în frecvență al sistemului. Ce fel de filtru este mediatorul ?

Rezolvare.

a)

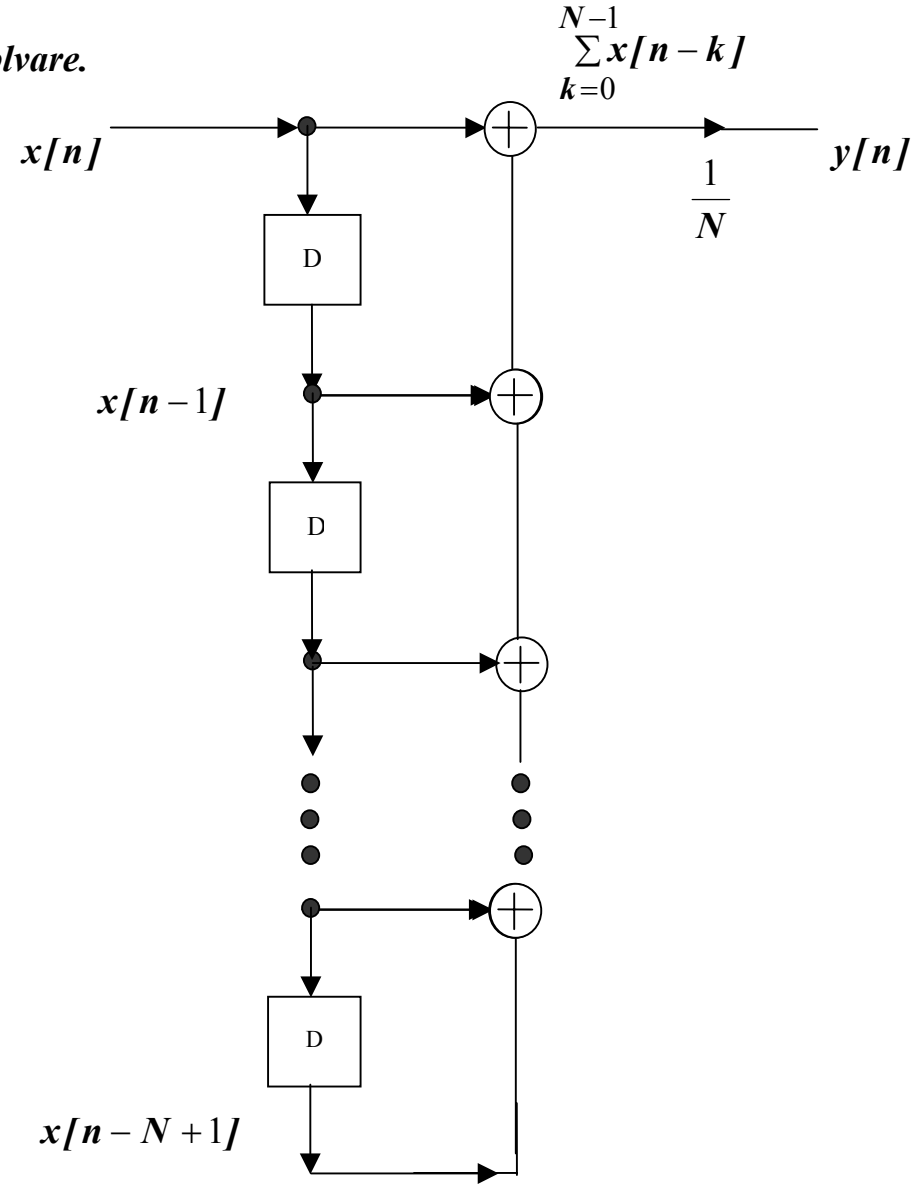


Fig. 2.1. Schema cerută.

b)

$$x[n]=\delta[n] \quad \Rightarrow \quad y[n]=h[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\delta[n-k]=\begin{cases}\frac{1}{N}, & n=\overline{0,N-1}\\ 0, & \hat{i}n \quad rest\end{cases}$$

c)

$$H(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]\cdot e^{-jn\Omega}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\cdot e^{-jn\Omega}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-j\Omega})^n=$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{1-e^{-j\Omega N}}{1-e^{-j\Omega}}=\frac{1}{N}\cdot\frac{e^{-j\frac{\Omega N}{2}}}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}}\cdot\frac{2j\sin\frac{N\Omega}{2}}{2j\sin\frac{\Omega}{2}}=\frac{1}{N}\cdot e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{N\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$

Dar:

$$|H(0)|=\lim_{\Omega\to 0}|H(\Omega)|=\frac{1}{N}\lim_{\Omega\to 0}\frac{\left|\sin\frac{N\Omega}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\Omega}{2}\right|}=$$

$$=\frac{1}{N}\lim_{\Omega\to 0}\frac{\left|\sin\frac{N\Omega}{2}\right|}{\left|N\frac{\Omega}{2}\right|}\cdot\lim_{\Omega\to 0}\frac{1}{\frac{\left|\sin\frac{\Omega}{2}\right|}{\left|\frac{\Omega}{2}\right|}}\cdot N=1$$

şi:

$$\left|H(\frac{\pi}{2})\right|=\frac{1}{N}\frac{\left|\sin\frac{N\pi}{4}\right|}{\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{N}\left|\sin\frac{N\pi}{4}\right|<\frac{\sqrt{2}}{N}<1, \quad pentru \quad N>1$$

Deoarece $\left|H(\frac{\pi}{2})\right|<|H(0)|$ *este vorba despre un filtru trece jos.*

Problema 3

Se consideră sistemul în timp discret care răspunde la semnalul $x[n]$ *cu semnalul* $y[n]$. *Transformatele Fourier în timp discret ale acestor semnale sunt legate prin relaţia:*

$$Y(\Omega) = 5X(\Omega) + e^{-j\Omega}X(\Omega) + 2\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

a) Este liniar sistemul considerat ? Justificaţi răspunsul.
b) Dar invariant în timp ? Justificaţi răspunsul.
c) Determinaţi expresia lui $y[n]$ *dacă* $x[n] = \delta[n]$.

Rezolvare.

Se determină transformatele Fourier inverse ale spectrelor din relaţia din enunţ.

$$x[n] \leftrightarrow X(\Omega) \Rightarrow x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-jn_0\Omega}\ X(\Omega) \overset{n_0=1}{\Rightarrow} x[n-1] \leftrightarrow e^{-j\Omega}X(\Omega)$$

$$-jnx[n] \leftrightarrow \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \Rightarrow 2\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \leftrightarrow -2jnx[n]$$

Relaţia în domeniul timp corespunzătoare relaţiei din enunţ este:

$$y[n] = 5x[n] + x[n-1] - 2jnx[n]$$

a) Fie $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$
Sistemul considerat răspunde la $x_1[n]$ *cu* $y_1[n] = 5x_1[n] + x_1[n-1] - 2jnx_1[n]$ *şi la* $x_2[n]$ *cu* $y_2[n] = 5x_2[n] + x_2[n-1] - 2jnx_2[n]$.
De aceea:

$$y[n] = 5(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) + \alpha x_1[n-1] + \beta x_2[n-1] -$$
$$-2jn(\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

Deci sistemul este liniar.

b) Pentru ca sistemul să fie invariant în timp ar trebui ca să răspundă la $x[n-n_0]$ *cu* $y[n-n_0]$. *Răspunsul la* $x[n-n_0]$ *este:*

$$O\{x[n-n_0]\} = 5x[n-n_0] + x[n-n_0-1] - 2jnx[n-n_0]$$

iar:

$$y[n-n_0] = 5x[n-n_0] + x[n-n_0-1] - 2j(n-n_0)x[n-n_0]$$

Dar $n - n_0 \neq n$ *şi deci* $y[n-n_0] \neq O\{x[n-n_0]\}$
Sistemul este variant în timp.

c) $x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = 5\delta[n] + \delta[n-1] - 2jn\delta[n] = 5\delta[n] + \delta[n-1]$

6. TRANSFORMAREA LAPLACE 335
6.1 Răspunsul unui sistem liniar şi invariant în timp la o exponenţială complexă cu exponent complex 335
6.2 Transformarea Laplace bilaterală 336
6.2.1 Proprietăţile domeniului de convergenţă al transformatei Laplace bilaterale 339
6.2.2 Transformarea Laplace inversă 342
6.2.3 Definirea transformatei Laplace bilaterale prin constelaţia de poli şi zerouri 345
6.3 Transformarea Laplace unilaterală 346
6.3.1 Relaţia dintre transformata Laplace bilaterală şi transformata Laplace unilaterală 347
6.4 Transformarea Laplace a distribuţiilor 348
6.5 Proprietăţi ale celor două tipuri de transformate Laplace 349
6.6 Studiul sistemelor liniare şi invariante în timp prin intermediul transformării Laplace 355
6.6.1 Funcţia de sistem a unui sistem liniar şi invariant în timp 355
6.6.2 Determinarea răspunsului unui sistem liniar şi invariant în timp utilizând transformarea Laplace 357
6.6.3 Sisteme liniare şi invariante în timp caracterizate prin ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi 360
Tabelul 6.1 Proprietăţile transformării Laplace 371
Tabelul 6.2 Perechi semnal-transformată Laplace 372

6. TRANSFORMAREA LAPLACE

6.1 Răspunsul unui sistem liniar şi invariant în timp la o exponenţială complexă cu exponent complex

Vom utiliza pe parcursul capitolului pentru variabila complexă, notaţia:

$$s = \sigma + j\omega \quad \sigma \in \mathbb{R} \;,\; \omega \in \mathbb{R} \;. \tag{6.1}$$

În lucrările de limbă franceză, variabila complexă este notată şi cu p. Semnalul exponenţială complexă, cu exponent complex:

$$x(t) = e^{s_o t} = e^{\sigma_o t} e^{j\omega_o t} \;, \tag{6.2}$$

se aplică la intrarea unui SLIT caracterizat prin răspunsul la impuls h(t). La ieşirea sistemului se obţine semnalul $y(t) = h(t) * x(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{(\sigma_o + j\omega_o)(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= e^{(\sigma_o + j\omega_o)t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-(\sigma_o + j\omega_o)\tau}\, d\tau = e^{s_o t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \Big|_{s=s_o} \;.$$

În ipoteza că este convergentă, se notează cu H(s) integrala:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-\sigma\tau}\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \;. \tag{6.3}$$

Ea depinde numai de răspunsul la impuls h(τ) al sistemului şi, în anumite condiţii, caracterizează complet SLIT. Răspunsul y(t) al SLIT se poate scrie sub forma:

$$y(t) = e^{s_o t} H(s_o) = x(t) \cdot H(s_o) \;, \tag{6.4}$$

care ne arată că $e^{s_o t}$ este o funcţie proprie a sistemului liniar şi invariant în timp, iar $H(s_o)$ este valoarea proprie asociată ei.

Dacă semnalul de intrare este o combinaţie liniară de forma:

$$x(t) = \sum_k c_k e^{s_k t} \quad , \tag{6.5}$$

operatorul S care modelează sistemul fiind liniar, răspunsul y(t) este calculabil cu relaţia:

$$y(t) = \sum_k c_k H(s_k) e^{s_k t} \quad . \tag{6.6}$$

Cele expuse arată că nu numai exponenţialele complexe cu exponent pur imaginar, de forma $e^{j\omega_o t}$ ci şi exponenţialele complexe $e^{\sigma_o t} e^{j\omega_o t}$ sunt funcţii proprii ale unui SLIT . Se poate vedea că o funcţie H(s) definită prin expresia (6.3) permite calculul răspunsului unui SLIT la care semnalul de intrare poate fi pus sub forma (6.5).

6.2 Transformarea Laplace bilaterală

Prin definiţie transformata Laplace bilaterală a unui semnal x(t) este:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{X}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \; ; \; s = \sigma + j\omega \; ; \; \sigma, \omega \in \mathbb{R} \tag{6.7}$$

Există o legătură uşor de stabilit între transformarea definită prin relaţia (6.7) şi transformarea Fourier. Explicitând pe s, relaţia se poate pune sub forma:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)\, e^{-\sigma t}\right] e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\left\{x(t)\, e^{-\sigma t}\right\}(\omega) \tag{6.8}$$

Transformata Laplace bilaterală a unui semnal x(t) este transformata Fourier a semnalului $x(t)e^{-\sigma t}$. Factorul $e^{-\sigma t}$, pentru $\sigma > 0$ şi funcţia x(t) cu creştere temperată conduc la obţinerea unei funcţii produs cu descreştere rapidă. Transformata Laplace bilaterală poate exista deci, şi dacă transformata Fourier nu există. Dacă însă $\sigma < 0$, factorul $e^{-\sigma t}$ poate conduce la inexistenţa transformatei Laplace bilaterale.

Din cele afirmate, rezultă că transformarea Laplace nu este întotdeauna convergentă, pentru toate valorile variabilei complexe s. Bineînţeles că transformarea poate fi folosită doar în cazurile în care integrala care o defineşte este convergentă. Mulţimea valorilor lui s pentru care integrala din relaţia (6.7) este convergentă se numeşte regiune de convergenţă a acestei transformate Laplace. De câte ori se specifică expresia unei transformate Laplace este necesară şi specificarea regiunii de

convergenţă corespunzătoare.

Vom mai remarca faptul că, punând în relaţia (6.8) σ = 0 se obţine:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(j\omega) = \mathcal{X}(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = X(\omega) \quad . \tag{6.9}$$

Transformata Laplace bilaterală evaluată pe axa imaginară jω (σ = 0), este egală cu transformata Fourier a aceluiaşi semnal.

De multe ori, în loc de a scrie $\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{X}(s)$, se scrie (din raţiuni tipografice şi de comoditate) $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ şi, prin urmare $\mathcal{L}\{x(t)\}(j\omega) = X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Acesta este motivul pentru care în multe lucrări transformata Fourier apare notată cu X(jω) şi nu cu X(ω) aşa cum s-a notat în cursul de faţă. Notaţia X(jω) indică proveniența transformatei din transformarea Laplace bilaterală şi are avantajul că înlocuind gruparea jω cu s, jω —> s , transformata Fourier dă imediat expresia transformatei Laplace bilaterale. Pe de altă parte, definind mai întâi transformata Fourier, este lipsit de logică ca şi în locul argumentului ω să introducem un argument de forma jω , iar avantajul citat mai înainte nu este întrutotul adevărat întrucât multe transformate Fourier sunt reale. Cea mai corectă notaţie ni se pare cea în care se notează cu două caractere tipografice distincte cele două transformate ale aceluiaşi semnal, $\mathcal{X}(s)$ şi X(ω) . Atunci $\mathcal{X}(j\omega) = X(\omega)$ este o relaţie clară. În cele ce urmează, vom nota cu X(s) transformata Laplace bilaterală, tolerând două notaţii pentru transformata Fourier şi anume X(ω) când este definită direct şi X(jω) când rezultă prin particularizarea transformatei Laplace bilaterale. Este, deci, evidentă echivalenţa:

$$X(s)\Big|_{s=j\omega} = X(j\omega) \equiv X(\omega) \quad . \tag{6.10}$$

<u>*Exemple:*</u>

*i) Consideră*m *semnalul cauzal* $x(t) = e^{-\omega_o t}\sigma(t)$. *Transformata sa Fourier există şi este:* $\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \dfrac{1}{\omega_o + j\omega}$.

Vom calcula, aplicând definiţia, transformata Laplace bilaterală a aceluiaşi semnal:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_o t} e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\omega_o+\sigma)t} e^{-j\omega t}\,dt \quad .$$

Integrala este convergentă numai pentru $\omega_o + \sigma > 0$ *, deci pentru* $\sigma > -\omega_o$ *, care se mai scrie şi* $Re\{s\} > -\omega_o$ *. Avem, deci:*

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{\sigma+\omega_o+j\omega} = \frac{1}{\omega_o+s} \quad ; \quad \sigma = \mathrm{Re}\{s\} > -\omega_o \quad . \qquad \textbf{(6.11)}$$

Se poate constata că, dacă $-\omega_o < 0$ *atunci dreapta* $\sigma = 0$ *, axa imaginară, este în domeniul de convergenţă al transformatei Laplace bilaterale şi:*

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(j\omega) = \frac{1}{\omega_o+j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) \quad , \quad \omega_o < 0 \quad .$$

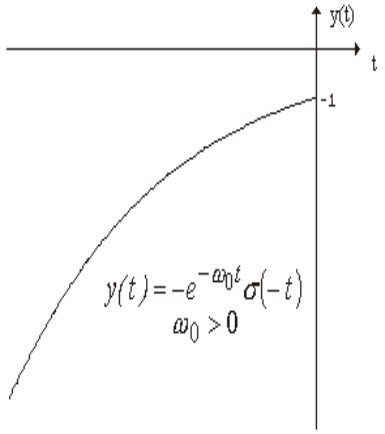


Fig. 6.1 Semnal anticauzal ce nu are transformată Fourier dar are transformată Laplace.

ii) Vom considera acum semnalul "anticauzal" din figura 6.1 , având expresia: $y(t) = -e^{-\omega_o t}\sigma(-t)$, $\omega_o > 0$. *El nu are transformată Fourier, integrala ce defineşte transformata sa fiind divergentă.*

Pentru acest semnal poate fi, însă, definită o transformată Laplace bilaterală:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\omega_o t}\sigma(-t)e^{-st}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{-(\omega_o+\sigma)t}e^{-j\omega t}dt \quad .$$

Pentru ca integrala să fie convergentă este necesar şi suficient să avem $\omega_o+\sigma<0$ *sau* $\sigma < -\omega_o$ *. În aceste condiţii:*

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \int_{\infty}^{0} e^{(\omega_o+\sigma)t}e^{j\omega t}dt = \left.\frac{e^{(\omega_o+\sigma)t}e^{j\omega t}}{\omega_o+\sigma+j\omega}\right|_{\infty}^{0} = \frac{1}{\omega_o+s} \quad , \; \sigma < -\omega_o \quad .$$

(6.12)

Analizând expresiile (6.11) şi (6.12) se observă că $1/(\omega_o+s)$ este transformata Laplace bilaterală a două semnale complet distincte, unul cauzal x(t), şi altul anticauzal y(t). Ceea ce rezultă din acest exemplu simplu este importanţa specificării domeniului de convergenţă odată cu expresia transformatei Laplace bilaterale. Primul semnal are transformata $X(s) = 1/(\omega_o+s)$ convergentă pentru $\mathrm{Re}\{s\} > -\omega_o$. Al doilea semnal are transformata $Y(s) = 1/(\omega_o+s)$ convergentă însă pentru $\mathrm{Re}\{s\} > -\omega_o$. Cum axa imaginară nu este în domeniul de convergenţă al transformatei Y(s), nu există Y(jω), adică semnalul yt) nu are transformată Fourier.

6.2.1 Proprietăţile domeniului de convergenţă al transformatei Laplace bilaterale

După cum evidenţiază relaţia (6.8), dacă există transformata Fourier a funcţiei - semnalului - $x(t)e^{-\sigma_o t}$ atunci există şi transformata Laplace bilaterală a semnalului x(t) pentru $s = \sigma_o + j\omega$, $\forall\omega$:

$$|X(\sigma_o + j\omega)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma_o t} |e^{-j\omega t}|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma_o t} dt < \infty \quad .$$

Se poate deci, enunţa proprietatea:

1. **Domeniul de convergenţă al transformatei Laplace bilaterale, dacă există, este format din benzi ale planului s paralele cu axa imaginară jω.**

Condiţia de convergenţă a integralei (6.7) se exprimă prin $|X(s)| < \infty$. Prin urmare polii lui X(s) , în care X(s) —> ∞ nu pot fi în domeniul de convergenţă. Rezultă:

2. **Domeniul de convergenţă al transformatei Laplace bilaterale nu poate conţine nici un pol al acesteia.**

Dacă semnalul x(t) este de durată finită şi σ_o este o valoare care asigură convergenţa integralei (6.7), atunci $|X(s_o)| < \infty$. Fie acum $\sigma = \sigma_o + \Delta\sigma$, M valoarea maximă a exponenţialei $e^{-\Delta\sigma t}$ pe intervalul $[t_1, t_2]$. Avem:

$$|X(s)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-\sigma_o t} e^{-\Delta\sigma t} e^{-j\omega t} dt \right| \le M \left| \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-\sigma_o t} e^{-j\omega t} dt \right| = M\, |X(s_o)| < \infty \quad \forall \Delta\sigma \in \mathbb{R} \quad ,$$

şi deci:

3. **Dacă x(t) are durată finită şi dacă există cel puţin o valoare s_o din planul variabilei complexe pentru care transformata Laplace bilaterală converge, atunci domeniul de convergenţă este întreg planul complex.**

Semnalul din figura 6.2 are suportul nemărginit spre dreapta. Se spune că este un semnal cu "întindere spre dreapta". Un astfel de semnal poate fi transformat într-un semnal cauzal printr-o simplă translaţie în timp. Pentru semnalul din figura 6.2, $x(t-T_1)$ este cauzal.

Presupunem că $\exists s_o$, $s_o = \sigma_o + j\omega$, astfel încât $X(s_o)$ să fie convergentă: $|X(s_o)| < \infty$. În punctele s având $\sigma = \sigma_o + \Delta\sigma$, cu $\Delta\sigma > 0$, avem inegalitatea:

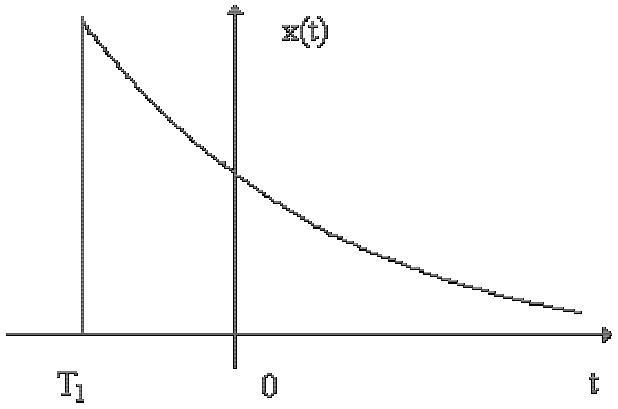


Fig. 6.2 Semnal de durată infinită cu suportul nemărginit la dreapta.

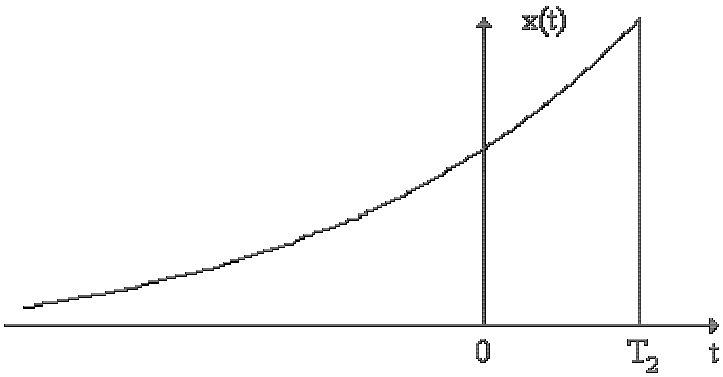
$$|X(s)| = \left|\int_{T_1}^{\infty} x(t)e^{-\sigma_o t}e^{-\Delta\sigma t}e^{-j\omega t}dt\right| \le$$

$$\le \left|e^{-\Delta\sigma T_1}\cdot\int_{T_1}^{\infty} x(t)e^{-\sigma_o t}e^{-j\omega t}dt\right| =$$

$$= e^{-\Delta\sigma T_1}\cdot|X(s_o)| < \infty \ .$$

Rezultă:

4. **<u>Dacă x(t) este un semnal cu întindere spre dreapta şi dacă dreapta de ecuaţie Re{s} =σ_o este în domeniul de convergenţă, atunci toate punctele s din planul complex ce satisfac Re{s}$\ge\sigma_o$ sunt în domeniul de convergenţă. Semnalele cu întindere spre dreapta au domeniul de convergenţă al transformatei Laplace bilaterale cu întindere spre dreapta.</u>**



Semnalul din figura 6.3 are suportul nemărginit spre stânga, numindu-se şi semnal cu "întindere spre stânga". El poate fi transformat într-un semnal anticauzal printr-o translaţie în timp. Dacă în $s_o = \sigma_o+j\omega$, funcţia $X(s_o)$ există, deci $|X(s_o)| < \infty$, atunci se poate demonstra ca şi în cazul anterior că X(s) există pentru puncte s având: $\sigma \le \sigma_o$.

Fig. 6.3 Semnal de durată infinită cu suportul nemărginit la stânga.

5. **<u>Dacă x(t) este un semnal cu întindere spre stânga şi dacă dreapta de ecuaţie Re{s} = σ_o este în domeniul de convergenţă, atunci toate punctele s din planul complex ce satisfac Re{s} $\le \sigma_o$ sunt în domeniul de convergenţă al transformatei Laplace bilaterale cu întindere spre stânga.</u>**

Vom considera acum cazul cel mai general, al unui semnal cu suportul nemărginit, confundat cu axa reală. Un astfel de semnal poate fi scris ca o sumă de două semnale, unul cauzal şi altul anticauzal:

$$x(t) = x_+(t) + x_-(t) \;;\; x_+(t) = x(t)\sigma(t) \;,\; x_-(t) = x(t)\sigma(-t) \;.$$

Semnalul $x_+(t)$ este de tipul cu întindere spre dreapta. Dacă $\mathcal{L}\{x_+(t)\}(s_1)$ există, atunci transformata respectivă există, conform proprietăţii 4 pentru $\forall s$ având $\mathrm{Re}\{s\} \geq \mathrm{Re}\{s_1\}$.

Semnalul $x_-(t)$ este de tipul cu întindere spre stânga. Dacă $\mathcal{L}\{x_-(t)\}(s_2)$ există, atunci transformata respectivă există, conform proprietăţii 5 pentru $\forall s$ având $\mathrm{Re}\{s\} \leq \mathrm{Re}\{s_2\}$.

Nu este dificil de observat că operatorul definit de relaţia (6.7) este liniar şi, prin urmare $\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x_+(t)\} + \mathcal{L}\{x_-(t)\}$. O condiţie suficientă de existenţă a transformatei $\mathcal{L}\{x(t)\}$ este existenţa celor două transformate. Dacă $\mathrm{Re}\{s_1\} < \mathrm{Re}\{s_2\}$, atunci cu siguranţă că pentru valorile lui s pentru care: $\mathrm{Re}\{s_1\} \leq \mathrm{Re}\{s\} \leq \mathrm{Re}\{s_2\}$, este asigurată convergenţa transformatei Laplace bilaterale a semnalului x(t). Se poate enunţa proprietatea:

6. **<u>Dacă suportul semnalului x(t) este toată axa reală şi dacă dreapta de ecuaţie $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_o$ este în domeniul de convergenţă al transformatei Laplace bilaterale, atunci domeniul de convergenţă al acesteia este o bandă paralelă cu axa imaginară, conţinând dreapta $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_o$.</u>**

<u>Exemple:</u>

1) Semnalul de durată finită $x(t) = e^{-\omega_o t}[\sigma(t) - \sigma(-t)]$ *are transformata Laplace bilaterală:*

$$X(s) = \int_0^T e^{-(s+\omega_o)t}\,dt = \frac{1 - e^{-(s+\omega_o)T}}{s + \omega_o} \quad .$$

Zerourile transformatei sunt $s_{zk} = -\omega_o + j(2k\pi/T)$, $k \in Z$. *Transformata are un singur pol* $s_p = -\omega_o$, *compensat însă de zeroul* $k = 0$, $s_{zo} = -\omega_o$. *Prin urmare X(s) are ca domeniu de convergenţă tot planul complex.*

2) Semnalul de durată infinită, cu suportul confundat cu axa reală $x(t) = e^{-\omega_o |t|}$, $\omega_o > 0$, *se poate scrie sub forma:* $x(t) = e^{-\omega_o t}\sigma(t) + e^{\omega_o t}\sigma(-t)$, *egalitatea fiind valabilă aproape peste tot (cu excepţia punctului* $t = 0$ *).*

Semnalul cu întindere spre dreapta are transformata Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{e^{-\omega_o t}\sigma(t)\right\} = \frac{1}{s + \omega_o} \quad , \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\omega_o \quad ,$$

iar semnalul cu întindere spre stânga:

$$\mathcal{L}\{e^{\omega_o t}\sigma(-t)\} = -\frac{1}{s-\omega_o} \quad , \quad \mathrm{Re}\{s\} < \omega_o \quad .$$

*În consecin*ţă*:*

$$\mathcal{L}\{e^{-\omega_o|t|}\} = \frac{1}{s+\omega_o} - \frac{1}{s-\omega_o} = \frac{-2\omega_o}{s^2-\omega_o^2} \quad ; \quad -\omega_o < \mathrm{Re}\{s\} < \omega_o \quad .$$

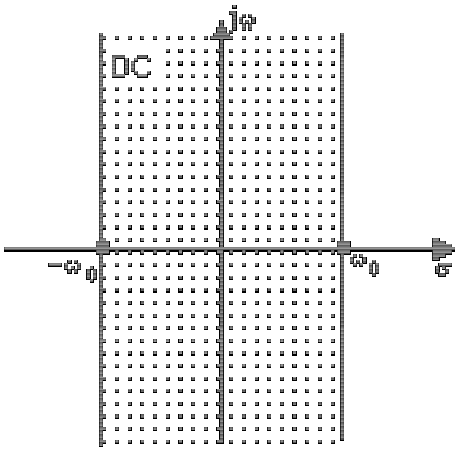


Fig. 6.4 Domeniul de convergenţă pentru transformata semnalului $\exp(-\omega_o|t|)$.

*Domeniul de convergen*ţă *al transformatei semnalului este intersec*ţia *celor dou*ă *domenii de convergen*ţă *ale componentelor cauzal*ă şi *anticauzal*ă*.*

*Domeniul de convergen*ţă *DC este prezentat în figura 6.4. Deoarece axa imaginar*ă *s = j*ω *se afl*ă *în DC, exist*ă *transformat*ă *Fourier. Ea rezult*ă *punând* σ *= 0 în transformata Laplace bilateral*ă*. Se ob*ţine*:*

$$\mathcal{F}\{e^{-\omega_o|t|}\} = \frac{-2\omega_o}{(j\omega)^2-\omega_o^2} = \frac{2\omega_o}{\omega^2+\omega_o^2} \quad .$$

*Men*ţion*ăm c*ă *pentru* $\omega_o < 0$ *cele dou*ă *domenii* $Re\{s\} > -\omega_o$ *şi* $Re\{s\} < \omega_o$ *au intersec*ţia *vid*ă*. În consecin*ţă *nu exist*ă*, pentru nici o valoare complex*ă *s, transformata Laplace bilateral*ă*.*

6.2.2 Transformarea Laplace inversă

Aşa cum s-a arătat prin relaţia (6.8), transformarea Laplace bilaterală directă este o transformare Fourier directă aplicată semnalului $x(t)e^{-\sigma t}$, σ fixat, deci pe o paralelă la axa jω.

Dar semnalul $x(t)e^{-\sigma t}$, σ fixat, poate fi recuperat prin transformarea Fourier inversă:

$$x(t)\,e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma+j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad . \qquad \textbf{(6.13)}$$

Cum σ este constant în raport cu ω (deşi poate fi modificat evident şi σ), ds=d(σ+jω)= jdω , integrala (6.13) efectuându-se pe o paralelă dusă în planul s la axa jω,

$$x(t)\,e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\,e^{j\omega t}\,ds \quad .$$

Deoarece integrarea se efectuează considerând σ fixat, se înmulţeşte relaţia obţinută cu $e^{\sigma t} \neq 0$ şi se introduce factorul sub semnul integralei. Se obţine relaţia ce defineşte transformarea inversă transformării Laplace directe:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\,e^{st}\,ds = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) \quad , \quad \sigma \in \mathrm{DC} \quad . \qquad \textbf{(6.14)}$$

Integrarea se efectuează pe o paralelă la axa imaginară conţinută în domeniul de convergenţă. Acest fapt este exprimat în relaţia (6.14) în mod simbolic prin $\sigma \in \mathrm{DC}$.

Se spune că relaţiile (6.7) şi (6.14) definesc o pereche Laplace (bilaterală) şi se scrie:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad \textbf{(6.15)}$$

simbolul $\mathcal{L}$ lipsind în majoritatea cazurilor.

Calculul transformatei directe şi inverse se face în electronică pe baza tabelelor şi numai în cazuri cu totul particulare prin metodele studiate la cursurile de matematică.

Pentru determinarea transformării inverse, în măsura în care avem de inversat fracţii raţionale, se procedează la descompunerea în fracţii simple şi la căutarea funcţiilor temporale în tabele.

Exemple:

1. Se cere să se inverseze funcţia X(s) = 1/(s+2)(s+3) . Dacă nu este precizat domeniul de convergenţă, problema este nedeterminată, având trei soluţii posibile.

În DC nu poate intra nici un pol. Se exclud, aşa cum se arată în figura 6.5 dreptele $\sigma = -2$ *şi* $\sigma = -3$ *. Se descompune X(s) în fracţii simple:*

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \quad . \qquad \textbf{(6.16)}$$

i) Dacă domeniul de convergenţă este **1** *,* $\sigma > -2$ *, atunci fiecare termen al relaţiei (6.16) va fi inversat într-un semnal cauzal:*

$$\sigma > -2 : \frac{1}{s+2} \longrightarrow e^{-2t}\sigma(t) \quad ; \quad \sigma > -3 : \frac{1}{s+3} \longrightarrow e^{-3t}\sigma(t) \quad .$$

Rezultă:

$$\sigma > -2 : \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \longrightarrow (e^{-2t} - e^{-3t})\sigma(t) \quad . \tag{6.17}$$

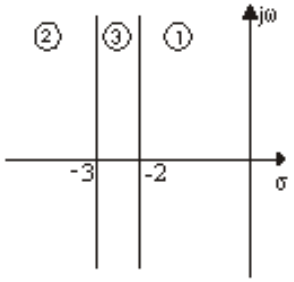


Fig. 6.5 Cele trei domenii de convergenţă posibile pentru X(s)=1/[(s+2)(s+3)].

ii) Dacă domeniul de convergenţă este **2** *,* $\sigma < -3$*, fiecare termen al relaţiei (6.16) se inversează prin câte un semnal anticauzal:*

$$\sigma < -2 : \frac{1}{s+2} \longrightarrow -e^{-2t}\sigma(-t) \; ;$$

$$\sigma < -3 : \frac{1}{s+3} \longrightarrow -e^{-3t}\sigma(-t) \quad ,$$

şi deci:

$$\sigma < -3 : \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \longrightarrow (-e^{-2t} + e^{-3t})\sigma(-t) \quad . \tag{6.18}$$

iii) Ultimul domeniu de convergenţă este **3** *,* $-3 < \sigma < -2$ *:*

semnal anticauzal: $\sigma < -2 : \frac{1}{s+2} \longrightarrow -e^{-2t}\sigma(-t)$ *;*

semnal cauzal: $\sigma > -3 : \frac{1}{s+3} \longrightarrow e^{-3t}\sigma(t)$ *;*

$$-3 < \sigma < -2 \; : \; \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \longrightarrow -e^{-2t}\sigma(-t) - e^{-3t}\sigma(t) \tag{6.19}$$

Aceiaşi transformată Laplace bilaterală, (6.16) poate fi inversată în trei moduri distincte, după cum este ales domeniul de convergenţă. Numai în cazul i) $j\omega \subset$ DC şi, prin urmare, numai pentru semnalul (6.17) există transformată Fourier. Semnalele (6.18) şi (6.19) deşi au transformate Laplace bilaterale, nu au transformate Fourier, axa imaginară nefiind inclusă în DC.

6.2.3 Definirea transformatei Laplace bilaterale prin constelaţia de poli şi zerouri

Dacă transformata Laplace bilaterală este o fracţie raţională, de forma:

$$X(s) = K\frac{\prod_{k=1}^{M}(s-s_{ok})}{\prod_{k=1}^{N}(s-s_{pk})} \quad , \qquad \textbf{(6.20)}$$

se vede imediat că este suficientă cunoaşterea polilor s_{pk} şi a zerourilor s_{zk} pentru a cunoaşte, cu rezerva unei constante multiplicative K, pe X(s) . Dacă, în plus, se cunoaşte şi valoarea transformatei X(s) într-un punct $s_o \in$ DC poate fi determinată şi constanta K.

Polii şi zerourile pot fi daţi prin valorile lor complexe sau printr-o diagramă a "constelaţiei" de poli şi zerouri, CPZ. Simbolul de marcare al unui pol este o cruciuliţă de tipul "x". Simbolul de marcare al unui zero este un cerculeţ: ○ . În figura 6.6 se dă un exemplu de reprezentare a unei CPZ pentru o transformată Laplace bilaterală, X(s) . Expresia ei, conform valorilor înscrise în diagramă este:

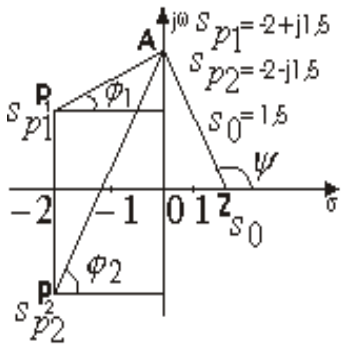


Fig. 6.6 Constelaţia de poli şi zerouri a unei transformate Laplace.

$$X(s) = K\frac{s-1{,}5}{(s+2-j1{,}5)(s+2+j1{,}5)}$$

$$X(s) = K\frac{s-1{,}5}{s^2+4s+6{,}25}$$

Dacă se specifică faptul că x(t) , semnalul temporal, este cauzal, atunci DC este σ > -2 , verticala ce trece prin poli.

Axa jω este inclusă în DC şi, prin urmare, există şi transformata Fourier a semnalului. Ea este:

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) = \left.\frac{s-s_o}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})}\right|_{s=j\omega} = \frac{j\omega-s_o}{(j\omega-s_{p1})(j\omega-s_{p2})} \; .$$

Dar jω-s_o este segmentul orientat $\overline{ZA}$, astfel că $j\omega - s_o = |\overline{ZA}|e^{j\psi}$. La fel $j\omega - s_{p1} = |\overline{P_1A}|e^{j\varphi_1}$ şi $j\omega - s_{p2} = |\overline{P_2A}|e^{j\varphi_2}$. În consecinţă:

$$X(j\omega) = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{P_1A}|\cdot|\overline{P_2A}|}e^{j(\psi-\varphi_1-\varphi_2)} \quad ,$$

de unde:

$$|X(j\omega)| = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{P_1A}| \cdot |\overline{P_2A}|} \quad ; \quad \mathrm{Arg}\, X(j\omega) = \Psi(\omega) = \psi - \varphi_1 - \varphi_2 \quad .$$

În general, fixând o frecvenţă, deci un punct A pe axa imaginară, se uneşte acel punct cu toate zerourile s_{ok} şi cu toţi polii s_{pk} . Se obţin segmentele de lungimi $|\overline{Z_kA}|$, respectiv $|\overline{P_kA}|$, precum şi unghiurile ψ_k , respectiv φ_k . Modulul şi faza transformatei Fourier se calculează cu relaţiile:

$$\omega)| = |K| \frac{\prod_{k=1}^{M} |\overline{Z_kA}|}{\prod_{k=1}^{N} |\overline{P_kA}|} \quad ; \quad \Psi(\omega) = \mathrm{Arg}\, K + \sum_{k=1}^{M} \psi_k - \sum_{k=1}^{N} (\qquad \textbf{(6.21)}$$

6.3 Transformarea Laplace unilaterală

Studiul sistemelor cauzale ce nu sunt iniţial în starea de repaus (nu au condiţii iniţiale nule) se face utilizând transformarea definită prin relaţia:

$$\mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) = \int_{0+}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \quad . \qquad \textbf{(6.22)}$$

Funcţiile (semnalele) complexe care satisfac condiţiile:

i) sunt cauzale $x(t)\cdot\sigma(t) = x(t)$;
ii) sunt continue cu excepţia eventual a unei mulţimi numărabile de puncte în care au discontinuităţi de speţa întâi;
iii) satisfac condiţia $|x(t)| \le Me^{-\sigma_o t}$, $M > 0$, $\sigma_o \ge 0$,

se numesc funcţii original iar σ_o este denumit indice de creştere a funcţiei.

Transformata Laplace unilaterală (6.22) a unei funcţii original există şi este olomorfă (analitică) în semiplanul $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_o$.

Transformarea inversă este definită de:

$$(t) = \mathcal{L}_u^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds \quad , \quad \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_o \qquad \textbf{(6.23)}$$

Se spune că relaţiile (6.22) şi (6.23) definesc o pereche Laplace unilaterală şi se scrie:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad \textbf{(6.24)}$$

6.3.1 Relaţia dintre transformata Laplace bilaterală şi transformata Laplace unilaterală

Pentru cazul semnalelor cauzale, între cele două transformate nu există diferenţe. Fie x(t) = x(t)σ(t) şi aplicăm acestei funcţii transformarea bilaterală (6.7) Rezultă:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sigma(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}_u\{x(t)\} .$$

Fie acum un semnal cu suportul plasat şi în domeniul t < 0 :

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} x(t)e^{-st}dt + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt .$$

În primul termen se pune t —> -t şi se obţine:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} x(-t)e^{-(-st)}dt + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt .$$

sau:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}_u\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}_u\{x(-t)\}(-s) . \qquad \textbf{(6.25)}$$

Transformata Laplace bilaterală este suma dintre transformata Laplace unilaterală a semnalului şi transformata Laplace unilaterală reflectată (-s) a semnalului reflectat (-t) .

Vom observa că în cazul transformării unilaterale, specificarea domeniului de convergenţă nu este necesară. Transformata unilaterală se referă numai la partea din dreapta originii a oricărui semnal şi, deci, domeniul de convergenţă va fi un semiplan delimitat de o dreaptă paralelă cu axa imaginară, ce trece prin polul plasat în extrema dreaptă, întinzându-se spre dreapta.

6.4 Transformarea Laplace a distribuţiilor

Transformata Laplace a unei distribuţii f ∈ S' poate fi definită utilizând transformata ei Fourier:

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{F}\{e^{-\sigma t} f\} \quad . \tag{6.26}$$

Dacă f ∈ D' , şi dacă produsul $fe^{-\sigma t} \in S'$, deci este o distribuţie temperată, se defineşte transformata Laplace a ei prin:

$$\mathcal{L}\{f\} = \langle f , e^{-st} \rangle \quad . \tag{6.26'}$$

Pentru o distribuţie g ∈ D'_+ , nulă în deschisul (-∞ , 0) , dacă $ge^{-\sigma t} \in S'_+$, transformata Laplace unilaterală are o definiţie similară:

$$\mathcal{L}\{g\} = \langle g , e^{-st} \rangle \quad . \tag{6.26''}$$

Sunt interesante pentru studiul semnalelor şi sistemelor, transformatele distribuţiilor Dirac δ(t) şi treapta unitară σ(t) .

Pentru distribuţia Dirac δ(t) se aplică definiţia sub forma:

$$\mathcal{L}\{\delta\} = \mathcal{F}\{\delta(t) e^{-\sigma t}\} \quad .$$

Pentru ∀σ ∈ ℝ , $e^{-\sigma t}\delta(t) = e^0\delta(t) = \delta(t)$ şi, deci:

$$\mathcal{L}\{\delta\} = \mathcal{F}\{\delta\} = 1 \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad . \tag{6.27}$$

Considerând distribuţia Dirac deplasată, $\delta(t-t_o)$ rezultă:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\{\delta(t-t_o)\} = \mathcal{F}\{\delta(t-t_o)\, e^{-\sigma t}\} = \mathcal{F}\{e^{-\sigma t_o}\delta(t-t_o)\} = \\ &= e^{-\sigma t_o}\mathcal{F}\{\delta(t-t_o)\} = e^{-\sigma t_o} e^{-j\omega t_o} = e^{-st_o} \quad , \quad \forall\, s \in \mathbb{C} \quad . \end{aligned} \tag{6.28}$$

Pentru treapta unitară σ(t) se poate aplica direct definiţia (6.7) :

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dt \quad .$$

Integrala este convergentă numai dacă Re{s} > 0 , caz în care:

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s} \quad , \quad Re\{s\} > 0 \quad . \tag{6.29}$$

Dacă treapta unitară este reflectată x(t) = σ(-t) , atunci:

$$\mathcal{L}\{\sigma(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\sigma(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0}e^{-st}dt = -\frac{1}{s} \quad Re\{s\} < 0 \quad .$$

şi, deci:

$$\mathcal{L}\{-\sigma(-t)\} = \frac{1}{s} \quad , \quad Re\{s\} < 0 \quad . \qquad \textbf{(6.30)}$$

Vom încheia, subliniind că:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_u\{\delta\} = \mathcal{L}\{\delta\} = 1 \\ &\mathcal{L}_u\{\sigma(t)\} = \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s} \\ &\mathcal{L}_u\{-\sigma(-t)\} = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(6.31)}$$

6.5 Proprietăţi ale celor două tipuri de transformate Laplace

Se notează:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \quad s \in DC_x \quad ; \quad x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$

$$y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s) \quad s \in DC_y \quad ; \quad y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s) \quad .$$

1. **<u>Liniaritatea</u>** Analizând relaţiile de definiţie, rezultă imediat că:

$$\begin{aligned} &a\,x(t)+b\,y(t) \longleftrightarrow a\,X(s)+b\,Y(s) \quad s \in DC_x \cap DC_y \quad cel\ putin \\ &a\,x(t)+b\,y(t) \longleftrightarrow a\,X_u(s)+b\,Y_u(s) \quad . \end{aligned} \qquad \textbf{(6.32)}$$

Menţiunea "***cel puţin***" la transformarea unilaterală se datorează faptului că în sumă anumiţi poli pot dispare ca urmare a simplificării cu zerouri, apărute ca efect al însumării.

2. **<u>Translaţia în timp</u>** Pentru $x(t-t_o)$ avem:

$$\mathcal{L}\{x(t-t_o)\} = \int_{-\infty}^{\infty}x(t-t_o)\,e^{-st}dt = e^{-st_o}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau = e^{-st_o}X(s) \quad .$$

Cum polii lui X(s) nu se modifică ca urmare a multiplicării cu e^{-st_o} , domeniul de convergenţă rămâne cel al transformatei X(s):

$$x(t-t_o) \longleftrightarrow e^{-st_o}X(s) \quad s \in \mathrm{DC_x} \quad , \quad \forall\ t_o \quad . \tag{6.33'}$$

Considerăm transformarea unilaterală aplicată numai pentru translaţii cu $t_o > 0$:

$$\mathcal{L}_u\{x(t-t_o)\} = \int_0^\infty x(t-t_o)\,e^{-st}\,dt = \int_{-t_o}^{0} x(\tau)\,e^{-s(\tau+t_o)}\,d\tau + \int_0^\infty x(\tau)\,e^{-s(\tau+t_o)}\,d\tau \quad .$$

Dar $x(\tau) \equiv 0$ pentru $\tau < 0$, semnalul fiind considerat cauzal (vezi cele trei condiţii impuse originalului). În consecinţă, prima integrală este nulă şi, prin urmare:

$$x(t-t_o) \longleftrightarrow e^{-st_o}X_u(s) \quad , \quad t_o > 0 \quad . \tag{6.33''}$$

Această a doua relaţie este cunoscută şi sub denumirea de "teorema întârzierii", ca urmare a faptului că $t_o > 0$.

3. **<u>Modularea în timp</u>** Se caută transformata pentru $e^{st_o}x(t)$:

$$\mathcal{L}\{e^{s_o t}x(t)\} = \int_0^\infty x(t)\,e^{st_o}e^{-st}\,dt = X(s-s_o) \quad .$$

Modularea în timp este prin urmare echivalentă cu o deplasare în domeniul s. Această deplasare conduce la deplasarea cu $\sigma_o = \mathrm{Re}\{s_o\}$ a domeniului de convergenţă. Dacă $\sigma_o > 0$, domeniul se deplasează spre dreapta cu σ_o , iar dacă $\sigma_o < 0$, domeniul se deplasează spre stânga. S-a obţinut o teoremă de deplasare în domeniul s:

$$e^{s_o t}x(t) \longleftrightarrow X(s-s_o) \quad s \in DC \ \ deplasat \ \ cu \ \ \sigma_o \quad . \tag{6.34'}$$

În cazul transformării unilaterale relaţia rămâne valabilă. Domeniul de convergenţă este şi el modificat prin deplasare.

$$e^{s_o t}x(t) \longleftrightarrow X_u(s-s_o) \quad . \tag{6.34''}$$

4. **<u>Scalarea variabilei timp</u>** Fie x(at) , $a \in \mathbb{R}^*$. Transformata bilaterală este:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-\frac{s}{a}\tau}\, d\tau = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad .$$

Domeniul de convergenţă este şi el scalat. Fie DC' domeniul de convergenţă al transformatei X(s/a) şi DC domeniul de convergenţă al transformatei X(s). Atunci s $\in$ DC' dacă (s/a) $\in$ DC:

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad , \quad a \in \mathbb{R}^* \quad , \quad \frac{s}{a} \in DC \quad . \qquad \textbf{(6.35')}$$

Pentru transformata unilaterală:

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a} X_u\left(\frac{s}{a}\right) \quad , \quad a > 0 \quad , \qquad \textbf{(6.35'')}$$

domeniul de convergenţă fiind afectat spre stânga.

5. **Teorema convoluţiei**

$$\mathcal{L}\{ x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau\right] e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt\, d\tau = X(s)\, Y(s) \quad .$$

Similar:

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(s)\, Y(s) \quad s \in \mathrm{DC}_x \cap DC_y \quad cel\ putin \quad . \qquad \textbf{(6.36')}$$

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X_u(s)\, Y_u(s) \quad . \qquad \textbf{(6.36'')}$$

6. **Derivarea în timp** Se pleacă de la relaţia de transformare inversă (6.14), care se derivează în funcţie de t care apare ca parametru în integrală:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} X(s) \frac{d}{dt} e^{st}\, ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} s\, X(s)\, e^{st}\, ds \quad .$$

Înmulţirea cu s poate compensa un eventual pol din origine al lui X(s), aşa că domeniul de convergenţă al lui sX(s) este cel puţin domeniul lui X(s) :

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) \quad s \in DC \quad cel\ putin \quad . \qquad \textbf{(6.37')}$$

Considerăm cazul transformării unilaterale:

$$\mathcal{L}_u\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\,dt = x(t)\,e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty} + s\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\,dt \quad .$$

Dar $\left|e^{-st}\right| \longrightarrow 0$ când $t \longrightarrow \infty$ şi, prin urmare:

$$\mathcal{L}_u\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX_u(s) - x(0^+) \quad ; \quad \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX_u(s) - x(0^+) \; .$$

(6.37'')

7. **<u>Derivarea în domeniul variabilei s</u>** Se derivează direct relaţia (6.7), s fiind parametru în integrală:

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{d}{ds} e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-tx(t)\right] e^{-st}\,dt \quad .$$

Rezultă deci:

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \quad s \in DC \quad . \qquad \textbf{(6.38')}$$

În mod asemănător se deduce că:

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{dX_u(s)}{ds} \quad . \qquad \textbf{(6.38'')}$$

8. **<u>Integrarea semnalului în domeniul timp</u>** Fie y(t) semnalul obţinut prin integrarea semnalului x(t).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) * \sigma(t) \quad .$$

Aplicând transformarea Laplace bilaterală şi ţinând seama de teorema convoluţiei se deduce:

$$Y(s) = X(s) \cdot \frac{1}{s} \quad .$$

Cum (1/s) are domeniul de convergenţă Re{s} > 0 rezultă:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \quad \longleftrightarrow \quad \frac{X(s)}{s} \quad s \in \mathrm{DC} \cap \left(\mathrm{Re}\{s\} > 0\right) \quad \textit{cel putin} \qquad \textbf{(6.39')}$$

O relaţie similară se stabileşte şi pentru transformarea unilaterală:

$$\int_{0^+}^{t} x(\tau)\,d\tau \quad \longleftrightarrow \quad \frac{X_u(s)}{s} \quad . \qquad \textbf{(6.39'')}$$

Dacă condiţiile iniţiale ale integralei nu sunt nule, în sensul că există un impuls în origine, atunci relaţia se corectează, devenind:

$$\int_{0^+}^{t} x(\tau)\,d\tau \quad \longleftrightarrow \quad \frac{X_u(s) + x^{(-1)}(0^+)}{s} \quad . \qquad \textbf{(6.39''')}$$

În această relaţie $x^{(-1)}(0^+)$ este valoarea integralei în origine.

9. **Teorema valorii iniţiale a unui semnal cauzal** Pentru semnalul cauzal $x(t)=x(t)\sigma(t)$, cele două transformate sunt identice $X(s) \equiv X_u(s)$. Vom considera că nu există impulsuri Dirac în origine. Semnalul x(t) poate fi dezvoltat în jurul originii pentru valori $t > 0$:

$$x(t) = \left[x(0^+) + \frac{t}{1!}x'(0^+) + \frac{t^2}{2!}x''(0^+) + \ldots + t^k\frac{}{k!}x^{(k)}(0^+) + \ldots\right]\sigma(t) \quad . \qquad \textbf{(6.40)}$$

Dar $\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \mathcal{L}_u\{\sigma(t)\} = (1/s)$. Aplicând teorema derivării în domeniul s rezultă că:

$$\mathcal{L}\left\{t\,\sigma(t)\right\} = \mathcal{L}_u\left\{t\,\sigma(t)\right\} = -\left(\frac{1}{s}\right)' = \frac{1}{s^2} \quad .$$

Prin inducţie completă se poate arăta valabilitatea relaţiei:

$$\mathcal{L}\left\{t^k\sigma(t)\right\} = \mathcal{L}_u\left\{t^k\sigma(t)\right\} = \frac{k!}{s^{k+1}} \quad . \qquad \textbf{(6.41)}$$

Aplicând oricare dintre operatorii Laplace relaţiei (6.40), şi ţinând seama de (6.41), se obţine o dezvoltare a lui X(s) în jurul originii:

$$X(s) = X_u(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(0^+)\,\frac{1}{s^{k+1}} \quad . \qquad \textbf{(6.42)}$$

Din această relaţie se deduce prin înmulţire cu s, expresia:

$$sX(s) = sX_u(s) = x(0^+) + \sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}(0^+)\frac{1}{s^k} \quad .$$

Trecând la limită pentru s —> ∞ , suma se anulează şi rămâne:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} sX_u(s) \quad , \qquad \textbf{(6.43)}$$

relaţie cunoscută sub denumirea de teorema valorii iniţiale a unui semnal cauzal.

Dacă valoarea iniţială $x(0^+)$ este nulă, multiplicând (6.42) cu s^2 şi trecând la limită pentru s —> ∞ se obţine:

$$x'(0^+) = \lim_{s\to\infty} s^2X(s) = \lim_{s\to\infty} s^2X_u(s) \quad , \quad daca\ x(0^+) = 0 \quad . \qquad \textbf{(6.44)}$$

Relaţia se poate extinde. Dacă $x(0^+) = x'(0^+) = ... = x^{(n-1)}(0^+) = 0$ atunci:

$$x^{(n)}(0^+) = \lim_{s\to\infty} s^{n+1}X(s) = \lim_{s\to\infty} s^{n+1}X_u(s) \ ; \ x^{(k)}(0^+) = 0 \ , \ 0 \le k \le n-1 \ .$$

(6.44')

10. **<u>Teorema valorii finale a unui semnal cauzal</u>** Semnalul x(t) fiind cauzal: x(t) = = x(t)σ(t) avem: $X(s) = X_u(s)$. Se ţine seama de teorema derivării în domeniul timp:

$$\int_{0^+}^{\infty} x'(t)\,e^{-st}\,dt = sX_u(s) - x(0^+) = sX(s) - x(0^+) \quad . \qquad \textbf{(6.45)}$$

Se trece la limită pentru s —> 0 . Cum s apare ca parametru în integrala din membrul stâng, rezultă:

$$\lim_{s\to 0}\int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st}dt = \int_{0^+}^{\infty} x'(t)\lim_{s\to 0}(e^{-st})\,dt = \int_{0^+}^{\infty} x'(t)\,dt = x(t)\Big|_{0^+}^{\infty} = x(\infty) - x(0^+) \quad ,$$

unde $x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t)$. Substituind rezultatul în (6.45), se obţine:

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX_u(s) = \lim_{s\to 0} sX(s) \quad , \qquad \textbf{(6.46)}$$

relaţie cunoscută sub denumirea de teorema valorii finale a unui semnal cauzal.

Una din concluziile importante ce se desprinde din studiul comparativ al proprietăţilor celor două tipuri de transformate Laplace este aceea, că în majoritatea cazurilor practice cele două transformate au proprietăţi identice. Acesta este şi motivul pentru care nu este întotdeauna necesară specificarea tipului de transformare ce se utilizează.

6.6 Studiul sistemelor liniare şi invariante în timp prin intermediul transformării Laplace

Teorema convoluţiei, prin forma simplă pe care o are, permite studiul comportării sistemelor LIT. Este posibilă, utilizând transformarea unilaterală, şi cuprinderea condiţiilor iniţiale nenule pentru sistemele cauzale.

6.6.1 Funcţia de sistem a unui sistem liniar şi invariant în timp

Pentru un SLIT relaţia dintre semnalele de intrare şi ieşire este $y(t) = h(t) * x(t)$. Aplicând acestei relaţii transformarea Laplace bilaterală se obţine:

$$Y(s) = H(s) * X(s) \quad ; \quad H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s) \quad . \tag{6.47}$$

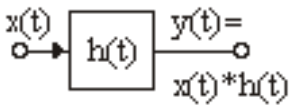


Fig. 6.7.a SLIT caracterizat de răspunsul la impuls h(t).

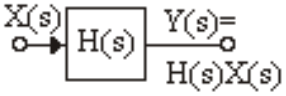


Fig. 6.7.b SLIT caracterizat de funcţia de sistem H(s).

Relaţia (6.47) permite determinarea răspunsului unui sistem de orice fel, nu neapărat cauzal, la un semnal de intrare x(t) nici el neapărat cauzal. Utilizarea transformării unilaterale nu permite tratarea unor cazuri teoretice importante. Pe de altă parte, în cazul în care sistemul şi semnalul sunt cauzale, simpla adăugare la transformate a indicelui "u", modifică în mod corespunzător relaţia (6.47). În cazul utilizării transformării Laplace bilaterale, specificarea domeniului de convergenţă este neapărat necesară.

Aşa cum răspunsul la impuls caracterizează complet comportarea unui SLIT în domeniul timp, funcţia H(s), transformata Laplace bilaterală a acestuia, caracterizează complet comportarea sa în domeniul complex. Funcţia H(s) poartă diverse denumiri, cum

ar fi funcţie (de) sistem sau funcţie de transfer. Ea poate fi determinată şi drept raport al transformatelor semnalelor de ieşire Y(s) şi a semnalelor de intrare X(s).

Fie un SLIT stabil. Atunci există $\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega) = \mathcal{L}\{h(t)\}(j\omega)$ şi, deci axa imaginară este în domeniul de convergenţă al funcţiei sistem H(s). Cauzalitatea nu a fost nicicum implicată.

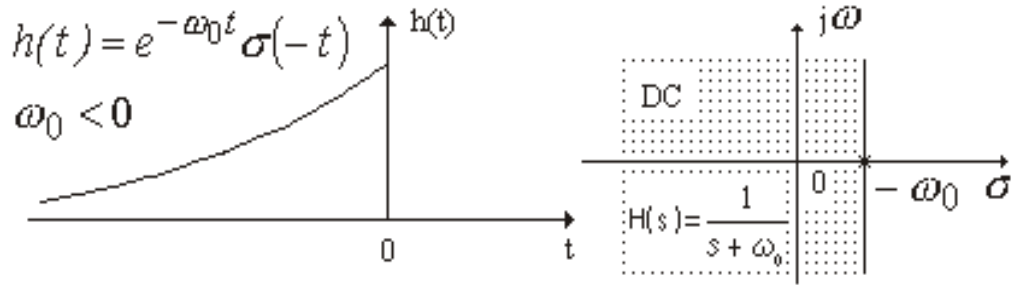


Fig. 6.8 Răspunsul la impuls h(t) al unui sistem necauzal şi funcţia de sistem H(s) împreună cu domeniul ei de convergenţă, DC.

Pentru exemplificare fie sistemul anticauzal având funcţia pondere $h(t) = e^{-\omega_o t}\sigma(-t)$, $\omega_o < 0$ - figura 6.8. Transformata Laplace bilaterală, funcţia sistem, este: $H(s) = -1/(s+\omega_o)$, condiţia de convergenţă fiind $Re\{s\} < -\omega_o$. Polul $-\omega_o$ este situat în semiplanul drept. Axa imaginară este inclusă în domeniul de convergenţă DC , existând $\mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) = -1/(\omega_o+j\omega)$.

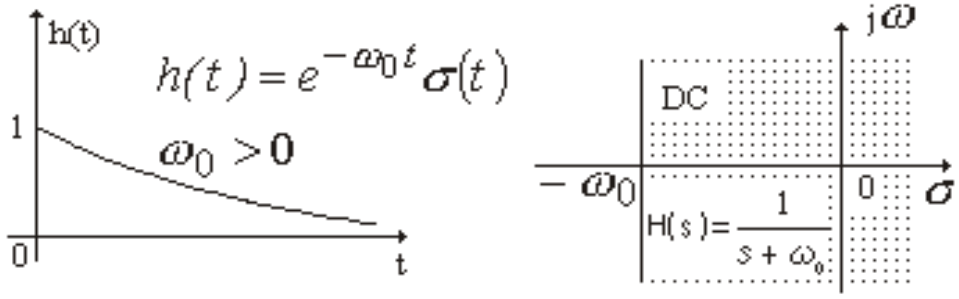


Fig. 6.9 Răspunsul la impuls h(t) al unui sistem cauzal şi funcţia de sistem H(s) împreună cu domeniul ei de convergenţă, DC.

Dacă sistemul este cauzal, domeniul său de convergenţă se întinde spre dreapta, ca şi semnalul. Dacă, în plus, sistemul este şi stabil, axa jω este din domeniul de convergenţă. Dacă H(s) are poli, ei pot fi plasaţi exclusiv în semiplanul stâng. În figura 6.9 se dă exemplul unui sistem stabil şi cauzal $h(t) = e^{-\omega_o t}\sigma(t)$, $\omega_o > 0$. Transformata Laplace bilaterală a lui h(t) , funcţia de sistem este $H(s) = 1/(s+\omega_o)$, convergenţa fiind asigurată pentru acele valori s din planul complex ce au $Re\{s\}<-\omega_o$. Axa imaginară este inclusă în domeniul de convergenţă şi deci, există $\mathcal{F}\{h(t)\} = -1/(\omega_o+j\omega)$. Polul funcţiei H(s), $s_p = -\omega_o$, este plasat în semiplanul stâng. Este, prin urmare, clar că un sistem stabil şi cauzal nu poate avea poli decât în semiplanul stâng, nici măcar pe axa imaginară.

6.6.2 Determinarea răspunsului unui sistem liniar şi invariant în timp utilizând transformarea Laplace

Principial, problema are o soluţionare simplă. Fiind dat semnalul, se determină transformata sa Laplace (unilaterală sau bilaterală, după caz) X(s). Se determină Y(s)=H(s)X(s) , transformata Laplace (unilaterală sau bilaterală). Prin transformare inversă rezultă y(t).

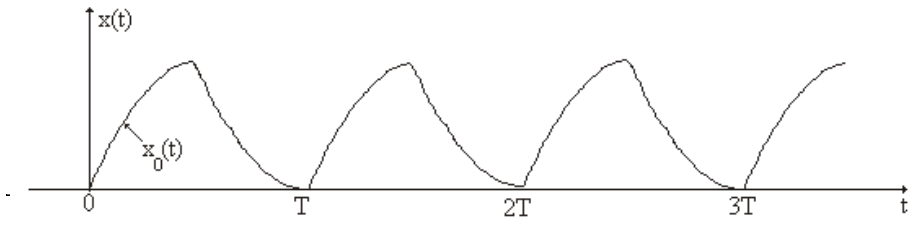


Fig. 6.10 Semnalul cauzal x(t) poate fi considerat ca repetarea la infinit a primului său segment, având suportul [0,T].

Un caz aparte este cel în care la intrarea unui sistem cauzal, h(t) <—> H(s) = $H_u(s)$, se aplică un semnal x(t) având forma din figura 6.10. Dacă se notează cu $x_o(t)$ semnalul cu suportul [0,T] , atunci:

$$x_o(t) = x(t)\left[\sigma(t) - \sigma(t-T)\right] \quad . \tag{6.48}$$

Semnalul x(t) poate fi privit ca fiind repetarea lui $x_o(t)$, pasul de repetare fiind T :

$$x(t) = x_o(t) * \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x_o(t-kT) \quad . \tag{6.49}$$

Semnalul x(t), deşi nu satisface definiţia periodicităţii, se spune că este periodic pentru t > 0 sau că este periodic cauzal.

Dacă se notează:

$$\mathcal{L}_u\{x_o(t)\} = \int_0^T x_o(t)\, e^{-st}\, dt = X_{ou}(s) = X_o(s) \quad , \tag{6.50}$$

neexistând nici o deosebire între cele două transformate, atunci din (6.49) rezultă:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}_u\{x_o(t)\} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_u\{\delta(t-kT)\} = X_{ou}(s) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} \ , \ \mathrm{Re}\{s\} > 0 \ .$$

Deoarece Re{s} > 0 , suma din relaţie este convergentă şi este $1/(1-e^{-sT})$. În consecinţă, se deduce relaţia:

$$X_u(s) = \frac{X_{ou}(s)}{1-e^{-sT}} \quad ; \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0 \quad , \tag{6.51}$$

cunoscută şi sub numele de formula lui Weidelich. În condiţiile problemei, aplicarea transformării bilaterale conduce la acelaşi rezultat, astfel că indicele "u" din formula lui Weidelich poate fi omis.

Pentru a determina semnalul de ieşire se calculează:

$$Y_u(s) = H_u(s)\,X_u(s) = \frac{H_u(s)\,X_{ou}(s)}{1-e^{-sT}} \quad . \tag{6.52}$$

Determinarea semnalului original y(t) se face inversând (6.52). Admiţând că sistemul considerat este descris de o ecuaţie diferenţială, soluţiei generale a acesteia îi corespunde componenta de regim permanent a lui y(t) iar soluţiei sale particulare îi corespunde componenta de regim tranzitoriu a lui y(t).

Deci y(t) are o componentă tranzitorie $y_{tr}(t)$ ce se amortizează în timp şi o componentă de regim permanent, sau staţionar, $y_S(t)$ ce se menţine şi la infinit:

$$y(t) = \mathcal{L}_u^{-1}\{Y_u(s)\} = y_{tr}(t) + y_S(t) \quad . \tag{6.53}$$

Componenta tranzitorie, având un factor exponenţial de amortizare, se datoreşte polilor din semiplanul stâng ai funcţiei $Y_u(s)$, cu $\sigma_p < 0$. Componenta de regim permanent nu are factorul exponenţial (ea îşi păstrează caracteristicile în timp), deci nu poate fi decât rezultatul contribuţiei polilor funcţiei $Y_u(s)$ ce au $\sigma = 0$, adică sunt situaţi pe axa imaginară (vezi "Contribuţia polilor ..." în paragraful 6.6.3).

Notând: $y_{tr}(t) \longleftrightarrow Y_{tru}(s)$ şi $y_S(t) \longleftrightarrow Y_{Su}(s)$, se scrie:

$$Y_{Su}(s) = Y_u(s) - Y_{tru}(s) \quad . \tag{6.54}$$

Dacă $y_{oS}(t) = y_S(t)[\sigma(t)-\sigma(t-T)]$ atunci, conform formulei lui Weidelich:

$$Y_{oSu}(s) = Y_{Su}(s)\left(1-e^{-sT}\right) \quad .$$

Se ţine seama de (6.54) şi (6.52) şi se obţine:

$$Y_{oSu}(s) = \left[Y_u(s) - Y_{tru}(s)\right]\left(1-e^{-sT}\right) = \left[\frac{X_{ou}(s)\,H(s)}{1-e^{-sT}} - Y_{tru}(s)\right]\left(1-e^{-sT}\right)$$

$$Y_{oSu}(s) = X_{ou}(s)\,H(s) - Y_{tru}(s)\left(1-e^{-sT}\right) \quad ; \quad y_{oS}(t) = \mathcal{L}_u^{-1}\{Y_{oSu}(s)\} \tag{6.55-56}$$

Se observă că, pe baza formulei lui Weidelich, poate fi determinată transformata Laplace a răspunsului unui sistem cauzal la un semnal periodic cauzal doar observând comportarea temporală a acestui semnal în prima sa perioadă. Cu ajutorul transformatei Laplace a răspunsului pot fi determinate componentele de regim tranzitoriu şi permanent ale acestuia.

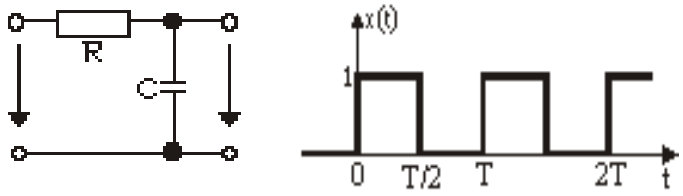


Fig. 6.11 (a) Circuit RC; (b) Semnal aplicat la intrarea circuitului RC.

<u>Exemplu</u> La intrarea circuitului din figura 6.11 a se aplică unda rectangulară cauzală cu factor de umplere 0,5 , prezentată în figura 6.11 b. Se cere răspunsul de regim permanent (staţionar).

Pentru circuit se deduce:

$$H_u(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c} \quad ; \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \quad ; \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\omega_c \quad .$$

*Consideră*m *numai prima porţiune [0,T] din semnalul de intrare* $x_o(t)$, $X_{ou}(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-\frac{sT}{2}}\right)$ *. Aplicând formula lui Weidelich se obţine:*

$$Y_u(s) = \frac{\omega_c\left(1 - e^{-\frac{sT}{2}}\right)}{s\,(s+\omega_c)\left(1 - e^{-sT}\right)} = \frac{\omega_c}{s\,(s+\omega_c)\left(1 + e^{-\frac{sT}{2}}\right)} \quad .$$

*Componenta tranzitorie este cauzat*ă *de polul* $-\omega_c$ *, deci:*

$$Y_{tru}(s) = \frac{A}{s+\omega_c} \quad ; \quad A = \left[Y_u(s)\,(s+\omega_c)\right]_{s=-\omega_c} = -\frac{1}{1 + e^{\frac{\omega_c T}{2}}} \quad .$$

*Conform relaţiei (6.56) se determin*ă $Y_{oSu}(s)$ *:*

$$Y_{oSu}(s) = \frac{\omega_c\left(1 - e^{-\frac{sT}{2}}\right)}{s(s+\omega_c)} + \frac{1}{1 + e^{\frac{\omega_c T}{2}}} \cdot \frac{1 - e^{-sT}}{s+\omega_c}$$

$$Y_{oSu}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_c} - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_c} \right) e^{-\frac{sT}{2}} + \frac{1}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}} \left(\frac{1}{s+\omega_c} - \frac{e^{-sT}}{s+\omega_c} \right) .$$

De aici rezultă prin inversare:

$$y_{oS}(t) = \left(1 - e^{-\omega_c t}\right)\sigma(t) - \left[1 - e^{-\omega_c (t-\frac{T}{2})}\right]\sigma(t-\frac{T}{2}) + \frac{1}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}} \left[e^{-\omega_c t}\sigma(t) - e^{-\omega_c (t-T)}\sigma(t-T) \right] ,$$

$$y_{oS}(t) = \left(1 - \frac{e^{\frac{\omega_c T}{2}}}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}} e^{-\omega_c t} \right) \sigma(t) - \left[1 - e^{-\omega_c (t-\frac{T}{2})}\right]\sigma(t-\frac{T}{2}) - \frac{e^{-\omega_c (t-T)}}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}}\sigma(t-T) ,$$

şi: $y_S(t) = y_{oS}(t) * \delta_T(t)$.

Se observă că:

$$\lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{e^{\frac{\omega_c T}{2}}}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}} e^{-\omega_c t} \right) = 1 \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} \left(1 - e^{-\omega_c (t-\frac{T}{2})}\right) = 1 ,$$

şi: $\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\omega_c (t-T)}}{1+e^{\frac{\omega_c T}{2}}} = 0$.

Ţinând, însă, seama de faptul că suportul lui $y_{oS}(t)$ este intervalul [0,T] , se poate afirma că pe măsură ce T creşte, $y_{oS}(t)$ este o aproximare tot mai bună pentru $x_o(t)$. De aceea se poate afirma că pentru t —> ∞ , limita lui $y_S(t)$ este nenulă, ceea ce justifică denumirea de componentă staţionară pentru acest semnal. Având în vedere forma de variaţie cu ω a modulului funcţiei sistem $|H_u(\omega)|$, se constată faptul că semnalul y(t) este o aproximare pentru trunchierea lui x(t). Numărul componentelor spectrale ale lui x(t), neafectate prin trunchiere, depinde de valoarea pulsaţiei de tăiere ω_c (el fiind cu atât mai mare cu cât ω_c este mai mare).

6.6.3 Sisteme liniare şi invariante în timp caracterizate prin ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Fie sistemul LIT caracterizat de ecuaţia diferenţială:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad a_0 \neq 0 , \qquad \textbf{(6.57)}$$

cu condiţii iniţiale nenule.

Aplicând acestei egalităţi transformarea Laplace bilaterală, rezultă:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s) \quad . \tag{6.58}$$

Se poate determina funcţia de sistem H(s) = Y(s)/X(s) :

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad . \tag{6.59}$$

Dacă este dată forma ecuaţiei diferenţiale (6.57), funcţia de sistem se scrie imediat prin identificarea coeficienţilor şi reciproc. Fiind dată forma H(s) din (6.59), ecuaţia diferenţială se deduce tot prin identificarea coeficienţilor. Vom mai observa faptul că, dacă sistemul este descris de o ecuaţie diferenţială, H(s) este o fracţie (funcţie raţională) în s.

Rădăcinile ecuaţiei:

$$D(s) = \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0 \quad , \tag{6.60}$$

dau polii sistemului, s_{pk} , în număr de N, incluzând şi ordinele de multiplicitate.

Rădăcinile ecuaţiei:

$$N(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k = 0 \quad , \tag{6.61}$$

dau zerourile sistemului, s_{ok} , în număr de M, incluzând şi ordinele de multiplicitate.

Pentru a putea utiliza (6.59) trebuie specificat domeniul de convergenţă, în funcţie de natura răspunsului la impuls h(t). Dacă însă h(t)σ(t) = h(t), sistemul fiind cauzal, atunci H(s) = H_u(s) iar domeniul de convergenţă se întinde spre dreapta, de la cel mai din dreapta pol al sistemului. Dacă sistemul este stabil, toţi polii sunt în semiplanul din stânga, deci toţi polii au proprietatea Re{s_{pk}} < 0 pentru $1 \le k \le N$.

Vom presupune în cele ce urmează că sistemul este cauzal, prin urmare: $H_u(s)=H(s)=\mathcal{L}_u\{h(t)\}=\mathcal{L}\{h(t)\}$. Teorema valorii iniţiale a unui semnal cauzal, aplicată răspunsului la impuls (şi el cauzal), conduce la:

$$h(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\cdot H_u(s) = \lim_{s\to\infty} s\cdot H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s\,N(s)}{D(s)} \quad . \tag{6.62}$$

Dacă $h(0^+)$ este finit, deci nu există impulsuri Dirac în origine, atunci se poate deduce că M+1 ≤ N . Într-adevăr, ţinând seama de forma expresiei (6.59), avem:

$$h(0^+) = \lim_{s\to\infty} \frac{b_M s^{M+1} + b_{M-1} s^M + \ldots + b_1 s^2 + b_0 s}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \quad .$$

Dacă M+1 > N , atunci limita nu poate fi finită. Rămâne, în consecinţă: $h(0^+) < \infty$, M+1 ≤ N , M ≤ N-1 .

Gradul numărătorului unei funcţii sistem ce nu are impulsuri Dirac în origine este cel puţin cu o unitate mai mic decât al numitorului.

Dacă M+1 > N expresia lui h(t) prezintă impulsuri Dirac în origine. Spre exemplu dacă $H_u(s) = \frac{s+2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1}$ rezultă $h(t) = \delta(t) + e^{-t}\sigma(t)$.

În mod normal numărul polilor unei funcţii sistem întrece cel puţin cu o unitate numărul zerourilor ei. Dacă polii unui sistem stabil sunt plasaţi numai în semiplanul stâng, în schimb zerourile sale pot fi plasate oriunde.

Sistemele ce au atât polii cât şi zerourile plasate în semiplanul stâng se numesc **sisteme de fază minimă**. Inversul funcţiei $H_u(s)$ a unui sistem de fază minimă, $1/H_u(s)$, are atât polii cât şi zerourile în semiplanul stâng. Şi ea este o funcţie de fază minimă, corespunzând unui sistem de fază minimă.

Substratul noţiunii introduse poate fi clarificat printr-un exemplu. Fie:

$$h(t) = e^{-t}\sigma(t) \quad \longleftrightarrow \quad H_u(t) = \frac{1}{s+1} \quad .$$

Răspunsul în frecvenţă al acestui sistem este $H(\omega) = 1/(1+j\omega)$. Modulul şi faza răspunsului în frecvenţă sunt $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$; $\Phi(\omega) = -\operatorname{arctg}\omega$. Dacă interesează numai modulul răspunsului în frecvenţă, nu şi faza sa, se pune întrebarea dacă sistemul dat ca exemplu este singurul având acelaşi modul în funcţie de frecvenţă? Răspunsul este negativ. Şi sistemul cu răspunsul în frecvenţă:

$$H_{\omega_o}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \frac{1-j\frac{\omega}{\omega_o}}{1+j\frac{\omega}{\omega_o}} \longleftrightarrow h_{\omega_o}(t) = \frac{1}{\omega_o - 1}\left[(\omega_o + 1)e^{-t} - 2\omega_o e^{-\omega_o t}\right]\sigma(t) \ ,$$

are acelaşi modul ca şi sistemul cu funcţia $H(\omega)$. În schimb, funcţia sa fază-frecvenţă este:

$$\Phi_{\omega_o}(\omega) = -\operatorname{arctg}\omega - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_o} = \Phi(\omega) - 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_o} \quad .$$

Funcţia sistem corespunzătoare lui $h_{\omega_o}(t)$ are forma:

$$H_{\omega_o u}(s) = \frac{\omega_o - s}{(1+s)(\omega_o + s)} \quad .$$

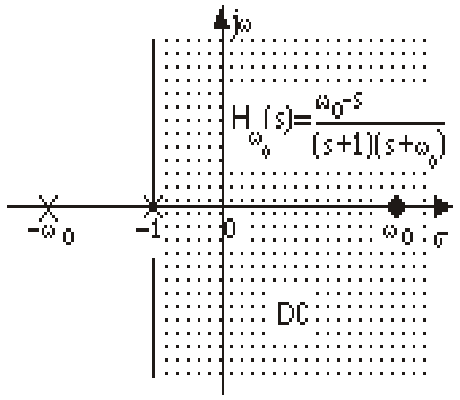


Fig. 6.12 Funcţie sistem şi domeniul ei de convergenţă DC.

După cum rezultă din figura 6.12, funcţia are doi poli în semiplanul stâng şi un zero în semiplanul drept. Modulul răspunsului în frecvenţă este acelaşi ca şi cel corespunzător funcţiei sistem $H_u(s) = 1/(1+s)$, dar faza ei este mai mare. Faza $\Phi_{\omega o}(\omega)$ este minimă pentru $\omega_o \to \infty$, când $\Phi_{\omega_o}(\omega) = \Phi(\omega)$. Prin urmare $H_u(s)=1/(1+s)$ neavând nici un zero în semiplanul drept, corespunde unui sistem ce introduce un defazaj minim în comparaţie cu alte sisteme (cauzale) ce au aceiaşi caracteristică $|H(\omega)|$.

Vom căuta să interpretăm şi teorema valorii finale, care pentru sistemul h(t) (cauzal) se scrie sub forma:

$$h(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,H_u(s) = \lim_{s\to 0} s\,H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\,N(s)}{D(s)} \quad .$$

Dacă sistemul este stabil, $h(\infty) = 0$ şi, prin urmare $D(0) \neq 0$. Sistemele cauzale şi stabile nu pot avea poli în origine. Acest rezultat este în concordanţă cu faptul că toţi polii lui H(s) sunt în semiplanul stâng. În acest caz, teorema valorii finale nu aduce nici o informaţie suplimentară.

<u>Contribuţia polilor unui sistem cauzal la răspunsul la impuls al acestuia</u>

Funcţia de sistem $H_u(s)$ (6.59) pentru un sistem cauzal, poate fi descompusă în fracţii simple şi pusă sub forma:

$$H_u(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_{pk}} \quad ; \quad A_k = H_u(s)\,(s - s_{pk})\Big|_{s=s_{pk}} \quad , \qquad \textbf{(6.63)}$$

dacă toţi polii sunt simpli. Forma răspunsului la impuls este atunci:

$$h(t) = \left(\sum_{k=1}^{N} A_k\, e^{s_{pk} t} \right) \sigma(t) \quad . \qquad \textbf{(6.64)}$$

Deosebim două cazuri: i) $s_{pk} \in \mathbb{R}$ şi ii) $s_{pk} \notin \mathbb{R}$. Cum coeficienţii a_k şi b_k în ecuaţia

(6.59) sunt reali, rezultă faptul că polii complecşi nu pot apărea decât în perechi

complex conjugate:

i) $\mathbf{s_{pk} = \sigma_k}$: $A_k e^{\sigma_k t}$ este un termen ce descreşte numai dacă polul are $\sigma_k < 0$. Dacă $\sigma_k = 0$, deci polul simplu se află în origine, sistemul nu mai poate fi stabil decât la limită. După ce sistemul a fost excitat şi excitaţia a dispărut, sistemul nu revine în starea iniţială, mărimea de ieşire rămânând, totuşi, finită. Dacă însă $\sigma_k > 0$, $A_k e^{\sigma_k t}$ creşte în timp şi sistemul, cum era de aşteptat, este instabil

Reţinem, în concluzie, faptul că polii simpli reali dau contribuţii exponenţiale în expresia răspunsului la impuls.

ii) $\mathbf{s_{pk} = \sigma_k + j\omega_k}$: Atunci există încă un pol, $s_{pm} = \sigma_k - j\omega$. Perechea celor doi poli dă o contribuţie de forma: $B_k e^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k)$ în răspunsul la impuls.

Observăm imediat caracterul oscilant al termenului, frecvenţa de oscilaţie fiind dată de coeficientul părţii imaginare a polului. Referindu-ne acum la coeficientul părţii reale a polului σ_k , dacă $\sigma_k < 0$ oscilaţia se amortizează în timp. Cu cât polul are $|\sigma_k|$ mai mare, cu atât viteza de amortizare este mai mare. Polii apropriaţi de axa reală dau răspunsuri oscilante ce descresc mai lent în timp.

Pentru $\sigma_k = 0$, deşi excitaţia a încetat să mai existe, sistemul va oscila în continuare între două limite, mărimea de la ieşirea sa rămânând totuşi mărginită. Sistemul, un oscilator sinusoidal, este, totuşi, stabil la limită.

Dacă $\sigma_k > 0$ oscilaţiile cresc exponenţial ca amplitudine şi sistemul este instabil.

Vom analiza acum polii multiplii de ordinul doi. Expresia funcţiei de sistem conţine în descompunerea ei în fracţii simple termeni de forma:

$$\ldots + \frac{A}{s - s_p^r} + \frac{B}{\left(s - s_p^r\right)^2} + \frac{C}{s - s_p^i} + \frac{D}{s - s_p^{i*}} + \frac{E}{\left(s - s_p^i\right)^2} + \frac{F}{\left(s - s_p^{i*}\right)^2} + \ldots \quad ,$$

unde pentru simplitate am notat cu s_p^r un pol real, cu s_p^i un pol complex iar cu s_p^{i*} conjugatul său complex.

i) Polul real de ordinul 2, $s_p' = \sigma_p$ generează în răspunsul la impuls termeni de forma $M_0 e^{\sigma_p t} + M_1 t e^{\sigma_p t}$

. Dacă $\sigma_p < 0$, contribuţia sa în răspunsul la impuls, având caracter exponenţial, tinde spre zero, sistemul fiind stabil. Dacă $\sigma_p = 0$, termenii devin M_0+M_1t . De data aceasta răspunsul la impuls nu rămâne mărginit şi sistemul este instabil. Tot instabil este şi dacă $\sigma_p > 0$.

ii) Perechea de poli complex conjugaţi $s_p^i = \sigma+j\omega$; $s_p^{i*} = \sigma-j\omega$ contribuie la formarea expresiei răspunsului la impuls prin termeni de forma: $N_0 e^{\sigma t}\sin(\omega t+\varphi_0)+N_1 t e^{\sigma t}\sin(\omega t+\varphi_1)$. Dacă $\sigma < 0$ răspunsul se atenuează. Dacă $\sigma = 0$, polii fiind plasaţi pe axa imaginară, răspunsul este oscilant dar de amplitudine crescătoare ca urmare a factorului t. Prin urmare nu mai este asigurată nici măcar stabilitatea la limită. Cu atât mai mult sistemul este instabil dacă $\sigma > 0$, creşterea amplitudinii de oscilaţie fiind exponenţială.

În aceeaşi manieră se pot analiza contribuţiile unor poli de ordin superior. Concluzia ce se desprinde este că, pentru un sistem cauzal, stabilitatea strictă este întotdeauna asigurată dacă polii sunt în semiplanul stâng. Dacă polii sunt pe axa imaginară atunci sistemul este stabil la limită doar dacă ei sunt simpli. Pentru o singură pereche de poli complex conjugaţi plasaţi pe axa imaginară se obţine un oscilator sinusoidal. Odată excitat, sistemul generează la ieşire o oscilaţie a cărei amplitudine rămâne constantă (răspunsul este mărginit la ieşire).

Plasarea unui pol al unui sistem cauzal în semiplanul drept, chiar dacă este simplu dă naştere unui sistem instabil; mărimea sa de ieşire tinde să crească spre infinit în mod exponenţial sau oscilant cu anvelopă exponenţială.

Se mai observă că polii plasaţi în semiplanul stâng dau o componentă tranzitorie ce se amortizează. Răspunsul permanent, ce se menţine cu aceleaşi caracteristici în timp este contribuţia exclusivă a polilor simpli situaţi pe axa imaginară.

Calculul răspunsului unui sistem caracterizat printr-o ecuaţie diferenţială

În loc de a determina răspunsul SLIT rezolvând ecuaţia diferenţială (6.57) pentru un semnal de intrare x(t) dat, se poate proceda, aşa cum s-a arătat în §6.6.2 la calculul acestuia prin intermediul transformatei Laplace. Dacă sistemul este cauzal, se aplică transformarea unilaterală. Ea nu va diferi de transformarea bilaterală decât în momentul impunerii condiţiilor iniţiale.

Pentru exemplificare vom considera un sistem de tip cauzal, caracterizat de ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad , \qquad \textbf{(6.65)}$$

având condiţiile iniţiale $y(0^+) = 2$ şi $y'(0^+) = -2$. La intrarea SLIT se aplică semnalul (cauzal) $x(t) = 4\sigma(t)$.

Vom aplica egalităţii (6.65) transformarea Laplace unilaterală. Pentru aceasta ţinem seama de teorema de derivare în domeniul timpului (6.37"):

$$y(t) \longleftrightarrow Y_u(s) \;;\; y'(t) \longleftrightarrow sY_u(s) - y(0^+) \qquad \textbf{(6.66)}$$

Pentru derivata a doua mai aplicăm odată relaţiei (6.66) teorema de derivare (6.37''):

$$(y')' = y'' \longleftrightarrow s\left[sY_u(s) - y(0^+)\right] - y'(0^+) \quad . \qquad \textbf{(6.67)}$$

Cu acestea şi cu $4\sigma(t) \longleftrightarrow 4/s$, avem:

$$s\left[sY_u(s) - 2\right] + 2 + 3\left[sY_u(s) - 2\right] + 2Y_u(s) = \frac{4}{s} \quad . \qquad \textbf{(6.68)}$$

Se determină $Y_u(s)$, rezolvând ecuaţia (6.68):

$$Y_u(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2} \quad . \qquad \textbf{(6.69)}$$

Odată ce $Y_u(s)$ este descompus în fracţii simple, se poate determina răspunsul y(t):

$$y(t) = 2\sigma(t) - 2e^{-t}\sigma(t) + 2e^{-2t}\sigma(t) = \left(2 - 2e^{-t} + 2e^{-2t}\right)\sigma(t) \qquad \textbf{(6.70)}$$

Se pot verifica condiţiile iniţiale:

$$\lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{t \to 0^+} \left(2 - 2e^{-t} + 2e^{-2t}\right) = 2 - 2 + 2 = 2 \quad .$$

În ceea ce priveşte derivata, pentru $t > 0$ funcţia de derivat este $2-2e^{-t}+2e^{-2t}$. Avem, prin urmare: $y'(t) = 2e^{-t}-4e^{-2t}$, $t > 0$ şi:

$$\lim_{t \to 0^+} y'(t) = \lim_{t \to 0^+} \left(2e^{-t} - 4e^{-2t}\right) = 2 - 4 = -2 \quad .$$

<u>Sisteme de ordinul întâi</u>

Un sistem de ordinul întâi cauzal caracterizat de ecuaţia diferenţială:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \omega_o y(t) = K\omega_o x(t) \qquad \omega_o > 0 \quad , \qquad \textbf{(6.71)}$$

are funcţia sistem:

$$H(s) = H_u(s) = \frac{K\omega_o}{s+\omega_o} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\omega_o \quad . \tag{6.72}$$

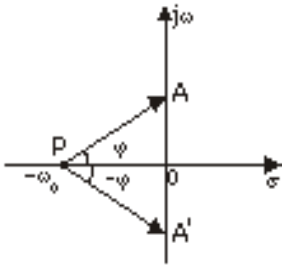


Fig. 6.13 CPZ pentru un sistem de ordinul întâi.

Constelaţia de poli şi zerouri CPZ -figura 6.13- se reduce la un singur pol plasat în semiplanul stâng. Sistemul este, prin urmare, stabil şi are răspunsul la impuls de tip exponenţial, polul fiind real.

În ceea ce priveşte răspunsul în frecvenţă, el poate fi determinat, aşa cum s-a arătat, în mod grafic. Astfel, modulul răspunsului şi faza sa pentru o frecvenţă ω, definită de poziţia punctului A pe axa imaginară, sunt date de:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|\overline{PA}|} \quad ; \quad \Phi(\omega) = -\varphi \quad . \tag{6.73}$$

Pe măsură ce ω creşte, $|\overline{PA}|$ creşte şi, prin urmare $|H(\omega)|$ scade. Se poate observa că pentru punctul A', simetricul lui A, $|\overline{PA'}| = |\overline{PA}|$. Drept urmare, caracteristica de modul este o funcţie pară.

Pe măsură ce ω creşte, φ creşte, tinzând spre π/2 şi, deci Φ(ω) scade, tinzând către -π/2 . Nu e greu de observat că pentru A', simetricul lui A, unghiul făcut de segmentul $|\overline{PA'}|$ cu axa reală este -φ . Rezultă imediat faptul binecunoscut că Φ(ω), caracteristica de fază, este o funcţie impară.

<u>Sisteme de ordinul doi</u>

Dacă sistemul caracterizat de ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_o \frac{dy(t)}{dt} + \omega_o^2 y(t) = K\omega_o^2 x(t) \quad , \tag{6.74}$$

este cauzal, se determină funcţia de transfer (funcţia sistem) sub forma:

$$H_u(s) = H(s) = \frac{K\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2} \quad . \tag{6.75}$$

Polii $s_{1,2} = -\xi\omega_o + -\omega_o\sqrt{\xi^2 - 1}$ sunt reprezentaţi în figura 6.14 a pentru ξ < 1 . Cei doi poli complex conjugaţi conferă răspunsului la impuls al sistemului un caracter oscilant, frecvenţa de oscilaţie fiind $\omega_o\sqrt{1-\xi^2}$. Din triunghiul dreptunghic OP_1M se

determină, aplicând teorema lui Pitagora, $|\overline{OP_1}| = \omega_o$.

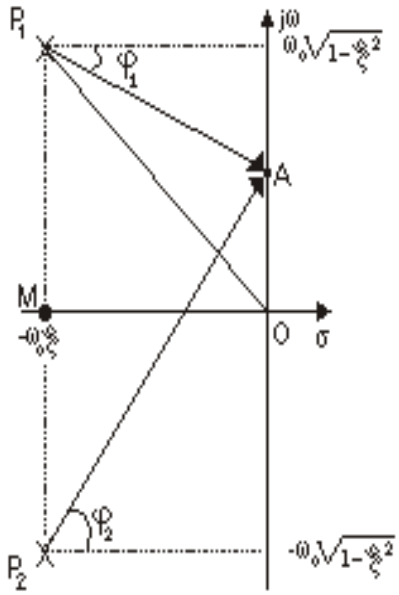


Fig. 6.14 a CPZ pentru un sistem de ordinul doi având o pereche de poli complex conjugaţi.

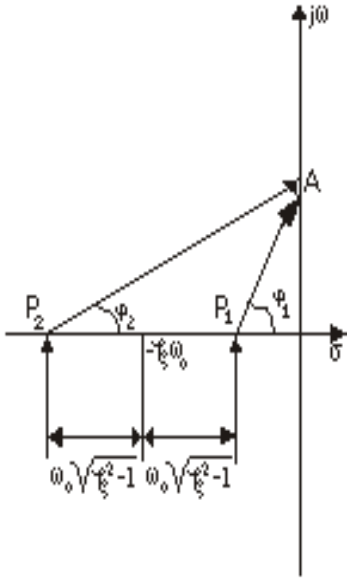


Fig. 6.14 b CPZ pentru un sistem de ordinul doi având poli reali.

Dacă A este un punct pe axa imaginară ce defineşte o frecvenţă, atunci $|H(\omega)| = \frac{1}{|\overline{P_1A}| \cdot |\overline{P_2A}|}$ şi $\Phi(\omega) = -\varphi_1-\varphi_2$. Pentru A –> ∞ (ω –> ∞) $|\overline{P_1A}|$ şi $|\overline{P_2A}|$ tind spre ∞ , deci $|H(\omega)|$ –> 0 .

La frecvenţa nulă, A ≡ 0 , $\varphi_1+\varphi_2 = 0$ deci $\Phi(0) = 0$. Atunci când ω –> ∞ , φ_1 –> $\pi/2$, φ_2 –> $\pi/2$ deci $\Phi(\omega)$ –> $-\pi$.

Se observă imediat că $|H(\omega)|$ este o funcţie pară iar $\Phi(\omega)$ este o funcţie impară.

Dacă $\xi > 1$ cei doi poli sunt plasaţi pe axa reală, după cum rezultă din figura 6.14 b. Răspunsul la impuls are un caracter neoscilant (monoton).

Dacă $\xi = 1$ cei doi poli se confundă, în punctul $-\omega_o$ de pe axa reală. Răspunsul rămâne tot aperiodic.

<u>Sistemul "trece tot"</u>

În exemplul privind funcţiile de fază minimă am utilizat un sistem având răspunsul în frecvenţă:

$$H(\omega) = \frac{\omega_o - j\omega}{\omega_o + j\omega} \quad . \qquad \textbf{(6.76)}$$

Considerând sistemul cauzal, funcţia de transfer este:

$$H_u(s) = H(s) = \frac{\omega_o - s}{\omega_o + s} \quad . \qquad \textbf{(6.77)}$$

Constelaţia de poli şi zerouri este cea din figura 6.15. Se observă imediat că modulul răspunsului în frecvenţă este $|H(\omega)| = \frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{PA}|} = 1$. O sinusoidă, de orice frecvenţă, aplicată unui astfel de sistem, trece fără ca amplitudinea ei să fie afectată. Acesta este şi motivul pentru care asemenea sisteme sunt denumite de tip "trece tot"

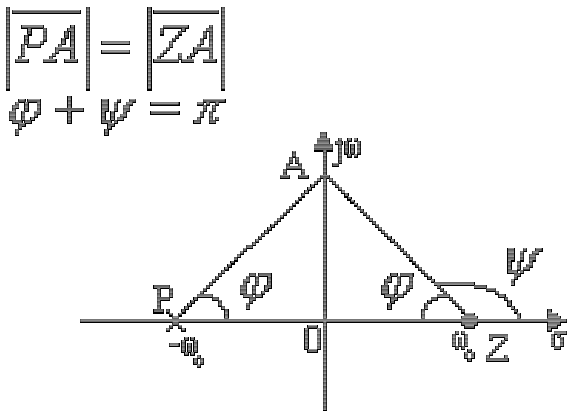


Fig. 6.15 CPZ pentru un sistem "trece tot".

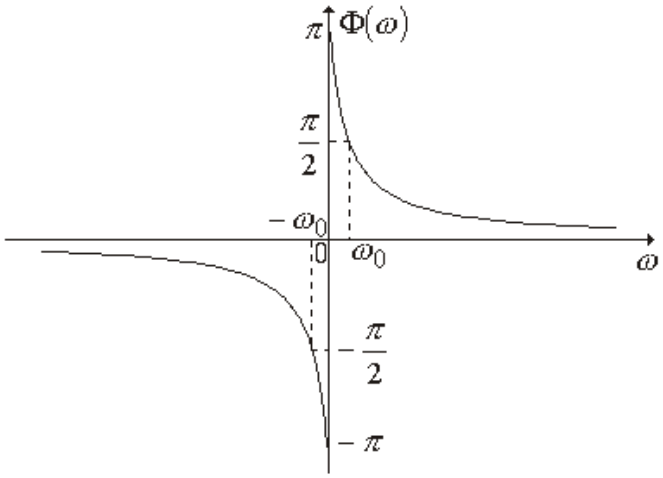


Fig. 6.16 Caracteristica de fază Φ(ω) a unui sistem "trece tot".

În ceea ce priveşte faza răspunsului în frecvenţă, ea este:

$$\Phi(\omega) = \psi - \varphi = \pi - 2\varphi \quad .$$

Atunci când $\omega = 0$, deci $A \equiv 0$, $\varphi = 0$ şi defazajul introdus de circuit este π. Pentru $OA = \omega_o$, triunghiul AOP este isoscel, deci $\varphi = \pi/4$. Rezultă că $\Phi(\omega_o)=\pi-2\pi/4=\pi/2$.

În figura 6.16 este prezentată caracteristica $\Phi(\omega)$ pentru un sistem "trece tot". Dacă aplicăm o sinusoidă unui astfel de sistem, ea nu îşi modifică amplitudinea ci numai faza, conform caracteristicii $\Phi(\omega)$.

<u>Funcţia sistem echivalentă unor sisteme conectate în serie şi paralel</u>

Considerăm două sisteme conectate în serie ca în figura 6.17 a. Dacă operaţiile au sens, $h_e(t) = h_1(t) * h_2(t)$. Aplicând transformarea Laplace bilaterală (sau unilaterală, după caz) şi ţinând cont de teorema convoluţiei, rezultă:

$$H_e(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \quad . \qquad \textbf{(6.78)}$$

Sistemul echivalent are drept funcţie de sistem produsul funcţiilor de sistem ale sistemelor conectate în serie.

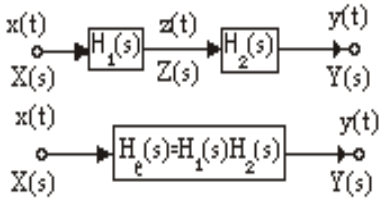


Fig. 6.17a Două sisteme conectate în serie şi sistemul echivalent.

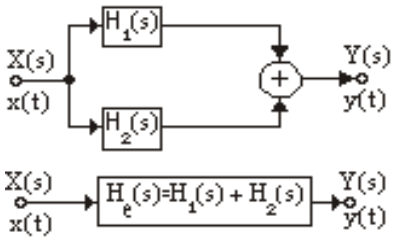


Fig. 6.17b Două sisteme conectate în paralel şi sistemul echivalent.

Pentru cazul sistemelor conectate în paralel - figura 6.17 b - este uşor de dedus relaţia:

$$H_e(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad . \tag{6.79}$$

Sistemul echivalent are drept funcţie de transfer suma funcţiilor de transfer ale sistemelor conectate în parallel.

Tabelul 6.1 Proprietăţile transformării Laplace

Semnalul	Transformarea bilaterală		Transformarea unilaterală
	Transformata	Domeniul de convergenţă	
$x(t)$	$X(s)$	DC^x	$X_u(s)$
$y(t)$	$Y(s)$	DC^y	$Y_u(s)$
$ax(t)+by(t)$	$aX(s)+bY(s)$	$DC^x \cap DC^y$ *cel putin*	$aX_u(s)+bY_u(s)$
$x(t-t_o)\,,\ t_o \in \mathbb{R}$	$e^{-st_o}X(s)$	DC^x	—
$x(t-t_o)\,,\ t_o>0$	$e^{-st_o}X(s)$	DC^x	$e^{-st_o}X_u(s)$
$e^{s_o t}x(t)$	$X(s-s_o)$	DC^x *deplasat*	$X_u(s-s_o)$
$x(at), a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	DC^x *scalat*	—
$x(at), a>0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$	DC^x *scalat*	$\frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$
$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$	$DC^x \cap DC^y$ *cel putin*	$X_u(s)Y_u(s)$

Semnalul	Transformarea bilaterală		Transformarea unilaterală
	Transformata	Domeniul de convergenţă	
$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	$DC^x \ cel \ putin$	$sX_u(s)-x(0^+)$
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	DC^x	$\frac{d}{ds}X_u(s)$
$(-t)^n x(t)$	$\frac{d^n}{ds^n}X(s)$	DC^x	$\frac{d^n}{ds^n}X_u(s)$
$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(u)Y(s-u)du$	$\Gamma \subset DC^x \cap DC^y \ cel putin$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(u)Y(s-u)du$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$DC^x \cap \{\mathrm{Re}\{s\}>0\} \ cel \ putin$	—
$\int_{0}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$DC^x \cap \{\mathrm{Re}\{s\}>0\} \ cel \ putin$	$\frac{X_u(s)+x^{(-1)}(0)}{s}$ $x^{-1}(s)$-valoarea iniţială a integralei
$x(t)=x(t)\sigma(t)$	$x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX(s)$		$x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX_u(s)$
$x(t)=x(t)\sigma(t)$	$x(\infty)=\lim_{s\to 0} sX(s)$		$x(\infty)=\lim_{s\to 0} sX_u(s)$

Tabelul 6.2 Perechi semnal-transformată Laplace

Pentru semnalele cauzale X(s) = X_u(s) iar pentru cele necauzale există numai X(s).

Semnalul	Transformata	Domeniul de convergenţă
$\delta(t)$	$1 \ (constanta)$	$\forall s$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
$-\sigma(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\sigma(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} > 0$

Semnalul	Transformata	Domeniul de convergenţă
$^{*}\ -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\sigma(-t)$	$\frac{1}{s^{n}}$	$Re\{s\} < 0$
$e^{-at}\sigma(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -a$
$^{*}\ -e^{-at}\sigma(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\sigma(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{n}}$	$Re\{s\} > -a$
$^{*}\ -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\sigma(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^{n}}$	$Re\{s\} < -a$
$\delta(t-t_o)\ ;\ t_o>0$	e^{-st_o}	$\forall s$
$(\cos\omega_o t)\sigma(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > 0$
$(\sin\omega_o t)\sigma(t)$	$\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > 0$
$(e^{-at}\cos\omega_o t)\sigma(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > -a$
$(e^{-at}\sin\omega_o t)\sigma(t)$	$\frac{\omega_o}{(s+a)^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > -a$
$J_0(at)\sigma(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$Re\{s\} > -\lvert a\rvert$

Problema 1.

Un sistem liniar şi invariant în timp continuu are schema din figură:

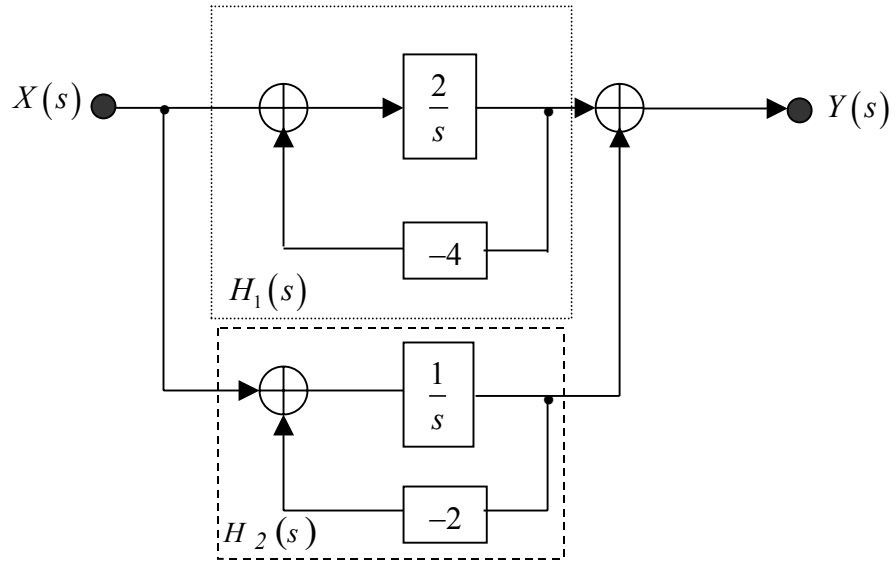


Fig. 1.1. Sistemul care trebuie analizat.

a) *Să se demonstreze, că funcţia de transfer a primului subsistem,* $\boldsymbol{H_1(s)}$*, este:*

$$\boldsymbol{H_1(s) = \frac{2}{s+8}}$$

b) *Să se scrie ecuaţia diferenţială, ce caracterizează sistemul şi să se studieze stabilitatea acestuia.*
c) *Să se determine răspunsul la impuls şi răspunsul în frecvenţă al sistemului*

Rezolvare.

a) *Schema primului subsistem din figura 1.1. este prezentată în figura următoare.*

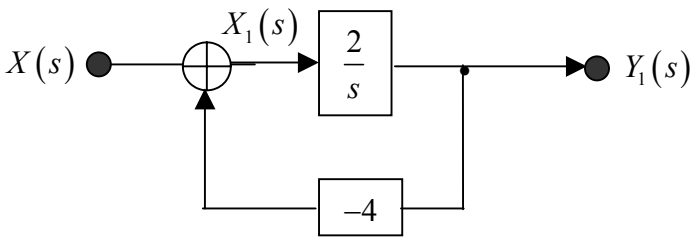


Fig. 2.1. Schema primului subsistem din figura 1.1.

Pe baza acestei figuri se pot scrie următoarele relaţii:

$$\begin{cases} X_1(s) = X(s) - 4Y_1(s) \\ Y_1(s) = \dfrac{2}{s} X_1(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1(s) = \dfrac{2}{s}[X(s) - 4Y_1(s)] \\ Y_1(s)[1 + \dfrac{8}{s}] = \dfrac{2}{s} X(s) \end{cases}$$

Funcția de transfer a primului subsistem este:

$$H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{\dfrac{2}{s}}{\dfrac{s+8}{s}} = \frac{2}{s+8}$$

b) *Schema celui de al doilea subsistem din figura 1.1. este prezentată în figura următoare.*

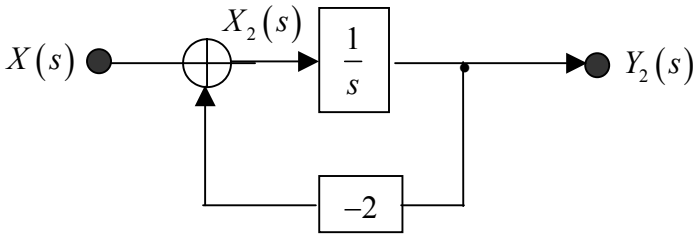


Fig. 3.1. Schema celui de al doilea subsistem din figura 1.1.

Analizând această figură pot fi scrise relațiile:

$$\begin{cases} X_2(s) = X(s) - 2Y_2(s) \\ Y_2(s) = \dfrac{1}{s} X_2(s) \end{cases}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s}[X(s) - 2Y_2(s)]$$

$$H_2(s) = \frac{Y_2(s)}{X(s)} = \frac{\dfrac{1}{s}}{\dfrac{s+2}{s}} = \frac{1}{s+2}$$

Întrucât cele două subsisteme sunt conectate în paralel, funcția de transfer a sistemului global este:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

adică:

$$H(s)=\frac{2}{s+8}+\frac{1}{s+2}=\frac{3s+12}{(s+8)(s+2)}$$

Polii funcţiei de transfer sunt $s_{p_1}=-8$ *şi* $s_{p_2}=-2$.
Polii sistemului se află în semiplanul stâng, deci sistemul este stabil.
Pornind de la expresia funcţiei de transfer:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{3s+12}{s^2+10s+16}$$

se poate scrie:

$$s^2Y(s)+10sY(s)+16Y(s)=3sX(s)+12X(s)$$

Făcând transformata Laplace inversă, se obţine:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+10\frac{dy(t)}{dt}+16\,y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+12x(t)$$

c) $H(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s+8}$

Inversând această transformată Laplace se obţine:

$$h(t)=e^{-2t}\sigma(t)+2e^{-8t}\sigma(t)$$

Deci sistemul este cauzal.
Particularizând transformata Laplace se obţine expresia răspunsului în frecvenţă al sistemului:

$$H(\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}=\frac{3j\omega+12}{(j\omega)^2+10j\omega+16}$$

Problema 2.

Se consideră sistemul cauzal, având funcția de transfer:

$$H(s)=\frac{s-2}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

a) *Determinați regiunea de convergență a funcției* $H(s)$.
b) *Determinați răspunsul la impuls al sistemului.*
c) *Determinați răspunsul sistemului considerat la semnalul* $x(t)=e^{4jt}$.

Rezolvare.

a) Polii sistemului se determină rezolvând ecuațiile:

$$s+1=0, \quad s_{p_1}=-1$$

$$s^2+s+1=0, \quad s_{p_{2,3}}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Zeroul sistemului se obține rezolvând ecuația:

$$s-2=0; \quad s_0=2$$

Constelația de poli şi zerouri a sistemului este prezentată în figura următoare.

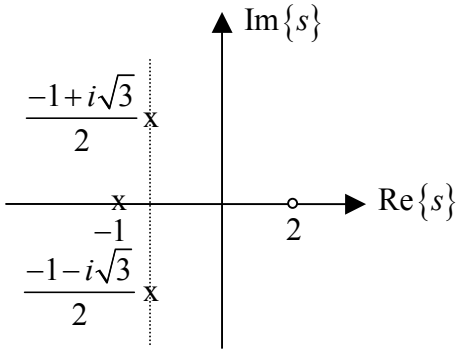


Fig. 1.2. Constelația de poli şi zerouri a sistemului considerat.

b) În scopul inversării transformatei Laplace se face descompunerea sa în fracții simple:

$$H(s)=\frac{s-2}{(s+1)(s^2+s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}$$

Se determină cei trei coeficienți:

$$A = H(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{s-2}{(s+1)(s^2+s+1)}(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{-3}{1} = -3, \qquad A = -3$$

Prin identificare rezultă:

$$\frac{s-2}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{-3s^2-3s-3+Bs^2+Cs+Bs+C}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

adică:

$$-3+C+B=1$$
$$-3+C=-2 \Rightarrow C=1 \Rightarrow B=3$$

Deci descompunerea în fracții simple a funcției de transfer este:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1} - \frac{3}{s+1} = \frac{3(s+\frac{1}{2})}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{3}{s+1}$$

Conform tabelului de perechi semnal transformată Laplace se obține:

$$h(t) = 3e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\sigma(t) - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\sigma(t) - 3e^{-t}\sigma(t)$$

c)

Exponențiala complexă e^{4jt} *este funcție proprie pentru orice sistem liniar şi invariant în timp. De aceea se poate scrie:*

$$y(t) = H(\omega)\cdot x(t)\Big|_{\omega=4} = \frac{1+j\omega}{1-\omega^2+j\omega}\cdot e^{4jt}\Big|_{\omega=4} = \frac{1+4j}{-15+4j}\cdot e^{4jt}$$

Problema 3.

Fie un sistem obținut prin conectarea în cascadă a două sisteme liniare şi invariante în timp ale căror funcții de transfer sunt: $\boldsymbol{H_1(s)}$*, respectiv* $\boldsymbol{H_2(s)}$*. Dacă funcția de transfer a sistemului echivalent* $\boldsymbol{H(s)}$*, este unitară, sistemul descris de* $\boldsymbol{H_2(s)}$ *se numeşte sistem invers sistemului descris de* $\boldsymbol{H_1(s)}$*.*

a) Să se determine relația de legătura între $\boldsymbol{H_1(s)}$ *şi* $\boldsymbol{H_2(s)}$ *dacă .*

b) În figura următoare este prezentată constelația de poli şi zerouri a lui $\boldsymbol{H_1(s)}$*, corespunzătoare unui sistem cauzal şi stabil. Să se determine constelația de poli şi zerouri pentru funcția de transfer a sistemului invers asociat.*

c) Să se determine $\boldsymbol{h_2(t)}$*, răspunsul la impuls al sistemului invers, în ipoteza, că acesta este stabil.*

d) Să se demonstreze, că răspunsul la impuls al sistemului echivalent $\boldsymbol{h(t)}$ *este identic cu* $\delta\boldsymbol{(t)}$*.*

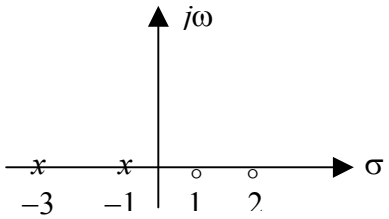


Fig.1.3. Constelația de poli şi zerouri a sistemului direct.

Rezolvare*.*

a) Conectarea în serie a celor două sisteme este prezentată în figura următoare.

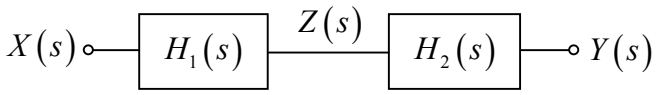


Fig. 2.3. Conectarea în cascadă a celor două sisteme.

În figura următoare se prezintă sistemul echivalent sistemului din figura 2.3.

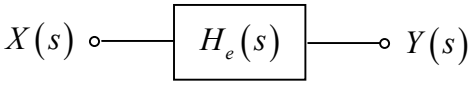


Fig. 3.3. Sistemul echivalent sistemului din figura 2.3.

Expresia funcției de transfer a sistemului echivalent este $\boldsymbol{H_e(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)}$ *dacă operația* $\boldsymbol{h_e(t) = h_1(t) * h_2(t)}$ *are sens. Conform enunțului:*

$$H_1(s)\cdot H_2(s)=1\Rightarrow H_2(s)=\frac{1}{H_1(s)}$$

b) Cunoscând expresia funcţiei de transfer a sistemului direct, dedusă din constelaţia sa de poli şi zerouri, prezentată în figura 1.3, pe baza relaţiei anterioare, se determină funcţia de transfer a sistemului invers.

$$H_1(s)=\frac{K(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+3)}\Rightarrow H_2(s)=\frac{\frac{1}{K}(s+1)(s+3)}{(s-1)(s-2)}$$

Constelaţia de poli şi zerouri a acestui sistem este prezentată în figura următoare.

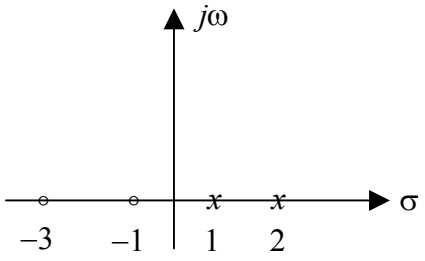


Fig.4.3. Constelaţia de poli şi zerouri a sistemului invers.

c) Polii sistemului invers se găsesc în semiplanul drept. Acesta este stabil doar dacă este anticauzal. Atunci răspunde la semnale mărginite cu semnale mărginite. De aceea regiunea de convergenţă trebuie să fie: $\mathbf{Re}\{s\}<1$. *Pentru a determina răspunsul la impuls al sistemului invers se descompune funcţia sa de transfer în fracţii simple.*

$$H_2(s)=\frac{1}{K}\cdot\frac{s^2+4s+3}{s^2-3s+2}=\frac{1}{K}\left[1+\frac{7s+1}{(s-1)(s-2)}\right]$$

Dar:

$$\frac{7s+1}{(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}$$

Se determină cei doi coeficienţi:

$$A=(s-1)H(s)\Big|_{s=1}=\frac{(s-1)(7s+1)}{(s-1)(s-2)}\Big|_{s=1}=-8$$

$$B=(s-2)H(s)\Big|_{s=2}=\frac{(7s+1)(s-2)}{(s-1)(s-2)}\Big|_{s=2}=15$$

Deci:

$$\frac{7s+1}{(s-1)(s-2)} = -\frac{8}{s-1} + \frac{15}{s-2}$$

În consecință:

$$h_2(t) = \frac{1}{K}[\delta(t) + 8e^{t}\sigma(-t) - 15e^{2t}\sigma(-t)]$$

d) Deoarece:

$$H_1(s) \cdot H_2(s) = 1$$

trecând în domeniul timp se obține:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$$

7. O INTRODUCERE ÎN FILTRAREA SEMNALELOR 373
7.1 Tipuri de filtre ideale 373
7.1.1 Filtrul trece jos ideal 373
7.1.2 Filtrul trece sus ideal 376
7.1.3 Filtrul trece bandă ideal 378
7.1.4 Filtrul opreşte bandă ideal 379
7.2 Aproximarea caracteristicilor filtrelor ideale 380
7.2.1 Aproximarea de tip maxim plat 381
Tabelul 7.1 Relaţiile de normare şi de denormare aplicate la filtre . . 385
7.2.2 Transformări ale filtrelor trece jos 387
Tabelul 7.2 Transformările elementelor FTJ pentru schemele de tip TS, TB şi OB 389
7.2.3 Filtrele numerice de tip maxim plat 390
7.2.4 Aproximarea de tip Cebîşev în banda de trecere 391
7.3 Circuite analogice de filtrare 393
7.3.1 Filtre active de tip RC cu reacţie multiplă 394
7.3.2 Filtrul activ universal 398
7.4 Aspecte legate de proiectarea filtrelor numerice cu răspuns finit la impuls obţinute prin trunchierea răspunsului infinit la impuls 405
7.4.1 Filtre cu răspunsul la impuls finit şi caracteristica de fază liniară 405
7.4.2 Ferestre temporale de trunchiere 409

7. O INTRODUCERE ÎN FILTRAREA SEMNALELOR

Acest capitol este destinat familiarizării studentului cu primele noţiuni teoretice privind filtrarea semnalelor. Nu se urmăreşte o prezentare matematică a filtrelor şi cu atât mai puţin a unor metode de proiectare. Aceste probleme constituie o parte distinctă a cursului . Dar prelucrarea semnalelor eşantionate, spre exemplu, în vederea recuperării semnalului ce a fost eşantionat, necesită anumite cunoştiinţe despre filtrare. De asemenea în prezentarea semnalelor modulate intervine teoretic filtrarea, etc. Aceste motive ne-au determinat să introducem acest capitol scurt, dedicat prezentării filtrelor ideale precum şi a unor filtre realizabile. Ideea plasării acestui capitol în acest loc îi aparţine lui Alan V. Oppenheim [67].

Modificarea relativă a amplitudinilor componentelor armonice ale unui semnal periodic sau chiar eliminarea sau selectarea anumitor componente armonice reprezintă o operaţie de "filtrare". Modificarea densităţii spectrale a unui semnal aperiodic, în sensul favorizării sau defavorizării unor segmente spectrale reprezintă deasemenea o operaţie de filtrare.

Spre exemplu, egalizarea practicată în sistemele audio de înaltă fidelitate reprezintă tot o filtrare. Ea favorizează acele componente ale spectrului semnalului audio ce sunt reproduse de către difuzoare cu o eficienţă mai redusă şi defavorizează acele componente unde difuzoarele au maxime de eficienţă. Este posibilă, printr-o egalizare reglabilă, compensarea unor caracteristici de absorbţie ale unei săli de concert cu o acustică necorespunzătoare.

Inginerul român Augustin Maior a observat că pe un circuit telefonic s-ar putea transmite mai multe convorbiri. Pentru aceasta a recurs la procedeul de a transfera spectrul vocal al unei convorbiri într-o bandă de frecvenţă, distinctă de al altei convorbiri, prin modulare. La recepţie separarea convorbirilor se realizează printr-o operaţie de atenuare a tuturor componentelor spectrale cu excepţia câte a unei benzi, în care a fost plasată convorbirea. În acest mod, prin filtrare, se separă convorbirile ce au fost "amestecate". În principiu noţiunile de "filtru" şi de sistem liniar şi invariant în timp sunt echivalente. Filtrarea se realizează cu ajutorul unor sisteme liniare şi invariante în timp continuu sau discret. Se mai spune că filtrele sunt sisteme de convoluţie continue sau discrete.

7.1 Tipuri de filtre ideale

7.1.1 Filtrul trece jos ideal

Răspunsul în frecvenţă al unui filtru trece jos (FTJ) ideal destinat prelucrării semnalelor în timp continuu este cel din figura 7.1.

Spectrul din domeniul $|\omega| < \omega_c$ este neafectat de acest filtru dar componentele

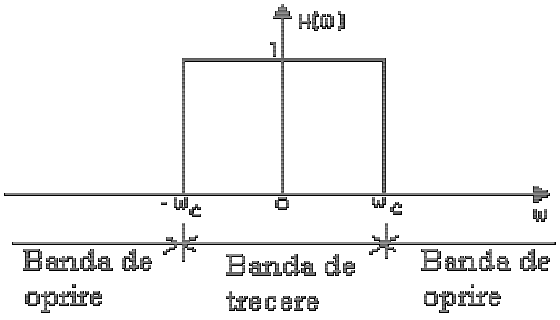


Fig. 7.1 Răspunsul în frecvenţă al unui filtru trece jos ideal

spectrale cu frecvenţe cuprinse în exteriorul acestei benzi sunt anulate. Valoarea ω_c ce separă benzile de trecere şi de oprire, poartă numele de frecvenţă de tăiere. Se obişnuieşte să se introducă o mărime, numită atenuare, definită ca inversul modulului răspunsului în frecvenţă, $1/|H(\omega)|$. Astfel, pentru exemplul din figura 7.1, atenuarea în banda de trecere este 1 iar în banda de oprire este infinită. Atenuarea "a" se mai defineşte şi în unităţi logaritmice prin relaţia:

$$a = 20\log\frac{1}{|H(\omega)|} = -20\log|H(\omega)| \quad . \tag{7.1}$$

Se pune problema dacă un astfel de filtru este sau nu realizabil. O primă condiţie ca filtrul să fie realizabil este ca el să fie cauzal. Teorema Paley-Wiener (relaţia (4.131)) cere ca integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\log|H(\omega)|\right|}{1+\omega^2}\, d\omega \tag{7.2}$$

să fie convergentă pentru ca h(t) <–> H(ω) să caracterizeze un sistem cauzal. Ori pentru $|\omega| > \omega_o$, $|\log|H(\omega)|| \longrightarrow \infty$, deci integrala nu poate fi convergentă. Prin urmare **FTJ ideal nu poate fi realizabil**. El poate fi aproximat, având definit un criteriu de eroare, oricât de bine , dar el însuşi este irealizabil.

Se ştie că - vezi relaţia (4.71) şi figura 4.9 b - răspunsul la impuls ce are ca transformată Fourier răspunsul în frecvenţă $p_{\omega_c}(\omega)$ al FTJ ideal este:

$$h(t) = \frac{\sin\omega_c t}{\pi t} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{7.3}$$

Se vede că h(t) nu descrie un sistem cauzal. Pentru h(t) translatat cu $t_o > 0$, corespunde un răspuns în frecvenţă :

$$h(t-t_o) = \frac{\sin\omega_c(t-t_o)}{\pi(t-t_o)} \longleftrightarrow H_{t_o}(\omega) = e^{-j\omega t_o} p_{\omega_c}(\omega) \quad . \tag{7.4}$$

Se observă că $|H_{t_o}(\omega)| = |H(\omega)| = p_{\omega_c}(\omega)$ dar faza nu mai este nulă ci are expresia:

$$\Phi_{t_o}(\omega) = -\omega t_o \quad . \tag{7.5}$$

Timpul de întârziere de grup, asupra căruia se va reveni la studiul modulaţiei, se defineşte prin minus derivata caracteristicii de fază în raport cu frecvenţa:

$$\tau_g(\omega) = \frac{-d\Phi(\omega)}{d\omega} \quad . \tag{7.6}$$

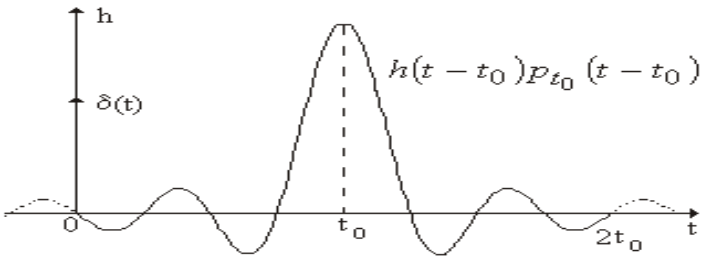


Fig. 7.2 Răspunsul la impuls al FTJ ideal deplasat cu t_o şi trunchiat la suportul [0 , $2t_o$] .

În cazul de faţă $\tau_g = t_o$, translaţia în raport cu originea (luată la momentul de aplicare al impulsului unitar) a răspunsului h(t). Dacă t_o este suficient de mare se poate trunchia, aşa cum se arată în figura 7.2, răspunsul deplasat prin înmulţirea acestuia cu fereastra temporală cu suportul $[0, 2t_0]$, $p_{t_o}(t-t_o)$. În principiu, răspunsul la impuls $h(t-t_o)\cdot p_{t_o}(t-t_o)$ este cauzal şi deci realizabil. Aşa cum s-a arătat însă în figura 4.13 nu mai obţinem un răspuns în frecvenţă ideal ci unul afectat de fenomenul Gibbs. Cu cât t_o este mai mare, cu atât aproximarea ce se realizează este mai bună. Putem deci utiliza în calcule FTJ ideal, ca o limită ce poate fi aproximată oricât de bine în eroare medie pătratică. Reamintim că exprimarea spectrului semnalului de la ieşirea FTJ ideal Y(ω) în funcţie de X(ω) (spectrul semnalului de la intrarea sa) este:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & , \ |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \ |\omega| > \omega_c \end{cases} . \tag{7.7}$$

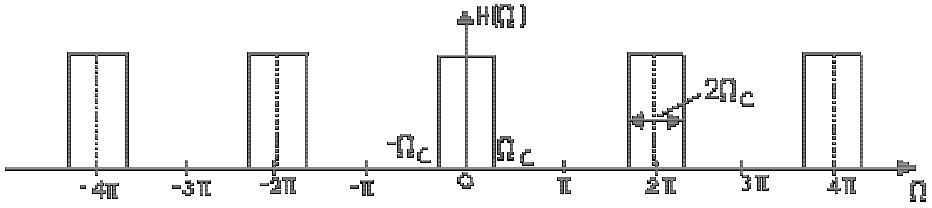


Fig. 7.3 Răspunsul în frecvenţă al unui FTJ numeric ideal.

Un filtru numeric (digital) de tip trece jos (TJ) ideal are răspunsul în frecvenţă H(Ω) prezentat în figura 7.3. Această funcţie este periodică de perioadă 2π. Expresia răspunsului în frecvenţă al acestui filtru este:

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & , \ |\Omega - 2k\pi| < \Omega_c \quad k \in Z \\ 0 & , \ pentru \ rest \end{cases} . \tag{7.8}$$

Răspunsul la impuls se determină aplicând relaţia de inversare (5.41) :

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n}\,d\Omega = \frac{\sin\Omega_c n}{\pi n} \qquad n \in Z \quad . \tag{7.9}$$

Este vorba despre un sistem necauzal. O versiune deplasată şi trunchiată a răspunsului la impuls obţinut, $h[n-n_o]$, poate fi realizată cu urmările care se cunosc şi anume apariţia oscilaţiilor în modulul răspunsului în frecvenţă. Dacă n_o este suficient de mare aproximarea în medie pătratică a caracteristicii ideale poate fi oricât de bună. În consecinţă, deşi irealizabilă ca limită teoretică o astfel de caracteristică poate fi utilizată în calcule.

7.1.2 Filtrul trece sus ideal

Pentru filtrarea trece sus (TS) ideală a semnalelor în timp continuu se utilizează un sistem având răspunsul în frecvenţă arătat în figura 7.4:

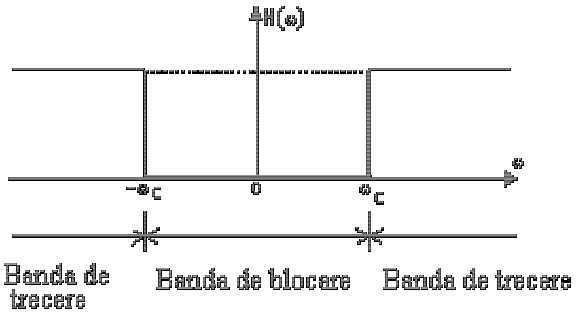


Fig. 7.4 Răspunsul în frecvenţă al unui filtru trece sus ideal.

$$H_{TS}(\omega) = \begin{cases} 0 \;, & |\omega| < \omega_c \\ 1 \;, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases} \quad . \tag{7.10}$$

Un astfel de răspuns poate fi scris şi sub forma :

În virtutea teoremei

$$H_{TS}(\omega) = 1 - p_{\omega_c}(\omega) \quad . \tag{7.11}$$

Paley-Wiener nici acest filtru nu este realizabil nefiind cauzal. Răspunsul la impuls se obţine aplicând relaţiei (7.11) transformarea Fourier inversă:

$$h_{TS}(t) = \delta(t) - \frac{\sin\omega_c t}{\pi t} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad . \tag{7.12}$$

Se poate realiza o aproximare a filtrului trece sus ideal, discuţia fiind asemănătoare cu cea din cazul FTJ ideal. Vom menţiona aici două lucruri. În primul rând, aşa cum s-a

văzut la studiul distribuţiilor şi impulsul Dirac poate fi aproximat oricât de bine, deci prezenţa sa nu ridică probleme principiale în ceea ce priveşte aproximarea. În al doilea rând nu există filtre de aproximare care să nu cadă ca modul peste o anumită frecvenţă. În acest sens nu există filtre trece sus reale ci doar filtre trece bandă. Dacă însă căderea caracteristicii de modul începe dincolo de domeniul frecvenţelor ce prezintă interes, filtrul aproximant poate fi considerat de tip trece sus.

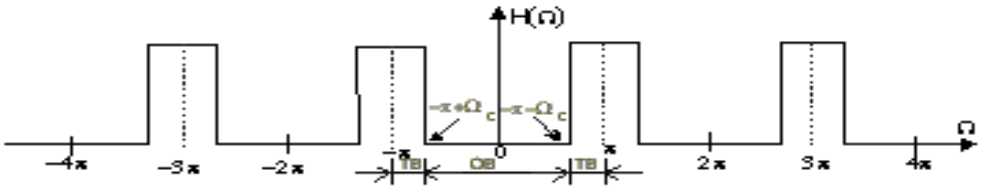


Fig. 7.5 Răspunsul în frecvenţă al unui filtru numeric trece sus ideal.

Răspunsul în frecvenţă al unui filtru numeric trece sus ideal este arătat în figura 7.5. Pentru el:

$$|H_{\mathrm{TS}}(\Omega)| = \begin{cases} 1 \ , & |\Omega - (2k+1)\pi| < \Omega_c \quad k \in Z \\ 0 \ , & \hat{i}n \ rest \end{cases} \qquad \textbf{(7.13)}$$

sau:

$$H_{\mathrm{TS}}(\Omega) = 1 - p_{\Omega_c}(\Omega) * \delta_{2\pi}(\Omega - \pi) \quad . \qquad \textbf{(7.14)}$$

Răspunsul la impuls poate fi determinat fie din (7.13) fie din (7.14). Considerând (7.13) avem :

$$h_{\mathrm{TS}}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\pi+\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\Omega_c}^{\pi} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega n} d\Omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega \ .$$

sau:

$$h_{\mathrm{TS}}[n] = \delta[n] - \frac{\sin\Omega_c n}{\pi n} \ , \quad n \in Z \ . \qquad \textbf{(7.15)}$$

O versiune deplasată cu n_o , $h_{TS}[n-n_o]$ şi trunchiată corespunzător este realizabilă. Ea aproximează caracteristica ideală în medie pătratică, aproximarea fiind cu atât mai bună cu cât n_o este mai mare şi trunchierea mai puţin severă.

7.1.3 Filtrul trece bandă ideal

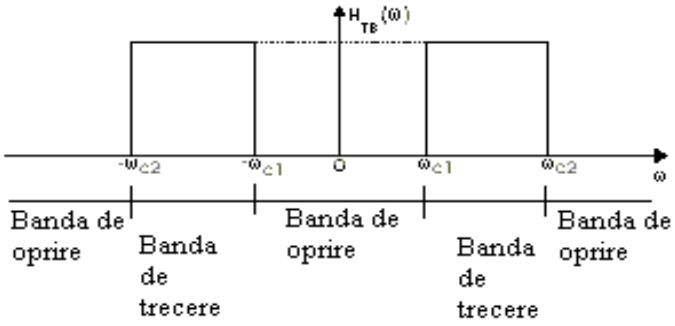


Fig. 7.6 Răspunsul în frecvenţă al unui filtru trece bandă ideal.

Filtrarea trece bandă (TB) a semnalelor continuale se realizează cu un filtru având răspunsul în frecvenţă arătat în figura 7.6. Expresia răspunsului în frecvenţă al filtrului trece bandă ideal este :

$$H_{\text{TB}}(\omega) = \begin{cases} 1 \ , & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 0 \ , & \textit{în rest} \end{cases} \quad . \tag{7.16}$$

Se remarcă prezenţa a două frecvenţe de tăiere, una inferioară şi una superioară. Vom observa că $H_{TB}(\omega)$ se poate pune şi sub forma:

$$H_{\text{TB}}(\omega) = p_{\omega_{c2}}(\omega) - p_{\omega_{c1}}(\omega) \quad , \tag{7.17}$$

şi deci:

$$h_{\text{TB}}(t) = \frac{\sin \omega_{c2} t}{\pi t} - \frac{\sin \omega_{c1} t}{\pi t} \quad . \tag{7.18}$$

Ca şi în cazul FTJ ideal, şi pentru FTB ideal poate fi realizat un filtru ce aproximează oricât de bine modulul răspunsului ideal (în medie pătratică).

Răspunsul în frecvenţă al unui filtru numeric ideal de tip trece bandă este cel din figura 7.7. În domeniul $[-\pi , \pi)$, expresia răspunsului în frecvenţă este:

$$H_{TB}(\Omega) = \begin{cases} 1 \ , & \Omega_{c1} < |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 0 \ , & \textit{în rest} \end{cases} \quad , \quad \Omega \in [-\pi, \pi) \quad , \tag{7.19}$$

ea fiind repetată prin convoluţie cu distribuţia periodică:

$$H_{\text{TB}}(\Omega) = H_o(\Omega) * \delta_{2\pi}(\Omega) \quad . \tag{7.20}$$

Răspunsul la impuls rezultă imediat, aplicând relaţiei (7.19) formula de inversare

sau observând că de fapt caracteristica trece bandă numerică este diferenţa a două caracteristici trece jos numerice. Oricum rezultă:

$$h_{TB}[n] = \frac{\sin\Omega_{c2} n}{\pi n} - \frac{\sin\Omega_{c1} n}{\pi n} \quad . \tag{7.21}$$

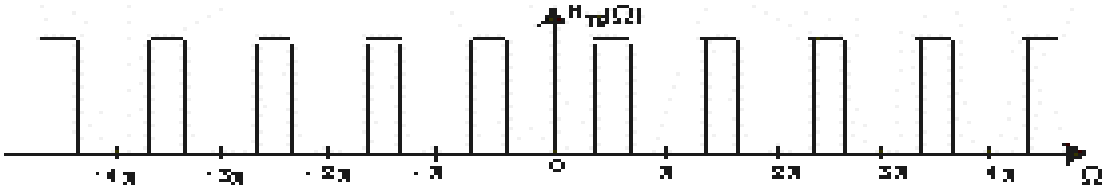


Fig. 7.7 Răspunsul în frecvenţă al unui FTB ideal numeric.

Evident şi această caracteristică poate fi aproximată oricât de bine, în medie pătratică.

7.1.4 Filtrul opreşte bandă ideal

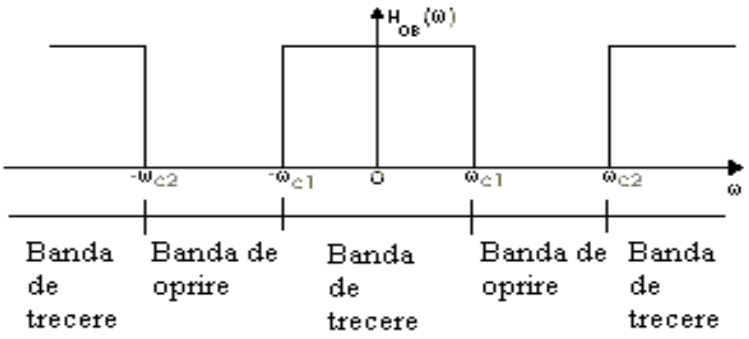


Fig. 7.8 Răspunsul în frecvenţă al unui filtru opreşte bandă (FOB) ideal.

Filtrul opreşte bandă ideal (OB) are răspunsul în frecvenţă complementul faţă de 1 al răspunsului în frecvenţă al FTB ideal - figura 7.8. Se remarcă două frecvenţe de oprire (tăiere), ω_{c1} şi ω_{c2}. Avem:

$$H_{OB}(\omega) = \begin{cases} 0 \ , \ \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 1 \ , \ \hat{i}n \ rest \end{cases} \quad . \tag{7.22}$$

Răspunsul la impuls se deduce ţinând seama de observaţia făcută în legătură cu FOB. El are forma:

$$h_{OB}(t) = \delta(t) - \frac{\sin\omega_{c2} t}{\pi t} + \frac{\sin\omega_{c1} t}{\pi t} \quad . \tag{7.23}$$

Ca exerciţiu se recomandă desenarea răspunsului în frecvenţă al unui FOB numeric ideal şi deducerea formelor pentru $H_{OB}(\Omega)$ şi $h_{OB}[n]$.

7.2 Aproximarea caracteristicilor filtrelor ideale

Ulterior se va arăta că, pornind de la răspunsul în frecvenţă al unui filtru trece jos, se pot deduce celelalte tipuri de răspunsuri în frecvenţă, prin transformări ale variabilei independente ω (sau Ω).

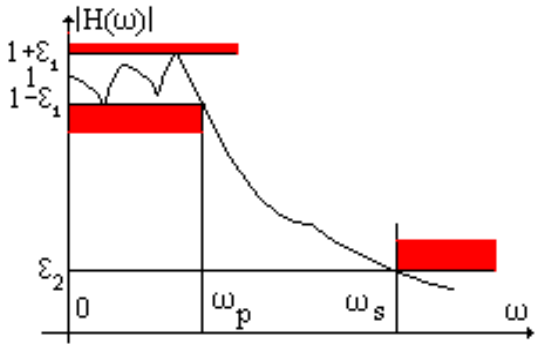


Fig. 7.9 Specificarea gabaritului admis pentru $|H(\omega)|$ al unui FTJ.

Cum caracteristicile ideale nu pot fi decât aproximate, trebuie găsită o modalitate de a specifica erorile admise şi apoi o modalitate de a proiecta filtrul ce se încadrează în limitele admise. În figura 7.9 se arată modul de definire al domeniilor interzise pentru curba $|H(\omega)|$. Este reprezentată numai semiaxa pozitivă, $|H(\omega)|$ fiind o funcţie pară.

În domeniul $0 \le \omega \le \omega_p$ eroarea admisă este ϵ_1 : $|1-|H(\omega)|| \le \epsilon_1$. Se spune că banda $[0, \omega_p]$ este banda de trecere a filtrului iar ϵ_1 este eroarea maximă a modulului $|H(\omega)|$ admisă în banda de trecere.

În domeniul $\omega_s \le \omega$ eroarea admisă este ϵ_2 : $|H(\omega)| \le \epsilon_2$. Se spune că banda $[\omega_s , \infty)$ este banda de oprire a filtrului iar ϵ_2 este eroarea maximă admisă în banda de trecere pentru $|H(\omega)|$.

Domeniul frecvenţelor $[\omega_p , \omega_s]$ constituie aşa numita bandă de tranziţie.

Stabilirea erorilor admise precum şi a celor două frecvenţe, ω_p şi ω_s se face din considerente legate de problema tehnică ce trebuie rezolvată.

Filtrul având caracteristica marcată cu **1** în figura 7.9 este acceptabil, satisfăcând, la limită, toate cerinţele de eroare impuse. Filtrul având caracteristica marcată cu **2** satisface cu prisosinţă cererile dar, probabil, este prea scump pentru rezolvarea temei de proiectare.

Două modalităţi de aproximare a caracteristicilor filtrelor trece jos ideale sunt mai des utilizate:

i) aproximarea de tip maxim plat, ce dă naştere filtrelor de tip maxim plat sau Butterworth
ii) aproximarea cu ondulaţii constante în banda de trecere, ce dă naştere filtrelor de tip Cebîşev.

Am discutat doar problema aproximării modulului răspunsului în frecvenţă dar uneori caracteristica de fază cu variaţie liniară trebuie reprodusă cu erori impuse. Se naşte astfel încă o categorie de filtre, cele de tip Bessel.

Prin teoria aproximării se urmăreşte realizarea unui circuit, care se poate construi fizic şi ale cărui caracteristici de frecvenţă să aproximeze cu o eroare cât mai mică caracteristicile de frecvenţă ale filtrului ideal. În general se lucrează cu două tipuri de

eroare de aproximare, eroarea în sens Taylor şi eroarea în sens Cebîşev. În cazul aproximării de tip Taylor se obţine o aplatizare maximă a erorii. Cu alte cuvinte, pe baza acestui tip de aproximare, se obţine, dintre toate funcţiile de sistem (cu care se poate aproxima funcţia de sistem a filtrului ideal), aceea care dă cea mai mică eroare, în jurul unei frecvenţe impuse ω_c.

În cazul aproximării de tip Cebîşev se determină din mulţimea aproximărilor posibile aceea care minimizează valoarea maximă a erorii într-un interval de frecvenţe impus. Cele două criterii de aproximare descrise mai sus se pot formula matematic astfel:

$$H_B(\omega) = \min_{H(\omega)} |H_i(\omega_o) - H(\omega_o)| \;;\; H_C(\omega) = \min\left\{ \max_{\omega \in [\omega_1, \omega_2]} |H(\omega) - H_i(\omega)| \right\},$$

unde cu $H_i(\omega)$ s-a notat răspunsul în frecvenţă al filtrului ideal, cu $H(\omega)$ răspunsul în frecvenţă al unuia dintre sistemele de aproximare iar cu ω_o , frecvenţa în jurul căreia se realizează aplatizarea maximă specifică aproximării Butterworth.

7.2.1 Aproximarea de tip maxim plat

Vom face câteva observaţii preliminare. Fie h(t) răspunsul la impuls al unui sistem cauzal: h(t) <–> H(s) = H_u(s) . Pătratul modulului răspunsului în frecvenţă este $|H(j\omega)|^2$ = $H(j\omega)H^*(j\omega)$. Dar pentru h(t) $\in \mathbb{R}$, $H^*(j\omega) = H(-j\omega)$ şi deci:

$$H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = \left[H(s)H(-s)\right]_{s=j\omega} \;;\; H(s) = H_u(s) \qquad \textbf{(7.24)}$$

Dacă se notează $F(\omega) = |H(j\omega)|^2$ atunci se poate constata că F conţine numai puteri pare ale lui ω. Într-adevăr, fie:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \;\; ; \;\; H(s)H(-s) = \frac{N(s)N(-s)}{D(s)D(-s)} \;\; .$$

Este acum evident că atât numărătorul cât şi numitorul produsului H(s)H(-s), N(s)N(-s) respectiv D(s)D(-s) sunt funcţii pare de s, ceea ce înseamnă că nu au decât puteri pare ale lui s. În consecinţă H(jω)H(-jω) are numai puteri pare ale lui jω, adică numai puteri pare ale lui ω. Se poate afirma că :

$$|H(j\omega)|^2 = F(\omega^2) \;\; . \qquad \textbf{(7.25)}$$

Se consideră funcţia:

$$|H_B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \;\; . \qquad \textbf{(7.26)}$$

Ea este de forma (7.25). Fie acum funcţia f şi derivatele ei:

$$f(x) = x^n \;\; ; \;\; f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k} \;\; , \;\; 0 \le k \le n \;\; . \qquad \textbf{(7.27)}$$

Avem f(0) = 0 , f'(0) = 0 , f''(0) = 0 , ... , $f^{(n-1)}(0) = 0$ dar $f^{(n)}(0) \neq 0$.

Funcţia f(x) are valoarea nulă în origine, ca şi primele ei n-1 derivate. Variaţia ei în jurul originii este deci extrem de redusă. În consecinţă 1+f(x), pentru valori mici ale lui x, variază monoton şi extrem de încet. Inversa sa 1/(1+f(x)) este tot monotonă şi cu scădere lentă pentru argumente x mici. Pe măsură ce x creşte f(x) creşte foarte repede, astfel că 1/(1+f(x)) ⟶ 0 .

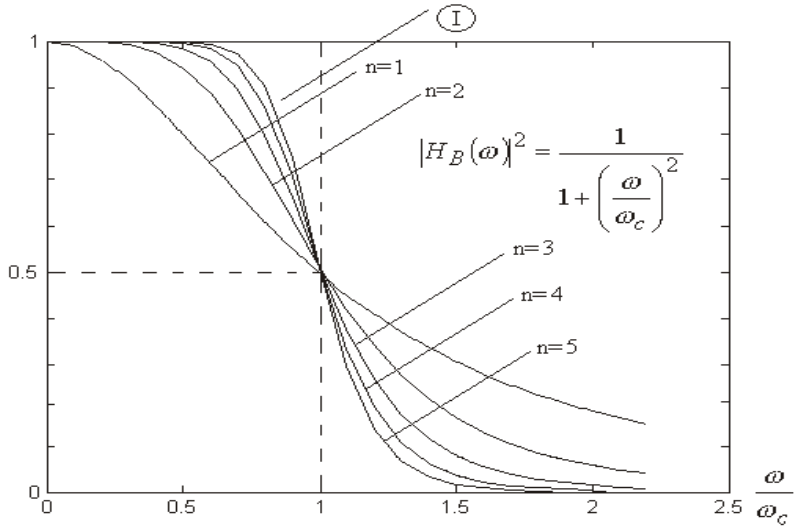


Fig. 7.10 Pătratul modulului răspunsului în frecvenţă pentru filtrele de tip Butterworth de ordinele 1, 2, 3 şi 5.

Dar cu notaţia $(\omega/\omega_c)^2 = x$ relaţia (7.26) este de tipul discutat. Ea aproximează monoton pătratul modulului răspunsului în frecvenţă al filtrului ideal, după cum se vede şi în figura 7.10. Sunt trasate curbele pentru n=1, n=2, n=3 şi n=5. Pe măsură ce n creşte, $|H(\omega)|^2$ se apropie tot mai mult de curba întreruptă I ce marchează în figura 7.10 caracteristica filtrului ideal. Aproximarea nu se face oscilând în jurul valorii ce se aproximează ci în mod monoton.De aici şi numele aproximării. Se spune că n este ordinul filtrului Butterworth. Indiferent de ordinul filtrului, n : $|H_B(\omega_c)|^2 = 0{,}5$ sau $|H_B(\omega_c)| = 1/\sqrt{2}$. La frecvenţa ω_c răspunsul filtrului Butterworth scade deci cu 3 dB.

Pentru a determina răspunsul în frecvenţă sau transformata Laplace unilaterală $H_u(s)$ a răspunsului la impuls (care este egală cu transformata bilaterală, h(t) fiind cauzal) pornim de la relaţia (7.24):

$$\left[H(s)H(-s)\right]_{s=j\omega} = |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{j\omega}{j\omega_c}\right)^{2n}} = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n}}\right]_{s=j\omega} \;\; . \qquad \textbf{(7.28)}$$

unde n este ordinul filtrului. Se obţine deci:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n}} \quad . \tag{7.29}$$

Polii produsului H(s)H(-s) sunt soluţiile ecuaţiei :

$$\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2n} = -1 = \cos\pi + j\sin\pi \quad . \tag{7.29'}$$

Aplicând relaţia de extragere a radicalului dintr-un număr complex găsim:

$$s_k = -\omega_c \sin\frac{\pi+2k\pi}{2n} + j\omega_c \cos\frac{\pi+2k\pi}{2n} \quad ; \quad 0 \le k \le 2n-1 \quad , \tag{7.29''}$$

sau:

$$s_k = \omega_c \cos\left[\frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right] + j\omega_c \sin\left[\frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right] \quad ; \quad 0 \le k \le 2n-1 \quad , \tag{7.29'''}$$

Polii, în număr de 2n , sunt jumătate ai funcţiei H(s) , jumătate ai funcţiei H(-s) . Deoarece h(t) este cauzal, polii lui H(s) trebuie să fie situaţi în semiplanul stâng, $\mathrm{Re}\{s_k\} < 0$. Prin urmare, folosind relaţiile lui Viète relaţia (7.28) se mai poate scrie:

$$H(s) = \frac{(-1)^n s_0 s_1 \ldots s_{n-1}}{(s-s_0)(s-s_1)\ldots(s-s_{n-1})} \quad . \tag{7.30}$$

Dar:

$$s_0 s_1 \ldots s_n = \omega_c^n \left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{2n}(1+3+\ldots+2n-1)\right] + j\sin\left[\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{2n}(1+3+\ldots 2n-1)\right]\right\} =$$
$$= \omega_c^n \left[\cos n\pi + j\sin n\pi\right] = (-1)^n \omega_c^n \quad .$$

În final relaţia (7.30) devine:

$$\left.\begin{aligned} H_B(s) &= \frac{\omega_c^n}{(s-s_0)(s-s_1)\ldots(s-s_n)} \\ s_k &= \omega_c\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2n}\pi\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right] \end{aligned}\right| \quad k = 0,1\ldots,n-1 \quad . \tag{7.31}$$

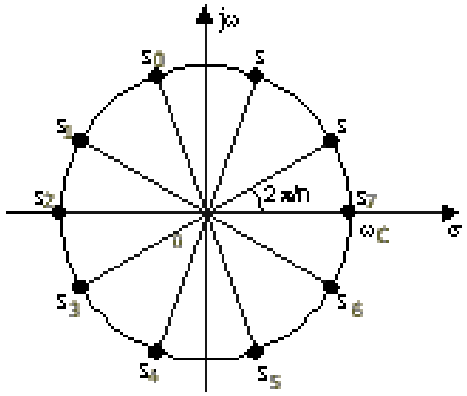


Fig. 7.11 Polii produsului H(s)H(-s) pentru filtrul Butterworth n = 5 .

În figura 7.11 se arată plasarea polilor pentru cazul n=5. După cum se poate vedea, cei 10 poli sunt plasaţi pe un cerc de rază ω_c, pasul polar fiind $2\pi/n$. Jumătate din poli (5) , corespunzători valorilor k=0, 1, 2, 3, 4 sunt plasaţi în semiplanul stâng. Ei sunt ai unui sistem cauzal. Polii din semiplanul drept sunt ai funcţiei H(-s) şi nu interesează.

După ce forma (7.31) este determinată rezultă ecuaţia diferenţială a filtrului. Se poate recurge la o formă de implementare (de exemplu forma canonică II).

Vom menţiona în încheiere că prin introducerea variabilei s/ω_c , variabilă normată relaţia (7.31) devine:

$$H_B(s) = \frac{1}{(s-s_0)(s-s_1)\ldots(s-s_{n-1})}$$

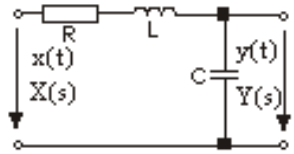
$$s_k = \omega_c\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k+1}{2n}\pi\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right] \quad k=0,1\ldots,n-1 \ . \qquad \textbf{(7.31')}$$

Nu se marchează în mod strict variabila normată, dar numărătorul unitar ne arată clar utilizarea ei. Numitorii normaţi ai funcţiei H(s) se găsesc tabelaţi în literatura de specialitate [73].

Pentru n=2 şi n=3 :

$$H_B(s) = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1} \quad ; \quad H_B(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1} \qquad \textbf{(7.32)}$$

Vom considera circuitul pasiv din figura 7.12. La intrarea sa se aplică tensiunea x(t) <–> X(s) de la un generator de tensiune cu rezistenţa internă nulă. La ieşirea circuitului, considerat în gol, se obţine tensiunea y(t) <–> Y(s). Funcţia sistem a circuitului se poate deduce după cum urmează:



$$\frac{X(s)}{\ldots + sL + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{1}{sC} = Y(s) \quad ;$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2LC+sRC+1} \qquad \textbf{(7.33)}$$

Fig. 7.12 Circuit RLC pasiv.

Coeficientul lui s^2 de la numitorul lui $H_B(s)$ din relaţia (7.31') este însă 1, aşa că vom transforma relaţia în:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{sR}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + s\frac{R}{L} + \omega_c^2} \quad ; \quad \omega_c^2 = \frac{1}{LC} \quad . \qquad \textbf{(7.34)}$$

Normarea variabilei s (deci a frecvenţei) se face prin împărţire cu ω_c:

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)\frac{R}{\omega_c L} + 1} \quad . \qquad \textbf{(7.35)}$$

Pentru ca circuitul să reprezinte un filtru Butterworth de ordinul II este necesar ca - vezi relaţia (7.32) - să avem următoarele relaţii de dimensionare:

$$\omega_c^2 = \frac{1}{LC} \quad ; \quad \frac{R}{\omega_c L} = \sqrt{2} \quad . \qquad \textbf{(7.36)}$$

Relaţiile (7.36) permit, alegând R, să determinăm L şi C. De obicei R se impune din considerente tehnice, reprezentând rezistenţa internă a generatorului. În sistemele de telefonie R_o=600 Ω. Se recurge de aceea la normarea elementelor schemei faţă de o valoare R_o de referinţă şi faţă de ω_c. Valoarea rezistenţei normate este $R_n = R/R_o$. Pentru inductivitate se normează la R_o , impedanţa ei calculată la frecvenţa de tăiere ω_c : $L_n = \omega_c L/R_o$. La fel capacitatea normată este: $C_n = \omega_c C R_o$. În tabelul 7.1 sunt sintetizate relaţiile de normare şi de denormare.

Tabelul 7.1 Relaţiile de normare şi de denormare aplicate la filtre

Valoarea nenormată	ω	R	L	C
Relaţia de normalizare	$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_c}$	$R_n = \frac{R}{R_o}$	$L_n = \frac{\omega_c L}{R_o}$	$C_n = \omega_c C R_o$
Relaţia de denormalizare	$\omega = \omega_n \omega_c$	$R = R_n R_o$	$L = \frac{L_n R_o}{\omega_c}$	$C = \frac{C_n}{\omega_c R_o}$

În cazul considerat în figura 7.12, dacă $R = R_o$, chiar rezistenţa de normare, atunci $R_n = 1$, şi din relaţiile (7.36) rezultă:

$$L_n = \frac{\omega_c L}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad C_n = \omega_c C R_0 = \frac{R_0}{\omega_c L} = \frac{1}{L_n} = \sqrt{2} \quad .$$

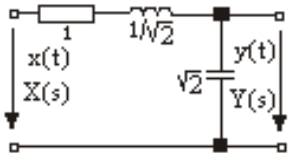


Fig. 7.13 Schema filtrului Butterworth de ordinul II.

Schema filtrului de ordinul II Butterworth cu elementele normate este prezentată în figura 7.13. Atragem atenţia asupra faptului că în cele mai multe cazuri nu se marchează distinct elementele normate. Frecvenţa de tăiere unitară şi o rezistenţă unitară în schemă sunt însă indicii ale faptului că elementele schemei sunt normate (normalizate). Elementele normate sunt adimensionale. Totuşi în literatura americană ele apar cu "dimensiuni". Astfel, în schema din figura 7.13 pot fi trecute valorile de 1Ω, $1/\sqrt{2}$ H şi $\sqrt{2}$ F!

Exemplu *Pentru $R = 600\,\Omega$ şi $\omega_c = 2\pi \cdot 10^3$ rad/sec elementele nenormate (reale) ale schemei filtrului Butterworth de ordinul II sunt:*

$$L = \frac{600}{\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot 10^3} \cong 67{,}5\ mH \quad ; \quad C = \frac{\sqrt{2}}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 600} \cong 375\ nF \quad .$$

Filtrul Butterworth de ordinul III normat are schema prezentată în figura 7.14. Astfel de scheme se găsesc în literatura de specialitate [73].

Prezintă interes panta caracteristicii de modul a unui filtru Butterworth de ordin n:

$$20\log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \cong -20n \log \frac{\omega}{\omega_c} \quad ; \quad \omega \geq 10\omega_c \quad . \qquad \textbf{(7.37)}$$

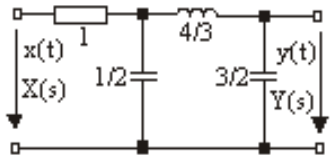


Fig. 7.14 Schema filtrului Butterworth de ordinul III normat.

Ea este de -20n dB/dec sau -12n dB/octavă. Spre exemplu în cazul filtrului de ordinul II, având $\omega_c = 2\pi 10^3$ rad/sec, aplicând la intrarea sa un semnal sinusoidal cu frecvenţa de $2\pi 10^4$ rad/sec şi amplitudinea de 1V, la ieşirea filtrului amplitudinea sinusoidei este de numai 10mV, deoarece între ω_c şi $\omega = 2\pi 10^4$ avem o decadă.

7.2.2 Transformări ale filtrelor trece jos

Dacă în funcţia sistem $H_B(s)$ a filtrului Butterworth se face transformarea de variabilă:

$$\frac{s}{\omega_c} \longrightarrow \frac{\omega_c}{s} \quad sau \quad s \longrightarrow \frac{1}{s} \tag{7.38}$$

(dacă variabila este normată) , se obţine caracteristica unui filtru de tip Butterworth (maxim plat) trece sus. Substituind în (7.28) se găseşte:

$$H_{TS}(s)\,H_{TS}(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_c}{js}\right)^{2n}}$$

în care punând s = jω rezultă:

$$|H_{TS}(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{2n}} \tag{7.39}$$

unde cu H_{TS} s-a notat răspunsul în frecvenţă al filtrului trece sus. În figura 7.15 se arată caracteristicile $|H_{TS}(\omega)|$ pentru n=3 şi n=5. Cu cât ordinul filtrului este mai mare, cu atât mai bine se aproximează caracteristica ideală I.

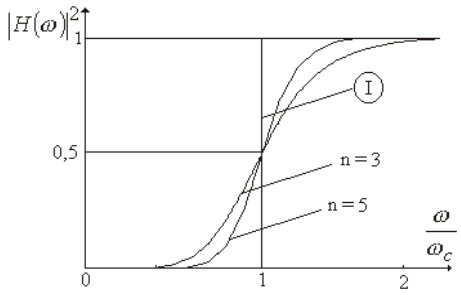


Fig. 7.15 Caracteristica $|H_{TS}(\omega)|^2$ pentru filtrele Butterworth TS de ordine III şi V.

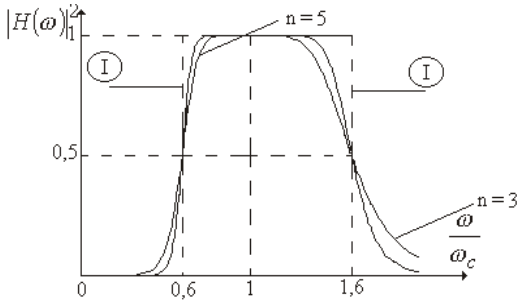


Fig. 7.16 Caracteristica $|H_{TB}(\omega)|^2$ pentru filtrele TB Butterworth de ordine III şi V.

Ne vom referi la structura filtrului din figura 7.13. Reactanţa inductivă normată ωL sau sL în planul s se transformă, prin schimbarea s –> 1/s , în :

$$sL \longrightarrow \frac{L}{s} = \frac{1}{s\dfrac{1}{L}} \quad . \tag{7.40}$$

În consecinţă, inductivitatea normată L dintr-o schemă TJ devine capacitatea normată 1/L într-o schemă TS. În mod asemănător, 1/sC se transformă în :

$$\frac{1}{sC} \longrightarrow \frac{s}{C} = s\frac{1}{C} \quad . \tag{7.41}$$

Prin urmare capacitatea normată C din schema TJ devine inductivitatea normată 1/C în schema TS.

O schimbare de variabilă :

$$\frac{s}{\omega_c} \rightarrow \frac{s^2 + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(\omega_{c2} - \omega_{c1})s} \quad ; \quad \omega_c^2 = \omega_{c1}\omega_{c2} \quad , \tag{7.42}$$

sau în versiune normată :

$$s \rightarrow \frac{s^2 + 1}{\delta s} \quad ; \quad \delta = \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}} \quad , \tag{7.42'}$$

duce la transformarea funcţiei H(s) de tip trece jos într-o funcţie $H_{TB}(s)$ corespunzătoare unui filtru de tip TB.

Se deduce progresiv din (7.27) că:

$$|H_{TB}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\dfrac{\omega_{c1}\omega_{c2} - \omega^2}{(\omega_{c2} - \omega_{c1})\omega}\right]^{2n}} \tag{7.43}$$

$$|H_{TB}(\omega_{c1})|^2 = |H_{TB}(\omega_{c2})|^2 = 0{,}5 \; ; \; |H_{TB}\left(\sqrt{\omega_{c1}\,\omega_{c2}}\right)|^2 = 1$$

Dacă avem în vedere relaţia (7.42'), o reactanţă inductivă normată sL dintr-o schemă de tip TJ se transformă în :

$$sL \rightarrow L\frac{s^2+1}{\delta s} = s\frac{L}{\delta} + \frac{1}{s\dfrac{\delta}{L}} \quad . \tag{7.44}$$

O inductivitate normată L dintr-o schemă TJ se înlocuieşte cu o inductivitate L/δ înseriată cu o capacitate δ/L , ambele normate, pentru a obţine o schemă de tip TB.

Pentru admitanţa capacitivă normată sC avem:

$$sC \rightarrow C\frac{s^2+1}{\delta s} = s\frac{C}{\delta} + \frac{1}{s\frac{\delta}{C}} \quad . \qquad \textbf{(7.45)}$$

În consecinţă, o capacitate normată C dintr-o schemă TJ se înlocuieşte cu o capacitate C/δ conectată în paralel cu o inductivitate δ/C , ambele normate, pentru a obţine o schemă de tip TB. În figura 7.16 este prezentată funcţia $\left|H_{TB}(\omega)\right|^2$ pentru filtrele Butterworth de ordine III şi V.

Tabelul 7.2 Transformările elementelor FTJ pentru schemele de tip TS, TB şi OB

Compo-nentele din filtrul : / Componenta din FTJ	R	L	C
TS	R	1/L	1/C
TB	R	L/δ δ/L	δ/C C/δ
OB	R	Lδ 1/(Lδ)	1/(Cδ) Cδ

Pentru filtrul opreşte bandă se practică transformări inverse celor de la filtrul trece bandă:

$$\frac{s}{\omega_c} \rightarrow \frac{(\omega_{c2} - \omega_{c1})s}{s^2 + \omega_{c1}\omega_{c2}} \quad ; \quad s \rightarrow \frac{\delta s}{s^2 + 1} \quad . \qquad \textbf{(7.46-46')}$$

O admitanţă inductivă 1/sL normată devine :

$$\frac{1}{sL} \rightarrow \frac{s^2 + 1}{L\delta s} = s\frac{1}{L\delta} + \frac{1}{sL\delta} \quad . \qquad \textbf{(7.47)}$$

Prin urmare inductivitatea L normată din schema de tip TJ se înlocuieşte cu o capacitate 1/Lδ conectată în paralel cu o inductivitate Lδ, ambele normate pentru a obţine o schemă tip OB.

Pentru reactanţa capacitivă normată 1/(sC) avem:

$$\frac{1}{sC} \rightarrow \frac{s^2 + 1}{C\delta s} = s\frac{1}{C\delta} + \frac{1}{sC\delta} \quad . \tag{7.48}$$

deci capacitatea normată C din schema tip TJ se transformă într-o inductivitate 1/(Cδ) înseriată cu o capacitate Cδ, ambele normate, în schema de tip OB.

Transformările elementelor FTJ sunt sintetizate în tabelul 2. Deşi s-a exemplificat numai pe cazul filtrelor de tip Butterworth, transformările de frecvenţă precum şi transformările elementelor reactive ale FTJ din tabelul 2 sunt valabile pentru orice clasă de filtre.

7.2.3 Filtrele numerice de tip maxim plat

Pentru forma directă II de implementare din figura 7.17 se scrie prin identifica-rea coeficienţilor :

$$H(\Omega) = \frac{1 + 2e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}}{2 + \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})e^{-2j\Omega}} =$$

$$= \frac{(1 + e^{-j\Omega})^2}{2(1 + e^{-2j\Omega}) + \sqrt{2}(1 - e^{-2j\Omega})} = \frac{4\cos^2\frac{\Omega}{2}}{4\cos\Omega + 2j\sqrt{2}\sin\Omega} \quad . \tag{7.49}$$

Se calculează pătratul modulului răspunsului în frecvenţă :

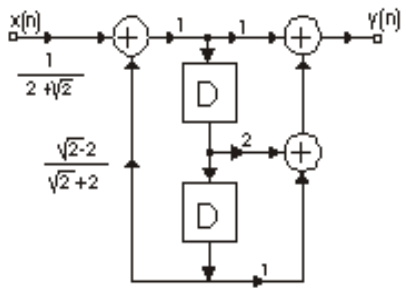


Fig. 7.17 Structura unui FTJ simetric Butterworth de ordinul 2.

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{2\cos^4\frac{\Omega}{2}}{1 + \cos^2\Omega} \quad . \tag{7.50}$$

În final se obţine:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{tg\frac{\Omega}{2}}{tg\frac{\pi}{4}}\right)^4} \quad .$$

Caracteristica $|H(\Omega)|^2$ dată de expresia (7.46) este indicată în figura 7.18. Se observă prin analogie cu relaţia (7.26) caracterul de filtru trece jos de tip maxim plat, având frecvenţa de tăiere $\Omega_c = \pi/2$.

În general forma pătratului modulului răspunsului în frecvenţă este, pentru filtrul maxim plat :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{tg\frac{\Omega}{2}}{tg\frac{\Omega_c}{2}} \right)^{2n}} \quad . \tag{7.51}$$

Studiul altor tipuri de filtre numerice depăşeşte cadrul capitolului urmând a fi abordat ulterior.

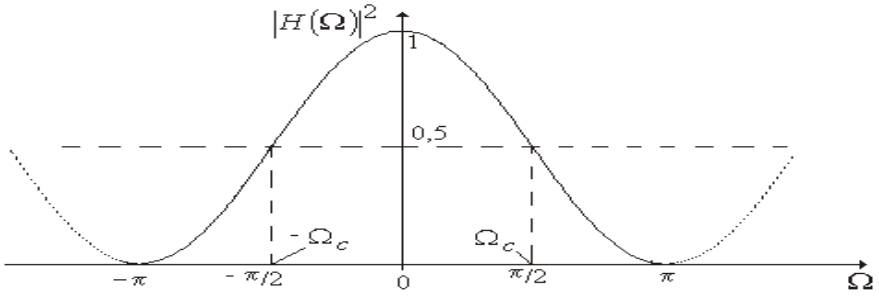


Fig. 7.18 Pătratul modulului răspunsului în frecvenţă al unui filtru numeric de tip Butterworth trece jos de ordinul 2.

7.2.4 Aproximarea de tip Cebîşev în banda de trecere

Polinoamele lui Cebîşev, $C_n(x)$, satisfac relaţia de recurenţă:

$$C_{n+2}(x) = 2xC_{n+1}(x) - C_n(x) \ , \ n \geq 0 \ ;$$
$$C_0(x) = 1 \ , \ C_1(x) = x \quad . \tag{7.52}$$

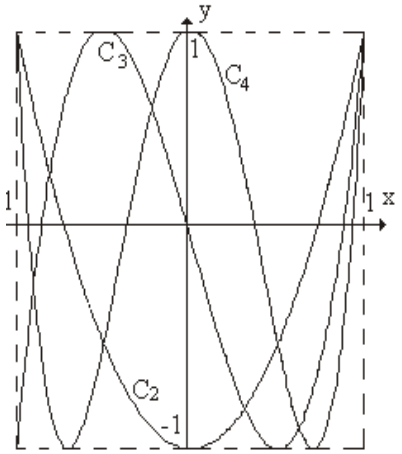


Fig. 7.19 Polinoamele de tip Cebîşev C_2, C_3 şi C_4 .

Pentru $|x| \leq 1$ aceste polinoame au proprietatea $|C_n(x)| \leq 1$, oscilând între 1 şi -1 . Dacă $|x| \to \infty$ atunci $|C_n(x)| \to \infty$, $n \geq 1$.

Funcţia $f(\omega) = \epsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_o)$ are proprietatea $f(\omega)=f(-\omega)$ deci conţine numai puteri pare ale lui ω, $f(\omega) = f(\omega^2)$.

Pentru $0 \leq \omega \leq \omega_o$, $|C_n(\omega/\omega_o)| \leq 1$ sau $0 \leq C_n^2(\omega/\omega_o) \leq 1$ şi deci:

$$0 \leq f(\omega^2) \leq \epsilon^2 \quad , \quad 0 \leq \omega \leq \omega_0 \quad . \tag{7.53}$$

Dacă ω tinde la infinit atunci:

$$\lim_{\omega \to \infty} f(\omega^2) = \infty \quad . \tag{7.54}$$

În consecintă funcţia :

$$F(\omega^2) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \tag{7.55}$$

îndeplineşte condiţiile:

$$1 \geq F(\omega^2) \geq \frac{1}{1+\epsilon^2} \quad , \quad 0 \leq \omega \leq \omega_o \quad ; \quad \lim_{\omega \to \infty} F(\omega^2) = 0 \quad . \tag{7.56}$$

Ea poate fi deci utilizată pentru a aproxima o caracteristică de filtru trece jos ideal, prezentând în banda de trecere [0, ω_o] ondulaţii de mărime constantă. În jargonul tehnic aceste ondulaţii sunt numite "ripluri".

Un filtru trece jos de tip Cebîşev în banda de trecere are pătratul modulului răspunsului în frecvenţă de forma:

$$|H_c(\omega)|^2 = |H_c(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)} \quad . \tag{7.57}$$

Pentru cazurile n=2 şi n=3, $\epsilon \cong 0{,}4$ se dau caracteristicile $|H(\omega)|^2$ în figura 7.20. Se observă că valoarea de normare a frecvenţei, ω_o , este limita benzii de trecere, $\omega_o=\omega_p$.

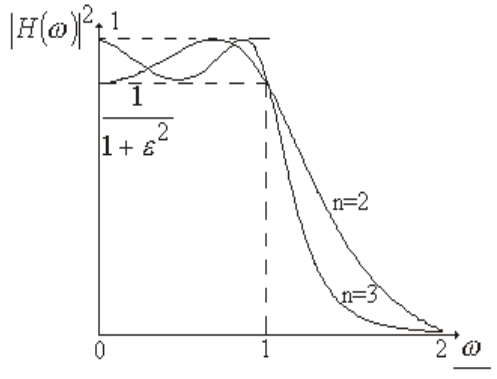


Fig. 7.20 Pătratul modulului răspunsului în frecvenţă al filtrelor Cebîşev de ordinele 2 şi 3.

Determinarea funcţiei de sistem H(s) se face ca şi în cazul filtrelor de tip Butterworth. Rezolvarea ecuaţiei ce are ca soluţie polii produsului H(s)H(-s) şi anume:

$$C_n\left(\frac{s}{j\omega_0}\right) = \pm j\frac{1}{\epsilon} \quad , \tag{7.58}$$

este ceva mai complicată, polii depinzând atât de ordinul filtrului n cât şi de mărimea riplului său, caracterizat de ϵ. În fapt (7.58) reprezintă două ecuaţii (una pentru semnul + şi alta pentru semnul -) rezultând 2n poli, dintre care se alocă lui H(s) numai cei plasaţi în semiplanul stâng.

Pentru variabila s normată (s/ω_o) , formele numitorilor Q(s) ai funcţiei sistem,

$H_c(s) = 1/Q(s)$ sunt date în literatura de specialitate, în funcţie de n şi ϵ [73].

În domeniul frecvenţelor $\omega/\omega_0 \geq 10$ se poate scrie:

$$20\log|H_c(\omega)| \cong -20\log\epsilon - 20\log C_n\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) \quad . \tag{7.59}$$

Ca proprietate asimptotică a polinoamelor Cebîşev se dă în literatura de specialitate:

$$C_n(x) \cong 2^{n-1}x^n \quad , \quad x \gg 1 \quad . \tag{7.60}$$

În consecinţă (7.59) devine:

$$\begin{aligned} 20\log|H_c(\omega)| &\cong -20\log\epsilon - 20(n-1)log2 - 20n\log\frac{\omega}{\omega_0} \\ 20\log|H_c(\omega)| &\cong -20\log\epsilon - 6(n-1) - 20n\log\frac{\omega}{\omega_0} \quad . \end{aligned} \tag{7.61}$$

Panta caracteristicii este, ca şi la filtrele de tip maxim plat, -20n dB/decadă dar valoarea absolută a atenuării este cu 6(n-1) dB mai mare. Un filtru Cebîşev oferă deci o atenuare ceva mai mare decât un filtru Butterworth. Ambele tipuri au însă aceeaşi pantă de cădere a caracteristicii (evident la acelaşi ordin n).Deci viteza de scădere a palierului caracteristicii de modul la trecerea din banda de trecere în banda de blocare (adică în banda de tranziţie) este mai mare în cazul filtrului de tip Cebîşev decât în cazul filtrului Butterworth de acelaşi ordin.

Transformarea unui FTJ de tip Cebîşev în celelalte tipuri (TS,TB,OB) se face utilizând transformările expuse deja şi sintetizate în tabelul 7.2.

Filtrele Cebîşev destinate filtrării semnalelor în timp continuu pot fi modelate (simulate) prin filtre numerice,după cum se va vedea ulterior.

7.3 Circuite analogice de filtrare

Există un mare număr de tehnologii şi principii de realizare a circuitelor analogice de filtrare, utilizate în funcţie de diversele cerinţe impuse: gamă de frecvenţe, factor de calitate, dinamică, dimensiuni, preţ, etc. Dintre acestea amintim: filtrele pasive LC, realizate numai cu capacităţi, inductanţe şi transformatoare utilizate în radiofrecvenţă, filtrele cu rezonatori pasivi (cavităţi electromagnetice în domeniul microundelor sau cristale piezoelectrice în radiofrecvenţă), filtrele active RC realizate cu elemente active de circuit (tranzistoare, amplificatoare operaţionale) şi rezistenţe şi condensatoare utilizate în domeniul frecvenţelor joase. Pentru exemplificare vom prezenta în continuare două dintre cele mai utilizate structuri de filtre active RC.

7.3.1 Filtre active de tip RC cu reacţie multiplă

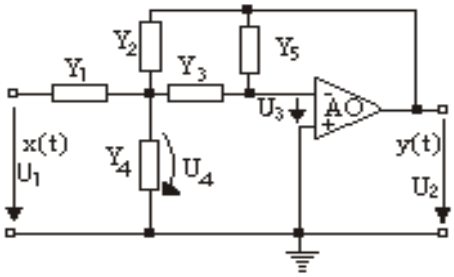


Fig. 7.21 Filtru activ cu reacţie multiplă.

Ca urmare a utilizării în multe domenii a filtrelor active de ordinul 2, având în componenţă pe lângă amplificatoare operaţionale (AO) numai rezistenţe şi capacităţi vom prezenta una dintre cele mai răspândite structuri. Ea este arătată în figura 7.21 şi este cunoscută sub denumirea de structură de filtru activ cu reacţie multiplă.

În domeniul de frecvenţă în care amplificatorul operaţional poate fi considerat ideal, deci având amplificarea în buclă deschisă infinită, rezistenţa de intrare infinită şi rezistenţa de ieşire nulă, este valabilă aproximarea $U_3=0$.

Teorema întâia a lui Kirchoff scrisă în nodul A ne dă relaţia:

$$(U_1-U_4)Y_1+(U_2-U_4)Y_2+(U_3-U_4)Y_3-U_4Y_4 = 0 \quad , \quad U_3 \cong 0 \quad . \tag{7.62}$$

Cum impedanţa de intrare a AO este infinită, curenţii prin Y_3 şi Y_5 sunt egali, deci:

$$(U_2 - U_3)Y_5 = (U_3 - U_4)Y_3 \quad , \quad U_3 \cong 0 \quad . \tag{7.63}$$

Din (7.62) şi (7.63), anulând U_3 şi eliminând U_4 se determină raportul U_2/U_1, funcţia sistem $H(s) = H_u(s)$, deoarece filtrul este evident cauzal:

$$H(s) = \frac{-Y_1 Y_3}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)Y_5 + Y_2 Y_3} \quad . \tag{7.64}$$

Relaţia (7.64) permite dimensionarea filtrelor active de ordinul 2 prin identificarea coeficienţilor cu formele H(s) impuse.

Filtre active cu reacţie multiplă de tip trece jos

Un FTJ are funcţia sistem de tipul:

$$H(s) = \frac{K\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2} \; : \; \omega_o = \omega_c \; ; \; Q = \frac{1}{2\xi} \; . \tag{7.65}$$

Analizând (7.64) comparativ cu (7.65) rezultă că nici Y_1 şi nici Y_3 nu pot fi decât conductanţe (reale). Se alege structura din figura 7.22. Prin înlocuirea admitanţelor $Y_1 \div Y_5$ în relaţia (7.64) se găseşte că:

$$H(s) = \frac{-\dfrac{1}{R_1 R_3 C_4 C_5}}{s^2 + \dfrac{1}{C_4}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}\right)s + \dfrac{1}{R_2 R_3 C_4 C_5}} \quad . \qquad \textbf{(7.66)}$$

Prin identificarea coeficienţilor din relaţiile (7.65) şi (7.66) se obţin relaţiile (7.67):

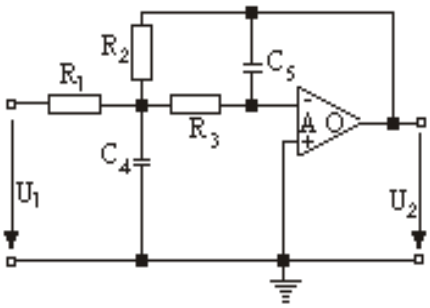


Fig. 7.22 Filtru activ TJ de ordinul 2 cu reacţie multiplă.

$$\omega_o = \omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3 C_4 C_5}} \; ; \; K = -\frac{R_2}{R_1} \; ;$$

$$\frac{1}{Q} = \sqrt{\frac{C_5}{C_4}}\left(\frac{\sqrt{R_2 R_3}}{R_1} + \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_3}}\right) . \qquad \textbf{(7.67)}$$

Datele iniţiale de proiectare sunt $|K|$, $\omega_o = \omega_c$ şi Q . Pentru cinci necunoscute avem doar trei relaţii astfel că două elemente ale schemei se aleg. De obicei se aleg capacităţile de valori rezonabile. Fie $C_4 = C$ şi $C_5 = mC$. Rezolvând sistemul celor trei ecuaţii rezultă trei relaţii de proiectare.

$$R_2 = \frac{1}{2\omega_o m C Q}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4mQ^2(1 + |K|)}\right] \quad , \quad m \le \frac{1}{4Q^2(1 + |K|)} \qquad \textbf{(7.68)}$$

$$R_1 = \frac{R_2}{|K|} \quad ; \quad R_3 = \frac{1}{\omega_o^2 R_2 m C^2} \quad . \qquad \textbf{(7.69-70)}$$

Restricţia impusă lui m în relaţia (7.68) arată că pentru valori fixate ale amplificării şi factorului de calitate ale filtrului, valorile condensatoarelor C_4 şi C_5 nu pot fi alese independent.

Exemplu *Pentru $Q = 1/\sqrt{2}$ se obţine un filtru Butterworth. Fie $|K| = 1$ şi $\omega_o = 2\pi \cdot 100$ rad/ sec. Se alege C=100 nF. Restricţia impusă lui m - (7.68) - conduce la $m \le 1/4$. Din considerente de standardizare $C_5 = (1/10)\cdot 100 = 10nF$. Se calculează cu (7.68) $R_2 = 199{,}7K\Omega$ (se alege semnul ce conduce la rezistenţe de valori acceptabile). Se determină apoi $R_1 = 199{,}7K\Omega$ şi $R_3 = 12{,}68K\Omega$.*

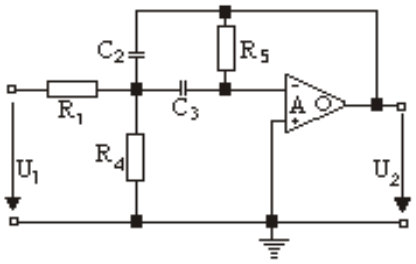
Atragem atenţia că un amplificator operaţional din clasa 741 având produsul

amplificare × bandă ≅ 10^6 (banda în Hz) a cărui caracteristică în buclă deschisă cade cu 20 dB/decadă are la frecvenţa de 1MHz amplificarea în buclă deschisă A≅1; la f = 100 KHz, A ≅ 10 ; la f = 10KHz, A ≅ 100 iar la f = 1KHz, A ≅ 1000 . Prin urmare, la frecvenţe peste 10 KHz, acest tip de amplificator cu greu ar mai putea fi considerat ideal. De aceea se limitează superior domeniul de frecvenţe în care un astfel de filtru va putea fi utilizat. Evident, am putea alege un amplificator cu produsul amplificare × bandă mai mare, ceea ce ar extinde domeniul frecvenţelor utile.

Filtre active cu reacţie multiplă de tip trece bandă

Funcţia de sistem a unui astfel de filtru are forma (7.71).

$$H(s) = H_u(s) = \frac{K(\omega_o/Q)s}{s^2 + (\omega_o/Q)\,s + \omega_o^2} \quad ; \quad \omega_o = \omega_c \quad . \tag{7.71}$$



Comparând (7.71) cu (7.64) rezultă că fie Y_1 fie Y_3 trebuie să fie o susceptanţă capacitivă. Se alege schema din figura 7.23 ce asigură prin R_5 şi polarizarea amplificatorului.

Substituind în (7.64) valorile $Y_1 \div Y_5$ din schemă obţinem:

Fig. 7.23 Filtru activ TB de ordinul 2 cu reacţie multiplă.

$$H(s) = \frac{-s\,\dfrac{1}{R_1 C_2}}{s^2 + s\,\dfrac{1}{R_5}\left(\dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}\right) + \dfrac{1}{R_5 C_2 C_3}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4}\right)} \quad . \tag{7.72}$$

Identificând coeficienţii din relaţiile (7.71) şi (7.72) rezultă:

$$\omega_o = \omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_5 C_2 C_3}}\sqrt{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}} \quad ;$$

$$\frac{1}{Q} = \sqrt{\frac{R_1 R_4}{R_5(R_1 + R_4)}}\left(\sqrt{\frac{C_2}{C_3}} + \sqrt{\frac{C_3}{C_2}}\right) \quad ; \quad |K| = \frac{R_5}{R_1}\,\frac{C_3}{C_2 + C_3} \quad . \tag{7.73}$$

Pentru dimensionare se impun $|K|$, $\omega_o = \omega_c$ şi Q . Din nou trebuie alese valorile a două elemente.

Se aleg $C_2 = C_3 = C$, de valoare rezonabilă. Rezolvând sistemul (7.73) se obţin trei relaţii de proiectare:

$$R_1 = \frac{Q}{\omega_o C|K|} \; ; \; R_4 = \frac{Q}{(2Q^2 - |K|)\omega_o C} \; ; \; R_5 = \frac{2Q}{\omega_o C} \qquad \textbf{(7.74-76)}$$

Exemplu *Pentru* $\omega_o = 10^4$*rad/sec* $|K| = 2$ *şi* $Q = 2$ *se aleg* $C_2 = C_3 = C = 10$ *nF. Se calculează* $R_1 = 10K\Omega$, $R_4 = 3{,}33K\Omega$ *şi* $R_5 = 40\ K\Omega$.

Menţionăm că şi pentru $Y_1=sC_1$ şi $Y_3=1/R_3$ rezultă tot un filtru de tip trece bandă.

<u>Filtru activ cu reacţie multiplă de tip trece sus</u>

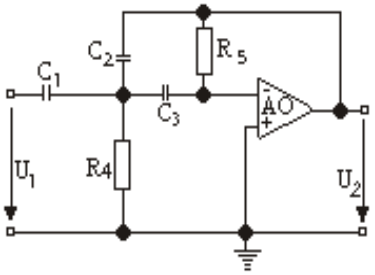


Fig. 7.24 Filtru activ TS de ordinul 2 cu reacţie multiplă.

Pentru un astfel de filtru funcţia de transfer este :

$$H(s) = H_u(s) = \frac{Ks^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}$$

$$\omega_o = \omega_c \quad . \qquad \textbf{(7.77)}$$

Se observă că trebuie să luăm $Y_1 = sC_1$ şi $Y_3 = sC_3$. Schema filtrului din figura 7.24 conduce la:

$$H(s) = \frac{-\frac{C_1}{C_2}s^2}{s^2 + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{R_5 C_2 C_3}s + \frac{1}{R_4 R_5 C_2 C_3}} \quad . \qquad \textbf{(7.78)}$$

Rezultă:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_4 R_5 C_2 C_3}} \; ; \; \frac{1}{Q} = \sqrt{\frac{R_4}{R_5}}\frac{C_1 + C_2 + C_3}{\sqrt{C_2 C_3}} \; ; \; |K| = \frac{C_1}{C_2} \; . \qquad \textbf{(7.79)}$$

Alegând $C_1 = C_3 = C$ se stabilesc relaţiile de dimensionare:

$$C_2 = \frac{C}{|K|} \; ; \; R_4 = \frac{|K|}{\omega_o RC(2|K|+1)} \; ; \; R_5 = \frac{2|K|+1}{\omega_o C} Q \; ; \; \omega_o = \omega_c \; .$$

(7.80-82)

Exemplu *Dacă* $\omega_o = \omega_c = 2\pi \cdot 100 rad/sec$, $Q = 1/\sqrt{2}$ *(filtru Butterworth) şi* $|K|=1$, *se aleg* $C_1 = C_3 = 100\ nF$. *Se calculează apoi* $C_2 = 100\ nF$, $R_4 = 7{,}5K\Omega$ *şi* $R_5 = 33{,}76K\Omega$.

Principalul avantaj al structurii cu reacţie multiplă este numărul mic de componente necesare construcţiei filtrului bazat pe această structură. Dezavantajele sale sunt:

- ajustarea unuia dintre parametrii filtrului, $|K|$, ω_o , sau Q atrage după sine şi modificarea valorii celorlalţi.
-valorile componentelor necesare construcţiei pot fi foarte diferite, raportul valorilor a două componente de acelaşi tip putând rezulta de câteva zeci sau sute.
-variaţiile parametrilor ($|K|$, ω_o sau Q) sunt destul de mari pentru variaţii relativ mici ale valorilor componentelor folosite.

7.3.2 Filtrul activ universal

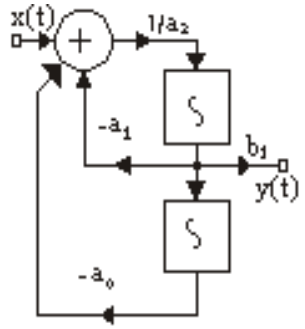


Fig. 7.25 Implementarea relaţiei (7.82) în forma directă II, cu integratoare.

Acest tip de filtru este cunoscut şi sub denumirea de filtru cu "variabile de stare".

Să presupunem că avem de implementat un filtru trece bandă cu inversare, a cărui funcţie sistem o punem sub forma:

$$H(s) = \frac{-|K| a_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad . \qquad \textbf{(7.83)}$$

Implementarea se poate realiza utilizând forma directă II în varianta cu integratoare (vezi figura 2.28). Prin identificarea coeficienţilor rezultă: $a_2=1$; $b_2 = b_o = 0$ iar $b_1 = -|K| a_1$. În figura 7.25 se arată modul în care se poate implementa relaţia (7.82). Integratoarele utilizând amplificatoare operaţionale au schema din figura 7.26.

Pentru integratorul din figură se determină imediat că :

$$H_i(s) = H_{iu}(s) = -\frac{1}{sRC} \quad . \qquad \textbf{(7.84)}$$

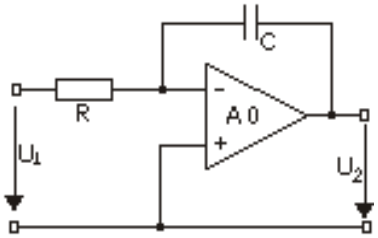


Fig. 7.26 Schema unui integrator.

Se observă că un astfel de integrator inversează semnul. În consecinţă, structura de implementare din figura 7.25 va trebui să fie modificată cum se arată în figura 7.27. Nu s-a ţinut seama de factorul 1/RC, el urmând a intra în structura coeficienţilor.Dar $Y_1(s)\left(-\frac{1}{sRC}\right) = Y(s)$, de unde rezultă că $\frac{Y_1(s)}{X(s)} = -(sRC)\frac{Y(s)}{X(s)}$.

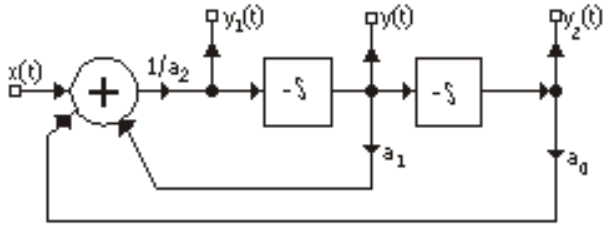


Fig. 7.27 Implementarea relaţiei (7.83) în forma directă II utilizând integratoare inversoare.

Ieşirea $y_1(t)$ este deci o ieşire de tip trece sus. În mod asemănător se arată că:

$$\frac{Y_2(s)}{X(s)} = -\frac{1}{sRC}\frac{Y(s)}{X(s)} ,$$

şi deci ieşirea $y_2(t)$ este de tipul trece jos. Structura din figura 7.27 permite realizarea unui filtru universal având ieşiri TB, TS şi TJ.

Schema filtrului obţinut este arătată în figura 7.28. Cele trei amplificatoare operaţionale AO1-AO3 se consideră ideale.

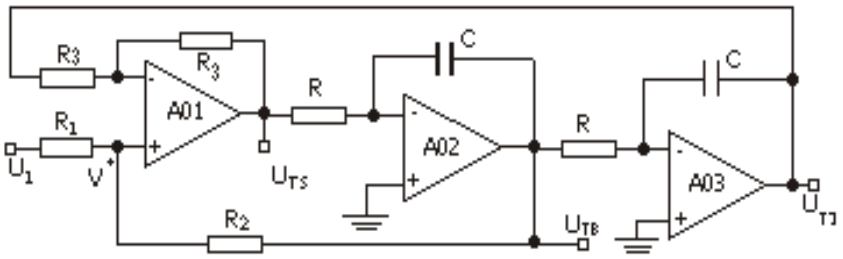


Fig. 7.28 Schema unui filtru activ universal.

Se pot scrie relaţiile:

$$U_1 - \frac{U_1 - U_{TB}}{R_1 + R_2}R_1 = V^+ \quad ; \quad \frac{U_{TJ} - V^-}{R_3} = \frac{V^- - U_{TS}}{R_3} \quad ; \quad V^+ \cong V^- \quad .$$

Se explicitează V^+ şi V^- din cele două relaţii şi se ajunge la:

$$U_1 R_2 + U_{TB} R_1 = \frac{R_1 + R_2}{2}\left(U_{TJ} + U_{TS}\right) \quad . \tag{7.85}$$

Ţinând seama de relaţia (7.83) se deduc imediat:

$$U_{TB} = -\frac{1}{sRC} U_{TS} \quad ; \quad U_{TJ} = -\frac{1}{sRC} U_{TB} \quad . \tag{7.85'-85''}$$

Din aceste ultime două relaţii se determină U_{TJ} şi U_{TS} şi se introduc în (7.85) care devine:

$$H_{TB}(s) = \frac{U_{TB}}{U_1} = \frac{-s\,\frac{1}{RC}\,\frac{2R_2}{R_1 + R_2}}{s^2 + s\frac{1}{RC}\frac{2R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R^2C^2}} \quad . \tag{7.86}$$

Avînd în vedere (7.85') şi (7.85''), din (7.86) mai rezultă:

$$H_{TJ}(s) = \frac{U_{TJ}}{U_1} = \frac{\frac{1}{R^2C^2}\frac{2R_2}{R_1 + R_2}}{s^2 + s\frac{1}{RC}\frac{2R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R^2C^2}} \tag{7.87}$$

$$H_{TS}(s) = \frac{U_{TS}}{U_1} = \frac{s^2\frac{2R_2}{R_1 + R_2}}{s^2 + s\frac{1}{RC}\frac{2R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R^2C^2}} \quad . \tag{7.88}$$

Identificând coeficienţii numitorului rezultă :

$$\omega_o = \omega_c = \frac{1}{RC} \quad ; \quad Q = \frac{R_1 + R_2}{2R_1} \quad . \tag{7.89-90}$$

Identificând acum coeficienţii de la numărător cu formele funcţiilor sistem corespunzătoare, rezultă cele trei câştiguri:

$$K_{TB} = -\frac{R_2}{R_1} = 1 - 2Q \; ; \; K_{TJ} = K_{TS} = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} = 2 - \frac{1}{Q} \quad . \tag{7.91-92}$$

În practica inginerească se aleg R şi C astfel încât să rezulte frecvenţa ω_o cerută.

Dacă se impune Q se alege fie R_1 fie R_2 şi se calculează cealaltă rezistenţă. Câştigul rezultă, fiind determinat de Q. Rezistenţa R_3 se alege din considerente de încărcare a amplificatorului sau din considerente de stabilitate termică. De obicei ea se alege de valoare R.

Reglaje numerice în filtrul activ universal

Convertorul analog numeric cu multiplicare dă posibilitatea obţinerii unor rezistenţe a căror valoare poate fi comandată printr-un cod numeric.Utilizarea lor în anumite scheme, cum este şi filtrul activ universal, permite reglarea numerică a parametrilor filtrului.

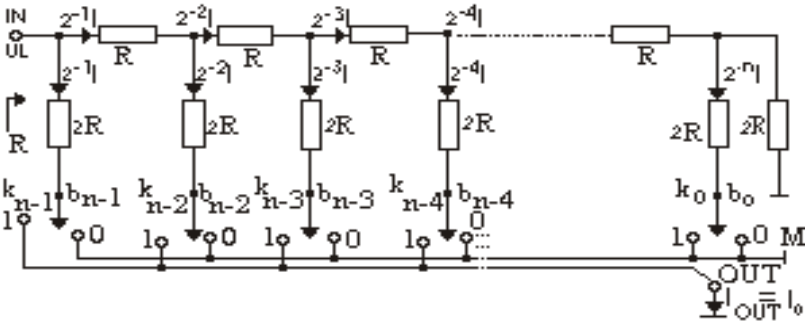


Fig. 7.29 Convertor numeric analogic cu multiplicare CNAM.

Structura convertorului numericanalogic cu multiplicare, CNAM, este prezentată în figura 7.29. El se compune dintr-o reţea rezistivă de tipul R-2R şi din comutatoarele K_0, K_1, ..., K_{n-1}, realizate cu tranzistoare cu efect de câmp. Comutatoarele sunt controlate de biţii de comandă b_0, b_1, ..., b_{N-1}. Dacă bitul este nul, comutatorul controlat pune rezistenţa 2R respectivă la masa M. Dacă bitul are valoarea 1, comutatorul conectează rezistenţa 2R la bara OUT, aflată la un potenţial nul sau aproape nul (zero virtual), realizat prin conectarea ieşirii la intrarea inversoare a unui amplificator operaţional, cealaltă intrare a operaţionalului fiind conectată la masă.

Indiferent care este poziţia comutatoarelor K, rezistenţa de intrare, văzută de la borna IN spre masă este aceeaşi, R. În consecinţă, curentul de intrare este I = U/R şi depinde numai de U şi nu şi de poziţia comutatoarelor. Analiza schemei arată că spre comutatoare afluesc curenţii $2^{-1}I$ (spre K_{n-1}), $2^{-2}I$ (spre K_{n-2}),..., $2^{-n}I$ (spre K_0). Curentul de la ieşire $I_o=I_{OUT}$ se poate deci determina ca o sumă a acestor curenţi, ponderată cu b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0. Dacă $b_{n-1} = 1$ curentul $2^{-1}I$ apare în sumă, comutatorul K_{n-1} fiind în poziţia 1. Dacă însă $b_{n-1} = 0$, K_{n-1} este în poziţia 0, curentul $2^{-1}I$ se închide spre masă; el nu apare în componenţa lui I_o. Se poate deci scrie o relaţie de forma:

$$I_o = b_{n-1}2^{-1}I + b_{n-2}2^{-2}I + ... + b_1 2^{n-1}I + b_0 2^{-n}I = \\ = 2^{-n}(2^{n-1}b_{n-1} + 2^{n-2}b_{n-2} + ... + 2b_1 + b_0)I \quad . \qquad \textbf{(7.93)}$$

Dar într-un sistem de numeraţie poziţională cu baza 2 expresia:

$$N = 2^{n-1}b_{n-1} + 2^{n-2}b_{n-2} + ... + 2b_1 + b_0 \; ; \; b_k \in \{0,1\} \; , \; \forall k \in \{1,2,...,n-1\} \quad , \tag{7.94}$$

reprezintă valoarea zecimală a numărului N, cuprinsă între 0 şi 2^n-1, cu incrementul 1. În consecinţă, relaţia (7.93) devine:

$$I_o = \frac{NU}{2^n R} = \frac{U}{R_e} \quad ; \quad R_e = \frac{2^n R}{N} \quad . \tag{7.95}$$

Convertorul se comportă între punctele IN şi OUT ($V_{OUT} \cong 0V$) ca o rezistenţă echivalentă R_e a cărei valoare este controlată prin numărul N având cifrele binare $\{b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0\}$. Limitele între care se modifică R_e sunt R_{emin} aproximativ egal cu R şi $R_{emax} = 2^n R$ (Este vorba de cea mai mare rezistenţă utilă şi nu valoarea infinită ce ar rezulta la N = 0).

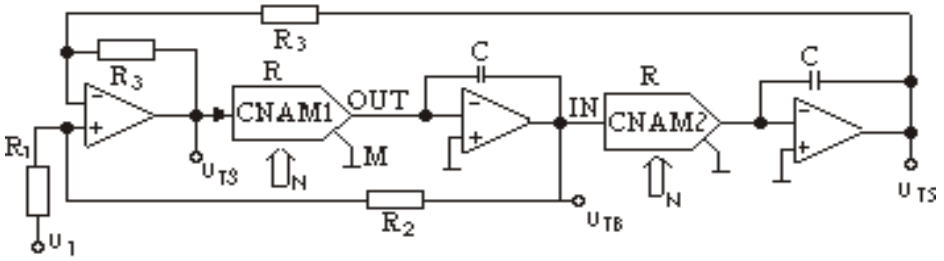


Fig. 7.30 Filtru universal cu frecvenţa ω_o reglabilă numeric prin codul numeric N.

CNAM poate fi utilizat în structura unui filtru activ universal în locul rezistenţelor R din integratoare aşa cum se arată în figura 7.30. Conform relaţiei (7.89) frecvenţa $\omega_o = \omega_c$ a filtrului este:

$$\omega_o = \omega_c = \frac{1}{R_e C} = N\frac{1}{2^n RC} \quad , \quad \omega_o = N\Omega_o \quad , \quad \Omega_o = \frac{1}{2^n RC} \quad , \tag{7.96}$$

şi se observă că este direct proporţională cu codul numeric N prin care poate fi controlată. Limitele între care ea variază sunt $\omega_{omin} = \Omega_o$ şi $\omega_{omax} = (2^n-1)\Omega_o$, incrementul fiind Ω_o, deosebit de fin.

Cele două convertoare au ieşirile OUT menţinute la un nul virtual ca urmare a modului în care sunt conectate. Ele sunt comandate simultan, de acelaşi cod numeric N.

Pentru a realiza şi o amplificare variabilă pentru filtrul activ universal, la ieşirea acestuia se poate conecta amplificatorul având schema din figura 7.31.

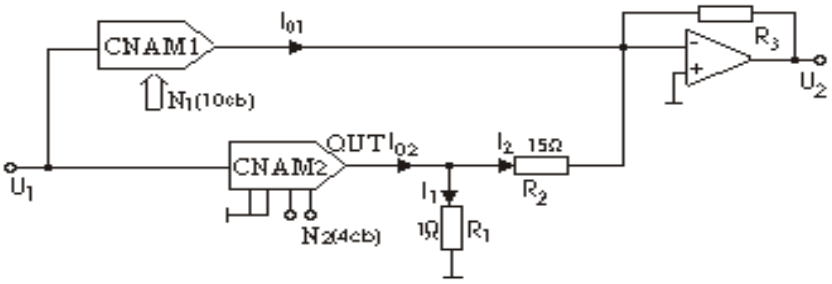


Fig. 7.31 Amplificator cu câştigul reglabil numeric.

Două CNAM de câte 10 cifre binare se utilizează pentru reglajul câştigului (amplificării). Pentru CNAM1 se utilizează toate cele 10 cifre binare de comandă iar pentru CNAM2 numai ultimele 4. Acest al doilea convertor trebuie să fie foarte precis pentru a se ajunge la un echivalent de 14 cifre binare. Rezistenţa echivalentă între borna OUT a CNAM2 şi masă este mai mică de 1Ω (şi poate fi redusă şi mai mult) aşa că este îndeplinită condiţia de nul virtual şi pentru acest convertor. Divizorul de curent format de R_1 şi R_2 trebuie selectat cu grijă pentru ca $I_2 = 2^{-4}\cdot I_{o2}$. În aceste condiţii:

$$I_{o1} + I_2 = \frac{U_1}{2^n R} N_1 + \frac{U_1}{2^n R} 2^{-4} N_2 \quad ,$$

şi deoarece $U_2 = -(I_{o1}+I_2)R_3$, câştigul devine:

$$A_u = -\frac{R_3}{2^n R}(N_1 + 2^{-4} N_2) = -A_o M \quad ; \quad A_o = \frac{R_3}{2^n R} \quad , \quad M = N_1 + 2^{-4} N_2 \quad . \tag{7.97}$$

Codul M se poate scrie sub forma:

$$M = b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \ldots + b_1 2 + b_0 + 2^{-4}(b_3' 2^3 + b_2' 2^2$$
$$M = b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \ldots + b_0 + b_3' 2^{-1} + b_2' 2^{-2} + b_1' 2^{-3} \tag{7.98}$$

şi este evident un număr cu 4 cifre binare.

Valoarea minimă a modulului câştigului corespunde codului M ce are toţi biţii pe zero cu excepţia lui b'_0 şi este $|A_{u\,min}| = A_o/16$. Valoarea maximă a modulului câştigului corespunde codului M ce are toţi biţii pe 1 şi este $|A_{u\,max}| = A_o(2^{10}-1/16)$. Incrementul câştigului este $A_o/16$, existând deci 16383 valori diferite ale câştigului.

Evident zgomotul propriu al schemei trebuie să fie extrem de redus. Şi în celelalte privinţe (nu numai a zgomotului) calitatea amplificatorului utilizat trebuie să fie

corespunzătoare performanţelor principale ale schemei.

Reglaje analogice în filtrul activ universal

Există şi alte posibiltăţi de reglare a parametrilor unui filtru de ordinul II de tipul filtru activ universal. De exemplu convertoarele numeric analogice din figura 7.30 pot fi înlocuite cu multiplicatoare de tensiune. Acestea sunt circuite cu două intrări şi o ieşire. Dacă la cele două intrări sunt aduse semnalele $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ atunci la ieşire se obţine semnalul $y(t)=Kx_1(t)\cdot x_2(t)$, unde K este un parametru al circuitului integrat numit constanta de multiplicare, cu dimensiunea V^{-1}.

Există trei tipuri de bază de multiplicatoare analogice, clasificate după metoda de realizare a multiplicării: circuite de înmulţire cu transconductanţă variabilă, circuite de înmulţire cu logaritmare şi antilogaritmare şi circuite de înmulţire cu modularea în amplitudine şi durată a unor impulsuri.

Dacă unul dintre semnalele de intrare, de exemplu $x_2(t)$ are doar componentă continuă, V_c atunci multiplicatorul devine un amplificator controlat, $y(t) = KV_cx_1(t)$, amplificarea KV_c putând fi reglată prin intermediul tensiunii V_c . Folosind pentru multiplicator simbolul din figura 7.32 a se consideră circuitul din figura 7.32 b. Deoarece $Y(s) = -(1/sRC)Y_1(s)$ şi $Y_1(s) = KV_CX(s)$ se constată că:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = -\frac{1}{s\left(\frac{R}{KV_c}\right)C} \quad .$$

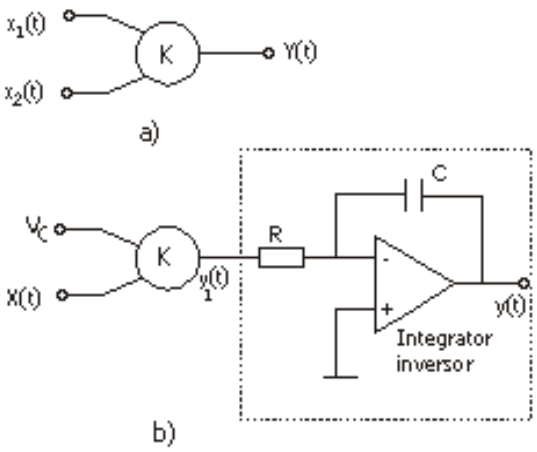


Fig. 7.32 (a) Simbolul multiplicatorului analogic; (b) Utilizarea multiplicatorului analogic într-un circuit de integrare.

Deci sistemul considerat este echivalent cu un integrator inversor construit cu un condensator cu capacitatea C şi cu un rezistor cu rezistenţa de valoare $R/(KV_c)$. Se observă că această valoare poate fi reglată cu ajutorul tensiunii de control V_c. Înlocuind deci grupurile convertor numeric analogic cu multiplicare - integrator inversor din figura 7.30 cu grupuri multiplicator analogic - integrator inversor se obţine un filtru activ universal cu parametrii reglabili prin tensiunea V_c, a cărui schemă este prezentată în figura 7.33. Ţinând seama de faptul că grupurile multiplicator - integrator inversor pot fi înlocuite cu integratoare inversoare cu constanta de timp $RC/(KV_c)$, schema prezentată este echivalentă cu cea a unui filtru activ universal obişnuit şi deci valoarea pulsaţiei ω_o este:

$$\omega_o = \frac{1}{\frac{RC}{KV_c}} = \frac{V_c}{\frac{RC}{K}} \quad .$$

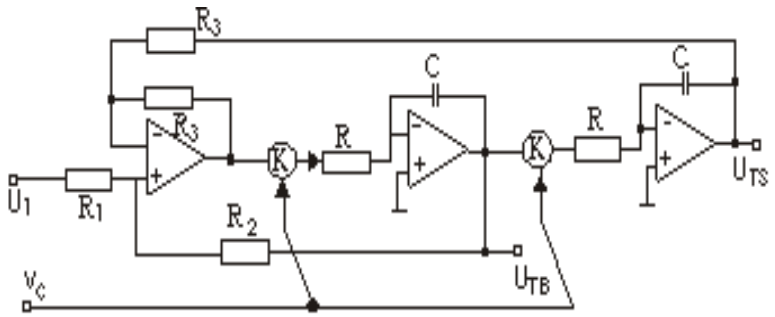


Fig. 7.33 Filtru universal cu frecvenţa reglabilă analogic prin tensiunea continuă V_c.

Rezultă că frecvenţa de tăiere a structurilor trece jos şi trece sus respectiv frecvenţa centrală a structurii trece bandă din componenţa filtrului activ universal din schema din figura 7.33 pot fi reglate prin intermediul tensiunii de comandă V_c . Ceilalţi parametrii ai filtrului (Q şi amplificările celor trei tipuri de structuri) sunt constanţi şi se calculează pe baza relaţiilor (7.90), (7.91) şi (7.92). Dacă în cazul utilizării convertoarelor numeric analogice cu multiplicare, frecvenţa ω_o poate fi reglată foarte fin cu ajutorul codului numeric N, în cazul folosirii multiplicatoarelor analogice, ω_o poate fi reglată continuu cu ajutorul tensiunii continue V_c . Un alt exemplu de filtru activ universal cu reglajul parametrilor este cel al filtrului cu capacităţi comutate.

7.4 Aspecte legate de proiectarea filtrelor numerice cu răspuns finit la impuls obţinute prin trunchierea răspunsului infinit la impuls

Aşa cum am arătat, filtrele ideale au răspunsuri la impuls cu întindere infinită. Aproximarea caracteristicilor filtrelor ideale poate fi făcută prin translatarea răspunsului la impuls urmată de trunchiere. În acest mod apar două efecte, unul cauzat de deplasare, care modifică caracteristica de fază ce ar trebui obţinută şi unul cauzat de trunchiere, care afectează atât caracteristica de modul cât şi cea de fază. Distorsiuni liniare se obţin numai atunci când caracteristica de fază are variaţie liniară cu frecvenţa Ω (pe porţiuni).

7.4.1 Filtre cu răspunsul la impuls finit şi caracteristica de fază liniară

Pentru a nu complica notaţiile, vom nota răspunsul la impuls obţinut după operaţiile de translaţie în timp şi trunchiere cauzală la domeniul {0, 1, ..., N-1} cu h[n]. Răspunsul

în frecvenţă corespunzător este:

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\Omega n} \;;\; |H(\Omega)| = |H(-\Omega)| \;,\; \Phi(\Omega) = -\Phi(-\Omega) \;.$$

(7.99)

Considerând h[n] ∈ ℝ , modulul $|H(\Omega)|$ este o funcţie pară iar argumentul $\Phi(\Omega)$ este o funcţie impară. Pentru $\Phi(\Omega)$ se impune o caracteristică liniar căzătoare (ce asigură o întârziere de grup pozitivă - cauzalitatea - şi constantă - lipsa distorsiunilor neliniare) având expresia:

$$\Phi(\Omega) = -\alpha\Omega \;,\; -\pi \le \Omega < \pi \;,\; \alpha > 0 \;. \qquad \textbf{(7.100)}$$

În consecinţă răspunsul în frecvenţă se scrie sub forma:

$$|H(\Omega)|(\cos(\alpha\Omega) - j\sin(\alpha\Omega)) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n](\cos\Omega n - j\sin\Omega n) \qquad \textbf{(7.101)}$$

Se identifică coeficienţii părţilor reală şi imaginară şi se obţin:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\cos\Omega n = |H(\Omega)|\cos\alpha\Omega \;;\; |H(\Omega)|\sin\alpha\Omega = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\sin\Omega n \;,$$

relaţii ce se înmulţesc membru cu membru. După ce se simplifică $|H(\Omega)|$ se ajunge la:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\left(\cos\Omega n\sin\alpha\Omega - \cos\alpha\Omega\ \sin\Omega n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\sin(\alpha - n)\Omega = 0 \;,$$

(7.102)

condiţie ce trebuie îndeplinită de către orice filtru cu caracteristică de fază liniar descrescătoare.

Funcţiile pondere ale filtrelor ideale ce trebuie aproximate sunt simetrice faţă de axa verticală. După translatare, axa de simetrie se mută spre dreapta. Vom considera că s-a trunchiat în aşa fel funcţia pondere deplasată, încât simetria continuă să se conserve. Această proprietate se poate scrie şi sub forma:

$$h[n] = h[N-1-n] \;, \qquad \textbf{(7.103)}$$

care arată că eşantioanele egal depărtate de cele două limite, 0 şi N-1 , sunt egale.

Dacă N este par din (7.102) se obţine:

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]\sin(\alpha-n)\Omega \;+\; \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h[n]\sin(\alpha-n)\Omega \;=\; 0 \quad .$$

În a doua sumă se pune m = N-1-n şi se ţine seama de (7.103):

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]\sin(\alpha-n)\Omega \;+\; \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h[m]\sin\left[\alpha+m-(N-1)\right]\Omega \;=\; 0$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]\left[\sin(\alpha-n)\Omega \;+\; \sin(\alpha+n-N+1)\Omega\right] \;=\; 0 \quad .$$

Forma finală a acestei ecuaţii în α este:

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]\;2\;\sin\left(\alpha \;-\; \frac{N-1}{2}\right)\Omega \cdot \cos\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\Omega \;=\; 0 \quad . \qquad \textbf{(7.104)}$$

Unica soluţie a acestei ecuaţii, indiferent de forma lui h[n] (cu excepţia cerinţei minime privind simetria) este:

$$\alpha \;=\; \frac{N-1}{2} \quad ; \quad N \;=\; 2p \quad , \quad \alpha \notin N \quad . \qquad \textbf{(7.105)}$$

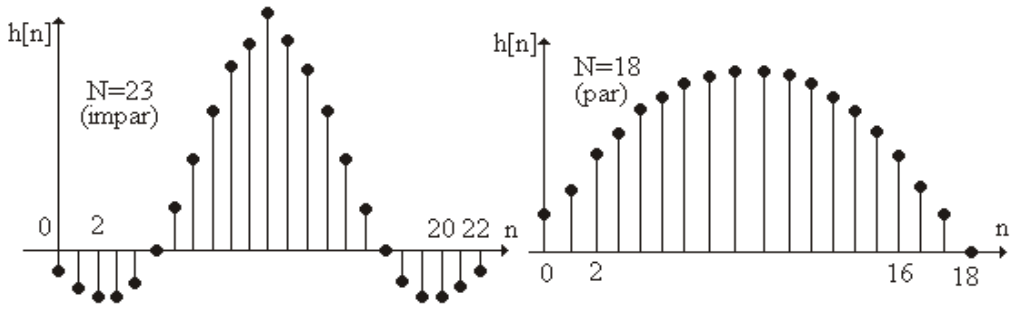


Fig. 7.34 Răspuns la impuls trunchiat la N valori , având o axă de simetrie. (a) N impar, (b) N par.

Întârzierea de grup (N-1)/2 , neîntreagă poate crea inconveniente în calcul. De fapt apare o întârziere ce conţine şi o jumătate de pas de eşantionare. Ea poate fi înlăturată introducând încă o întârziere de jumătate de pas de eşantionare (vezi şi figura 7.34 b).

În ipoteza că N este impar - figura 7.34 a - situaţie mai des întâlnită în practică, în relaţia (7.99) se pot grupa termenii egal depărtaţi de extreme rămânând însă un termen fără pereche, termenul central având n = (N-1)/2 . Se scrie deci:

$$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n]\sin(\alpha-n)\Omega + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h[n]\sin(\alpha-n)\Omega + h\left[\frac{N-1}{2}\right]\sin\left(\alpha-\frac{N-1}{2}\right)\Omega = 0 \ .$$

Dar cele două sume pot fi scrise ca una singură, urmând tehnica de calcul deja prezentată :

$$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n]2\ \sin\left(\alpha-\frac{N-1}{2}\right)\Omega\cos\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\Omega\ +\ h\left[\frac{N-1}{2}\right]\sin\left(\alpha-\frac{N-1}{2}\right)\Omega\ =\ 0\quad . \tag{7.106}$$

Pentru:

$$\alpha\ =\ \frac{N-1}{2}\quad ;\quad N\ =\ 2p\ +\ 1\quad ,\quad \alpha\in\mathbb{N}\quad , \tag{7.107}$$

relaţia nu depinde de forma efectivă a funcţiei h[n]. Dacă N este impar întârzierea introdusă este întreagă şi nu apare inconvenientul amintit anterior.

Se poate acum determina forma răspunsului în frecvenţă pentru cele două cazuri N par şi N impar. Pentru aceasta se scrie relaţia (7.99) ca sumă de două sume şi se ţine seama de proprietatea de simetrie (7.103).

Pentru N par avem:

$$H(\Omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]e^{-j\Omega n}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]e^{-j\Omega n}+\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h[m]e^{j\Omega(m-N+1)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]\left[e^{-j\Omega n}+e^{j\Omega n}e^{-j\Omega(N-1)}\right]=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n]e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}}2\cos\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\Omega$$

$$H(\Omega)\ =\ e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h[n]\cos\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\Omega\quad ,\quad N\ =\ 2p\quad . \tag{7.108}$$

Procedând în acelaşi fel pentru N impar, ţinând seama că h[(N-1)/2] nu are pereche, se obţine:

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} 2h[n] \cdot \cos\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \Omega + h\left[\frac{N-1}{2} \right] \right\} \quad , \quad N = 2p + 1 \quad .$$

(7.109)

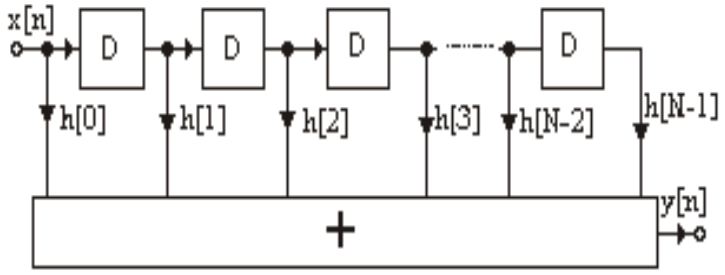


Fig. 7.35 Structură transversală pentru implementarea filtrului cu răspunsul la impuls h[n] cu suport finit.

Implementarea filtrelor trunchiate, cu răspuns finit la impuls se poate obţine cu o structură de tip transversal - figura 7.34, coeficienţii de ponderare fiind chiar eşantioanele răspunsului la impuls, h[0], h[1], ..., h[n-1]. Schema este mai simplă decât o structură transversală generală, având în vedere că - vezi relaţia (7.103) - coeficienţii de ponderare sunt egali doi câte doi.

7.4.2 Ferestre temporale de trunchiere

Fereastra rectangulară

Până acum s-a utilizat pentru trunchierea semnalelor fereastra temporală rectangulară, atât în timp continuu cât şi în timp discret. În timp discret expresia ferestrei de trunchiere rectangulară $w_R[n]$, de lungime N este:

$$w_R[n] = \sigma[n] - \sigma[n-1] = \begin{cases} 1 \ , & 0 \le n \le N-1 \\ 0 \ , & \hat{i}n \ rest \end{cases} \quad . \qquad \textbf{(7.110)}$$

Dacă $h_{id}[n]$ este funcţia pondere a filtrului ideal deja translatată, versiunea ei trunchiată rectangular h[n], se obţine prin simpla multiplicare:

$$h[n] = h_{id}[n] \cdot w_R[n] \quad . \qquad \textbf{(7.111)}$$

Răspunsul în frecvenţă al filtrului obţinut prin trunchiere $H(\Omega)$ este legat de răspunsul în frecvenţă al filtrului ideal translatat în timp $H_{id}(\Omega)$ prin relaţia ce rezultă prin aplicarea teoremei convoluţiei spectrelor:

$$H(\Omega) = \mathcal{F}\left\{ h_{id}[n] w_R[n] \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_{id}(u) W_R(\Omega - u) du \quad , \qquad \textbf{(7.112)}$$

$W_R(\Omega)$ fiind spectrul ferestrei rectangulare:

$$W_R(\Omega) = e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin\frac{N\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}} \quad . \qquad \textbf{(7.113)}$$

E clar că $H(\Omega)$ este o aproximare a lui $H_{id}(\Omega)$, a cărei calitate depinde de tipul şi performanţele ferestrei temporale folosite.

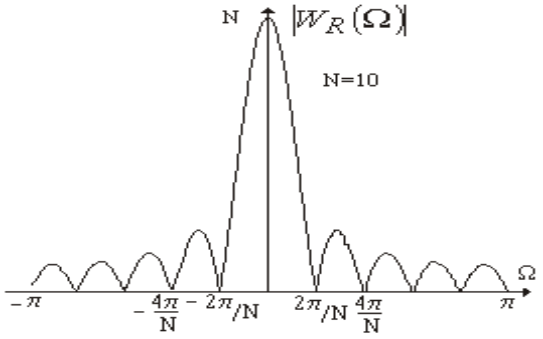


Fig. 7.36 Modulul spectrului ferestrei dreptunghiulare.

Modulul spectrului ferestrei rectangulare de trunchiere în domeniul $[-\pi,\pi)$ este prezentat în figura 7.36. Trecerile prin zero ale modulului au loc la frecvenţele $\Omega_k=k2\pi/N$, k nenul. Dacă N este par, în π avem un zero, iar dacă N este impar, în π modulul spectrului este 1. Datorită convoluţiei - relaţia (7.112) - fronturilor bruşte din $H_{id}(\Omega)$ le corespund zone de tranziţie în $H(\Omega)$. Întinderea acestor zone de tranziţie este proporţională cu întinderea lobului central din $|W_R(\Omega)|$. Cu cât numărul de eşantioane N este mai mic, deci trunchierea este mai severă, cu atât mai lente devin tranziţiile din $H(\Omega)$ şi invers. Lobii laterali ai lui $|W_R(\Omega)|$ dau ondulaţiile din palierele răspunsurilor în frecvenţă a lui $H(\Omega)$. Creşterea numărului de eşantioane cuprinse în fereastră nu modifică mărimea ondulaţiilor ci doar frecvenţa lor. Cu cât numărul de eşantioane N este mai mare, cu atât mai rapide sunt oscilaţiile ce apar în $H(\Omega)$ la palierele lui $H_{id}(\Omega)$ şi invers.

Se pune problema dacă trunchierea rectangulară este unică posibilă. Iar dacă nu, cum trebuie comparate între ele diferitele ferestre de trunchiere.

O fereastră de trunchiere ideală ar trebui să îndeplinească condiţiile:

i. Să aibă lobul central cât mai îngust posibil şi acesta să conţină o fracţiune cât mai mare din energia ferestrei.
ii. Să aibă lobi laterali ce descresc foarte repede atunci când Ω se apropie de $\pm\pi$.

O apreciere a tipurilor de ferestre se poate face după lăţimea lobului principal şi după coeficientul de pulsaţie, K_p, definit ca raportul dintre amplitudinea primului lob lateral şi amplitudinea lobului central (principal).

Alte ferestre de trunchiere

1. Fereastra triunghiulară (Fejer) Expresia acestei ferestre este :

$$w_1[n] = \begin{cases} 1 - \dfrac{|n|}{N_1} & , \ |n| \le N_1 \\ 0 & , \ \hat{\imath}n \ rest \end{cases} \quad . \qquad \textbf{(7.114)}$$

După cum se vede nu este o fereastră cauzală, dar se poate considera că mai întâi se trunchiază răspunsul ideal şi că după aceea se efectuează translaţia în timp. Oricum translatarea ferestrei triunghiulare conduce doar la apariţia unui factor exponenţial, cu exponent pur imaginar ce modifică liniar faza spectrului.

Vom remarca că fereastra are $N = 2N_1-1$ eşantioane nenule (deci un număr impar). Spectrul ferestrei Fejer se poate determina pornind de la observaţia că fereastra dreptunghiulară cauzală $w_R[n]$ de lungime N_1 dă prin convoluţie cu ea însăşi semnalul triunghiular de suport $2N_1-1$ şi de valoare maximă N_1 . În consecinţă, scalând cu $1/N_1$ convoluţia amintită mai sus, se obţine fereastra Fejer:

$$w_1[n] = \frac{1}{N_1}\, w_R[n] * w_R[n] \quad \longleftrightarrow \quad W_1(\Omega) = \frac{1}{N_1}\left(W_R(\Omega)\right)^2 \quad .$$

În concluzie:

$$W_1(\Omega) = \frac{1}{N_1}\left(\frac{\sin\frac{N_1}{2}\Omega}{\sin\frac{\Omega}{2}}\right)^2 \quad .$$

Dacă exprimăm spectrul în funcţie de lungimea efectivă a ferestrei $N = 2N_1-1$, se substituie $N_1 = (N+1)/2$, şi prin urmare:

$$W_1(\Omega) = \frac{2}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}\Omega}{\sin\frac{\Omega}{2}}\right)^2 \quad , \ N \ impar \quad . \qquad \textbf{(7.115)}$$

Trecerile prin zero au loc la $\Omega_k = k\cdot(2\pi)/(N+1)$. Lăţimea lobului central este $4\pi/(N+1)$ comparabilă cu cea a ferestrei rectangulare pentru $N \gg 1$. În schimb amplitudinea primului lob secundar este mai redusă relativ la lobul principal decât în cazul ferestrei rectangulare, motiv pentru care fereastra triunghiulară este preferabilă.

2. Fereastra Lanczos Expresia ei este:

$$w_2[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin n\pi/N_1}{n\pi/N_1} & , \ 0 < |n| \le N_1 \\ 1 & , \ n = 0 \\ 0 & , \ \hat{i}n \ rest \end{cases} . \qquad \textbf{(7.116)}$$

Ea rezultă trunchiind semnalul $\sin(n\pi/N_1)/(n\pi/N_1)$ la intervalul $\pm N_1$. Dar $\sin(n\pi/N_1)/(n\pi/N_1) \longleftrightarrow N_1 p_{\pi/N1} * \delta_{2\pi}(\Omega)$ iar $\sigma[n+N_1]-\sigma[n-N_1-1]$ are drept transformată pe $\sin[(2N_1+1)/2]\Omega/\sin(\Omega/2)$. Aplicând teorema convoluţiei în domeniul spectrelor avem:

$$\frac{\sin n\pi/N_1}{n\pi/N_1}\left(\sigma[n+N_1]-\sigma[n-N_1-1]\right) \leftrightarrow \frac{N_1}{2\pi}\int_{2\pi} p_{\frac{\pi}{N_1}}(u)\,\frac{\sin\frac{2N_1+1}{2}(\Omega-u)}{\sin\frac{\Omega-u}{2}}\,du$$

$$W_2(\Omega) = \frac{N_1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{N_1}}^{\frac{\pi}{N_1}} \frac{\sin\frac{2N_1+1}{2}(\Omega-u)}{\sin\frac{\Omega-u}{2}}\,du = \frac{N_1}{2\pi}\int_{\Omega-\frac{\pi}{N_1}}^{\Omega+\frac{\pi}{N_1}} \frac{\sin\frac{2N_1+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx \ .$$

(7.117)

Vom observa că lungimea ferestrei este $2N_1+1$ şi cum două valori sunt nule, $N=2N_1-1$.

3. Fereastra lui von Hann are expresia:

$$w_3[n] = \begin{cases} 0{,}5\left(1 + \cos\dfrac{\pi n}{N_1}\right) & , \ |n| \le N_1 \\ 0 & , \ \hat{i}n \ rest \end{cases} . \qquad \textbf{(7.118)}$$

Lungimea ferestrei este $2N_1+1$ dar doar $N = 2N_1-1$ valori ale eşantioanelor sunt nenule.

4. Fereastra Hamming Forma temporală pentru această fereastră este:

$$w_4[n] = \begin{cases} 0{,}54 + 0{,}46\cos\dfrac{\pi n}{N_1} & , \ |n| \le N_1 \\ 0 & , \ \hat{i}n\ rest \end{cases} , \qquad \textbf{(7.119)}$$

are $N = 2N_1+1$ valori nenule.

5. Fereastra Blackman:

$$| = \begin{cases} 0{,}42 + 0{,}5\cos\dfrac{\pi n}{N_1} - 0{,}08\cos\dfrac{2\pi n}{N_1} & , \ |n| \le \\ 0 & , \ \hat{i}n\ res \end{cases} \qquad \textbf{(7.120)}$$

Având în vedere utilizarea acestora ca ferestre cauzale vom indica şi formele respective:

$$[n] = \begin{cases} \dfrac{2n}{N-1} & , \ 0 \le n \le \dfrac{N-1}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{N-1} & , \ \dfrac{N-1}{2} \le n \le N-1 \end{cases} , \ N\ impar \qquad \textbf{(7.114')}$$

Această formă cauzală este cunoscută şi ca fereastră Bartlett.

$$w_2[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(2n\pi/(N-1)-\pi\right)}{\left(2n\pi/(N-1)-\pi\right)} & , \ 0 \le n < \dfrac{N-1}{2} \ si \ \dfrac{N-1}{2} < n \le N-1 \\ 1 & , \ n = \dfrac{N-1}{2} \\ 0 & , \ \hat{i}n\ rest \end{cases} ; \ N\ impa$$

(7.116')

$$w_3[n] = \begin{cases} 0{,}5\left(1 - \cos\dfrac{2\pi n}{N-1}\right) & , \ 0 \le n \le N-1 \\ 0 & , \ \hat{i}n\ rest \end{cases} ; \qquad \textbf{(7.118')}$$

$$w_4[n] = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos\dfrac{2\pi n}{N-1} & , \quad 0 \le n \le N-1 \\ 0 & , \quad \hat{\imath}n \ rest \end{cases} \quad ; \qquad \textbf{(7.119')}$$

$$w_5[n] = \begin{cases} 0{,}42 - 0{,}5\cos\dfrac{2\pi n}{N-1} + 0{,}08\cos\dfrac{4\pi n}{N-1} & , \quad 0 \le n \le N-1 \\ 0 & , \quad \hat{\imath}n \ rest \end{cases} \quad , \quad N \ impar$$

(7.120')

Toate ferestrele prezentate satisfac condiţiile de simetrie (7.103).

Problema 1.

În figura următoare este prezentată schema unui filtru de ordinul I.

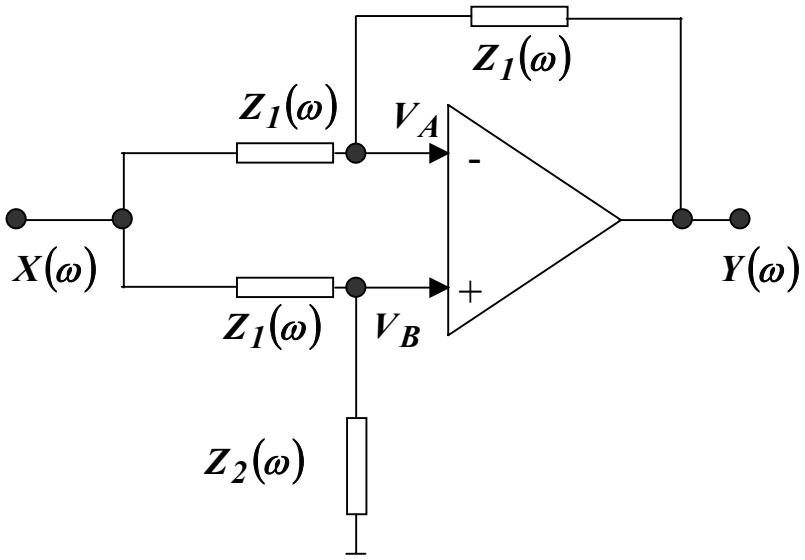


Fig.1.1. Schema filtrului studiat.

a) Considerând amplificatorul operațional ideal, demonstrați că:

$V_A = \frac{Y(\omega) - X(\omega)}{2Z_1(\omega)} \cdot Z_1(\omega) + X(\omega)$ *şi că* $V_B = \frac{X(\omega)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)} \cdot Z_2(\omega)$.

b) Demonstrați că expresia răspunsului în frecvență al sistemului este:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{Z_2(\omega) - Z_1(\omega)}{Z_2(\omega) + Z_1(\omega)}$$

c) În figura 2.1. este prezentată schema unui filtru de tipul celui din figura 1.1. Stabiliți expresia răspunsului în frevență al sistemului din figura 2.1.

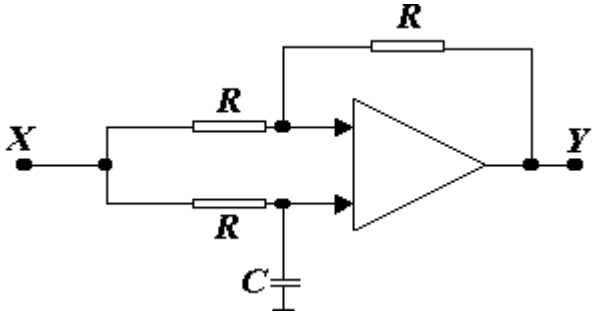


Fig. 2.1. Un filtru de tipul celui din figura 1.1.

Reprezentați grafic caracteristicile Bode ale acestui filtru ştiind că $RC = 10^{-3}$ *sec. Ce fel de filtru este cel din figura 2.1. ?*

Rezolvare.

a) Cele două relații sunt evidente.

b) Deoarece între intrările unui amplificator operațional ideal nu poate curge curent, impedanța de intrare a acestuia fiind infinită se poate scrie:

$$V_A = V_B \Rightarrow \frac{Y(\omega)}{2} + \frac{X(\omega)}{2} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} X(\omega) \Leftrightarrow \frac{Y(\omega)}{2} = \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{1}{2} \right) X(\omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(\omega)}{2} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \cdot \frac{X(\omega)}{2} \Rightarrow H(\omega) = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

adică tocmai relația care trebuia demonstrată.

b) Pentru sistemul din figura a doua se poate scrie:

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C} \quad \Rightarrow \quad H(\omega) = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Se obține:

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}} = 1 \quad \forall \omega \in R \quad \Rightarrow \quad 20 \log |H(\omega)| = 0 \quad \forall \omega \in R$$

$$arg\{H(\omega)\} = arg\{1 - j\omega RC\} - arg\{1 + j\omega RC\} = -2 arctg \omega RC$$

Caracteristicile Bode ale celui de al doilea sistem sunt prezentate în figura următoare.

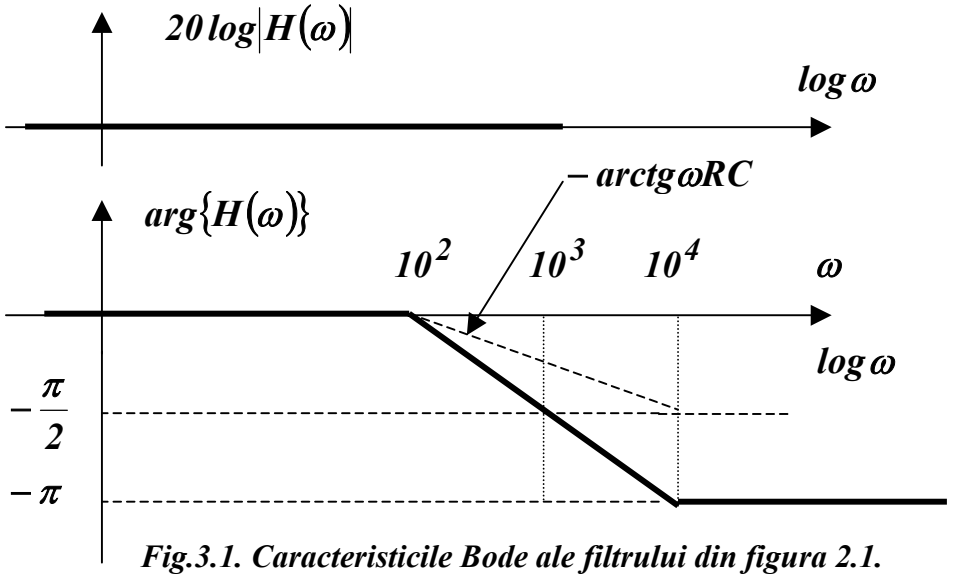


Fig.3.1. Caracteristicile Bode ale filtrului din figura 2.1.

Se constată că este vorba despre un filtru trece-tot.

Problema 2.

Se numeşte bandă echivalentă de zgomot a filtrului cu răspunsul în frecvență $\boldsymbol{H(\omega)}$, *valoarea* $\boldsymbol{B_z = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \, d\omega}$. *Răspunsul în frecvență al unui filtru Buterworth de ordinul N, cu pulsația de tăiere de 1 rad/s, are proprietatea* $\boldsymbol{|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2N}}}$.

a) *Determinați banda echivalentă de zgomot a unui filtru Butterworth de ordinul I, cu pulsația de tăiere de 1 rad/s.*
b) *Notând cu* $\boldsymbol{20\log|H_I(\omega)|}$ *caracteristica asimptotică de modul a unui filtru Butterworth de ordinul N, cu pulsația de tăiere de 1 rad/s, demonstrați că:*

$$\boldsymbol{20\log|H_I(\omega)|^2 = \begin{cases} 0, & |\omega| < 1 \\ -40N\log\omega, & |\omega| > 1 \end{cases}}$$

Deduceți de aici expresia lui $\boldsymbol{|H_I(\omega)|^2}$.

c) *Demonstrați că:*

$$\boldsymbol{|H(\omega)|^2 \le |H_I(\omega)|^2}$$

d) *Demonstrați că banda echivalentă de zgomot a unui filtru Butterworth de ordinul N satisface condiția:*

$$\boldsymbol{B_z \le \frac{4N}{2N-1}}$$

Rezolvare.

a) $\boldsymbol{N = 1, \quad |H_1(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^2}; \quad B_{z_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1+\omega^2} = arctg\,\omega \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi}$

b) *Caracteristicile de modul (asimptotică şi reală) ale unui filtru Butterworth de ordinul N, cu pulsația de tăiere de 1rad/s, sunt prezentate în figura următoare.*

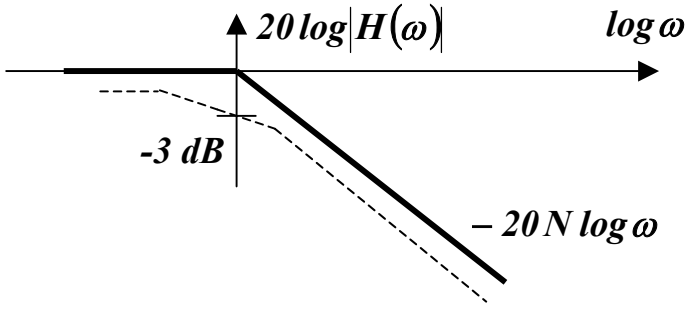


Fig.1.2. Caracteristicile de modul ale unui filtru Butterworth de ordinul N cu pulsația de tăiere de 1 rad/s.

Caracteristica Bode de modul are următoarea expresie:

$$20\log|H(\omega)| = 10\log\frac{1}{1+\omega^{2N}} = \begin{cases} 0, & |\omega| \le 1 \\ -20N\log\omega, & |\omega| >> 1 \end{cases}$$

Se constată că:

$$20\log|H_I(\omega)| = \begin{cases} 0, & |\omega| \le 1 \\ -20N\log\omega, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

de unde:

$$20\log|H_I(\omega)|^2 = \begin{cases} 0, & |\omega| \le 1 \\ -40N\log\omega, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

De aceea:

$$|H_I(\omega)|^2 = \begin{cases} 1, & |\omega| \le 1 \\ \dfrac{1}{\omega^{2N}}, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

c)

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{Pentru} \quad 0 \le \omega < 1 & |H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\omega^{2N}} \le 1 = |H_I(\omega)|^2 \\ \textbf{Pentru} \quad \omega > 1 & |H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\omega^{2N}} < \dfrac{1}{\omega^{2N}} = |H_I(\omega)|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow |H(\omega)|^2 \le |H_I(\omega)|^2$$

d)

$$B_{z_N} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1+\omega^{2N}} \le \int_{-\infty}^{\infty} |H_I(\omega)|^2 \, d\omega = 2\left[\int_0^1 d\omega + \int_1^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^{2N}}\right] =$$

$$2\left[1 + \frac{1}{1-2N}\omega^{-2N+1}\Big|_1^{\infty}\right] = 2\left(1 + \frac{1}{2N-1}\right) = \frac{4N}{2N-1}$$

Problema 3.

Funcția de transfer a unui filtru trece jos de ordinul II este $\boldsymbol{H(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}$.

În această problemă sunt evidențiate condițiile în care un astfel de sistem aproximează un filtru trece bandă. Pulsația centrală a unui filtru trece bandă, $\boldsymbol{\omega_c}$*, este aceea la care modulul răspunsului în frecvență al acelui sistem este maxim iar pulsațiile la jumătatea puterii sunt cele la care pătratul modulului răspunsului în frecvență îşi înjumătățeşte valoarea. Pentru* $\boldsymbol{0<\xi<<1}$ *şi* $\boldsymbol{\omega_n>>0}$*, desenați costelația de poli şi zerouri a lui* $\boldsymbol{H(s)}$ *şi schițați modulul răspunsului în frecvență corespunzător. Demonstrați că* $\boldsymbol{\omega_c\cong\omega_n}$ *şi că banda filtrului (definită ca diferența pulsaților la jumătatea puterii) este aproximativ* $\boldsymbol{2\xi\omega_n}$.

Rezolvare.

Polii sistemului considerat sunt rădăcinile ecuației:

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0\Rightarrow s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\cong-\xi\omega_n\pm j\omega_n$$

Constelația de poli şi zerouri a sistemului considerat este prezentată în figura următoare.

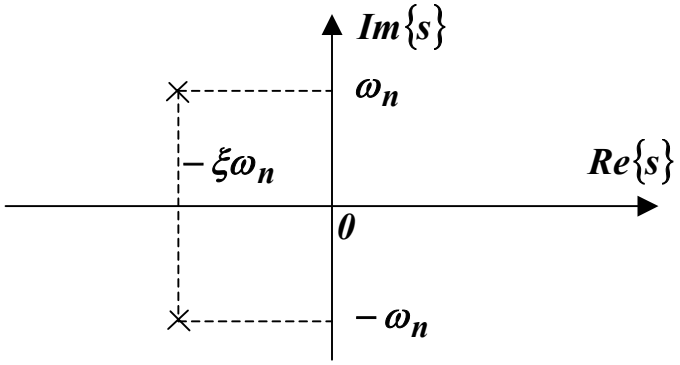


Fig. 1.3. Constelația de poli şi zerouri a funcției de transfer a sistemului considerat.

Răspunsul în frecvență al sistemului considerat se obține particularizând funcția sa de transfer:

$$H(\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}=\frac{\omega_n{}^2}{\omega_n^2-\omega^2+2j\xi\omega\omega_n}$$

Modulul răspunsului în frecvență are expresia:

$$|H(\omega)|=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+4\xi^2\omega^2\omega_n^2}}$$

Graficul său este prezentat în figura următoare.

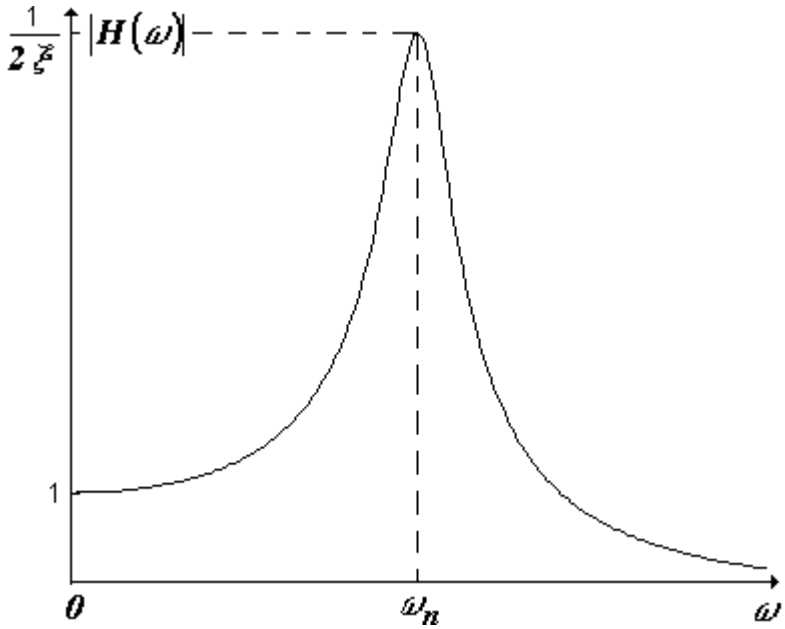


Fig. 2.3. Modulul răspunsului în frecvență al sistemului considerat.

Pătratul modulului răspunsului în frecvență are expresia:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\omega_n^4}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_n^2}$$

Se determină maximul acestei funcții. În acest scop se notează cu $N(\omega)$ *numitorul acestei funcții:*

$$N(\omega) = \left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_n^2$$

Maximul pătratului modulului răspunsului în frecvență se obține când $N(\omega)$ *ia valoarea minimă. Pentru a determina frecvența la care apare acest minim se rezolvă ecuația:*

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow 2\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)(-2\omega) + 8\xi^2\omega\ \omega_n^2 = 0$$

cu rădăcinile 0 ***sau*** $\pm\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$. *Conform figurii 2.3. rădăcina care convine este:*

$$\omega_c = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \overset{\xi<<1}{\cong} \omega_n$$

Se determină capetele benzii la –3dB a filtrului trece bandă, ω_1 *şi* ω_2. *În acest scop se rezolvă ecuația:*

$$\left|H\left(\omega_{1,2}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}\left|H\left(\omega_c\right)\right|^2 = \frac{1}{8\xi^2\left(1-\xi^2\right)}$$

Se obține următoarea ecuație de gradul IV:

$$\frac{\omega_n^4}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+4\xi^2\omega^2\omega_n^2} = \frac{1}{8\xi^2\left(1-\xi^2\right)}$$

cu rădăcinile:

$$\omega_{1,2,3,4} = \pm\omega_n\sqrt{1-2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

În consecință banda filtrului este de:

$$B = \omega_1 - \omega_2 = \frac{4\xi\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-2\xi^2+2\xi\sqrt{1-\xi^2}}+\sqrt{1-2\xi^2-2\xi\sqrt{1-\xi^2}}} \cong$$

$$\overset{\xi<<1}{\cong} \frac{4\xi}{2}\cdot\omega_n = 2\xi\omega_n$$

8. EŞANTIONAREA SEMNALELOR 415
8.1 Reprezentarea unui semnal definit în timp continuu prin eşantioanele sale. Teorema eşantionării. 415
8.1.1 Eşantionarea ideală 415
8.1.2 Spectrul semnalului eşantionat ideal 416
8.1.3 Reconstruirea semnalului eşantionat ideal 418
8.1.4 Erori în eşantionarea ideală a unui semnal 425
8.1.5 Eşantionarea ideală a semnalelor periodice 428
8.1.6 Relaţii energetice 434
8.2 Eşantionarea cu memorare 435
8.3 Eşantionarea naturală 438
8.4 Relaţia dintre spectrul unui semnal discret şi spectrul semnalului analogic din care provine 440
8.5 Eşantionarea semnalelor discrete 442
8.6 Eşantionarea spectrului X(Ω) al unui semnal discret de durată finită . . 448
8.7 Măsuri practice ce se iau în cazul eşantionării semnalelor definite în timp continuu 450
8.8 Eşantionarea semnalelor trece bandă 451

8. EŞANTIONAREA SEMNALELOR

Una din etapele importante în prelucrarea numerică a semnalelor o constituie discretizarea variaţiei lor în timp, numită eşantionare. Aşa cum se va arăta în cele ce urmează, este posibilă reconstruirea semnalului din eşantioanele sale numai dacă acesta este de bandă limitată, iar pasul de eşantionare este suficient de mic. În acest caz se poate spune că mulţimea eşantioanelor semnalului analogic (cu variaţie în timp continuu) $x_a(t)$, $\{x_a(nT_e) \mid n \in Z\}$, caracterizează complet semnalul. Rămâne să stabilim corelaţia dintre durata T_e şi frecvenţa maximă din spectrul semnalului analogic $x_a(t) \longleftrightarrow X_a(\omega)$, ω_M .

Dar nu numai semnalele cu variaţie în timp continuu pot fi eşantionate ci şi semnalele definite în timp discret (semnalele discrete). Procedeul de eşantionare al semnalelor continue este urmat, de obicei, de un procedeu de "decimare" prin care unele valori obţinute prin eşantionare sunt ignorate, rezultând o "comprimare" în timp a semnalului discret eşantionat.

O altă problemă importantă o constituie reconstruirea semnalelor din eşantioanele lor. Această reconstruire se obţine printr-o operaţie de filtrare. Stabilirea caracteristicilor filtrului de reconstrucţie constituie un alt scop al acestui capitol.

8.1 Reprezentarea unui semnal definit în timp continuu prin eşantioanele sale. Teorema eşantionării.

8.1.1 Eşantionarea ideală

Semnalul definit în timp continuu se va nota: $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$. Uneori, pentru a sublinia caracterul semnalului sau al spectrului, vom adăuga indicele "a" - $x_a(t) \equiv x(t)$, $X_a(\omega) \equiv X(\omega)$ - de la "analogic".

Produsul dintre semnalul x(t) şi un impuls de arie unitară $u_\epsilon(t)$ - figura 8.1 :

$$u_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\left[\sigma(t) - \sigma(t-\epsilon)\right] \quad , \tag{8.1}$$

deplasat cu kT_e :

$$x(t)\, u_\epsilon(t - kT_e) \;\cong\; x(kT_e)\, u_\epsilon(t - kT_e) \quad ,$$

tinde (slab) către:

$$x(t)\, \delta(t - kT_e) \;=\; x(kT_e)\, \delta(t - kT_e) \quad , \tag{8.2}$$

Acest produs schimbă dimensional semnalul, deoarece $[u_\epsilon] = \sec^{-1}$ şi, dacă [x]=V , atunci $[u_\epsilon x] = V \cdot \sec^{-1}$.

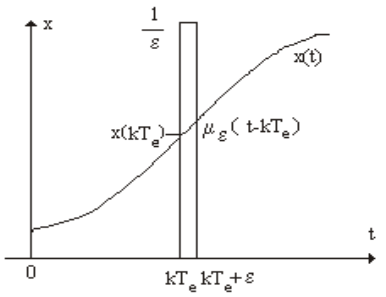


Fig.8.1 Produsul dintre un impuls de arie unitară şi semnalul x(t).

Relaţia (8.2) cunoscută şi de la studiul distribuţiilor, constituie fundamentul matematic - modelul - de extragere al unui eşantion din semnal. Dacă se consideră acum cazul eşantionării uniforme, cu pasul de eşantionare T_e , utilizăm ca model matematic al acesteia pe cel prezentat în figura 8.2, o extindere a modelului ce ne-a fost sugerat prin figura 8.1. Semnalul eşantionat, notat cu $\hat{x}(t)$ are, conform modelului, expresia:

$$\hat{x}(t) = x(t)\delta_{T_e}(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_e) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\,\delta(t-kT_e) \quad . \tag{8.3}$$

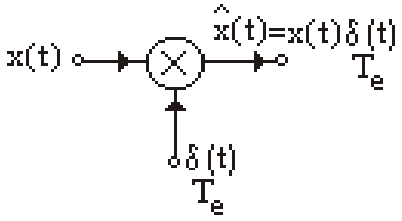


Fig.8.2 Modelul matematic al eşantionării unui semnal.

Atragem atenţia asupra faptului că în unele lucrări, pentru a evita schimbarea dimensiunii semnalului eşantionat, considerată nefirească, modelul matematic se adaptează. Se utilizează ca factor în produs distribuţia $T_e\delta_{Te}(t)$ în locul distribuţiei $\delta_{Te}(t)$. Acest model alternativ conduce la următoarea expresie a semnalului eşantionat:

$$\hat{x}(t)T_e\delta_{T_e}(t) = x(t)T_e\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}T_e x(kT_e)\delta(t- \tag{8.3'}$$

Deşi are unele avantaje, acest model este mai puţin răspândit, motiv pentru care va fi preferat primul model prezentat.

8.1.2 Spectrul semnalului eşantionat ideal

Fie spectrul semnalului x(t), X(ω). Pentru a determina spectrul semnalului eşantionat, se aplică relaţiei (8.3) transformarea Fourier şi se ţine seama de teorema convoluţiei spectrelor (produsul semnalelor):

$$\hat{X}(\omega) = \mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\delta_{T_e}(t)\} = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \mathcal{F}\{\delta_{T_e}(t)\} \tag{8.4}$$

Dar spectrul distribuţiei Dirac periodice este, conform relaţiei (4.122):

$$\mathcal{F}\{\delta_{T_e}(t)\} = \omega_e\,\delta_{\omega_e}(\omega) \quad , \quad \omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \quad . \tag{8.5}$$

şi, prin urmare:

$$\hat{X}(\omega) = \mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} = \frac{1}{T_e} X(\omega) * \delta_{\omega_e}(\omega) = \frac{1}{T_e} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_e) =$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_e) \quad .$$

Ţinând cont de regula de calcul a convoluţiei cu distribuţia Dirac obţinem în final relaţia:

$$\hat{X}(\omega) = \mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_e) \quad , \quad \omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \quad . \qquad \textbf{(8.6)}$$

Spectrul semnalului eşantionat este suma repetărilor periodice, cu perioada ω_e, a spectrului semnalului iniţial, scalat cu factorul $1/T_e$.

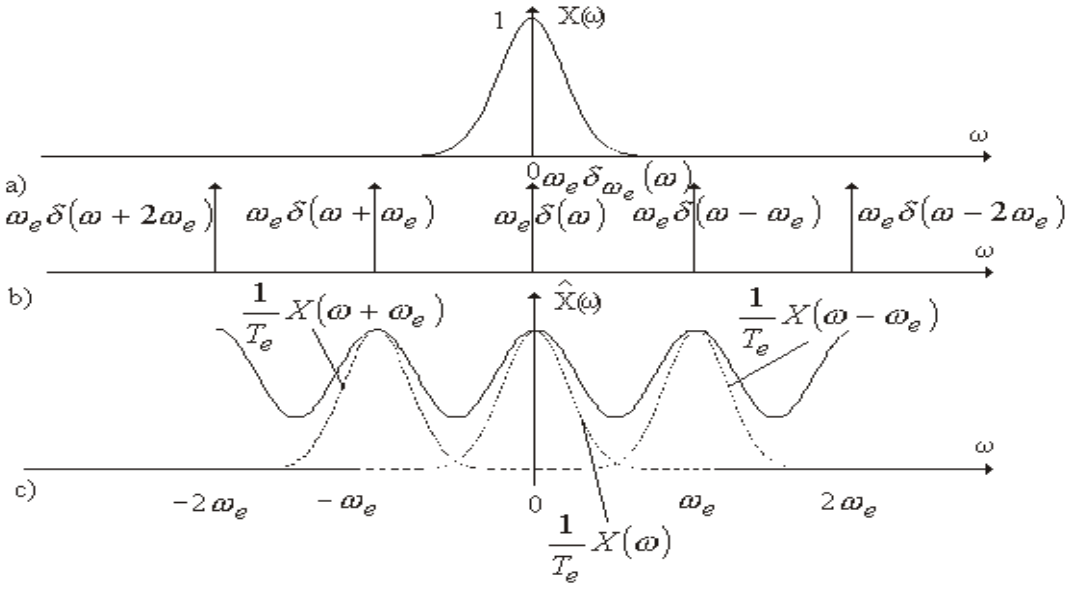


Fig.8.3 Efectul eşantionării ideale asupra spectrului semnalului eşantionat. Semnalul x(t) are spectrul X(ω) cu suportul nemărginit (semnal de bandă nelimitată) .

În figura 8.3 a este prezentat spectrul X(ω) al unui semnal de bandă limitată. Spectrul X(ω) are suportul extins pe toată axa reală. Factorul (8.5), $\omega_e \cdot \delta_{\omega_e}(\omega)$, din convoluţia (8.4) este cel din figura 8.3 b iar figura 8.3 c prezintă spectrul semnalului eşantionat, $\hat{X}(\omega)$. După cum se poate lesne observa, oricât ar fi valoarea pulsaţiei de eşantionare ω_e (cu alte cuvinte, a pasului de eşantionare T_e) a unui semnal de bandă nelimitată, din spectrul $\hat{X}(\omega)$ al semnalului eşantionat nu mai poate fi recuperat spectrul iniţial X(ω). În consecinţă, oricât ar fi pasul de eşantionare T_e a unui semnal de bandă nelimitată, din eşantioanele sale $\{x(nT_e) \mid n \in Z\}$ nu mai poate fi reconstruit semnalul iniţial.

8.1.3 Reconstruirea semnalului eşantionat ideal

Fie acum x(t), un semnal de bandă limitată la $\pm\omega_M$. Această limitare atrage după sine faptul că x(t) este un semnal cu suportul în timp nemărginit. Expresia (8.6) a spectrului X(ω) a semnalului eşantionat rămâne aceeaşi.

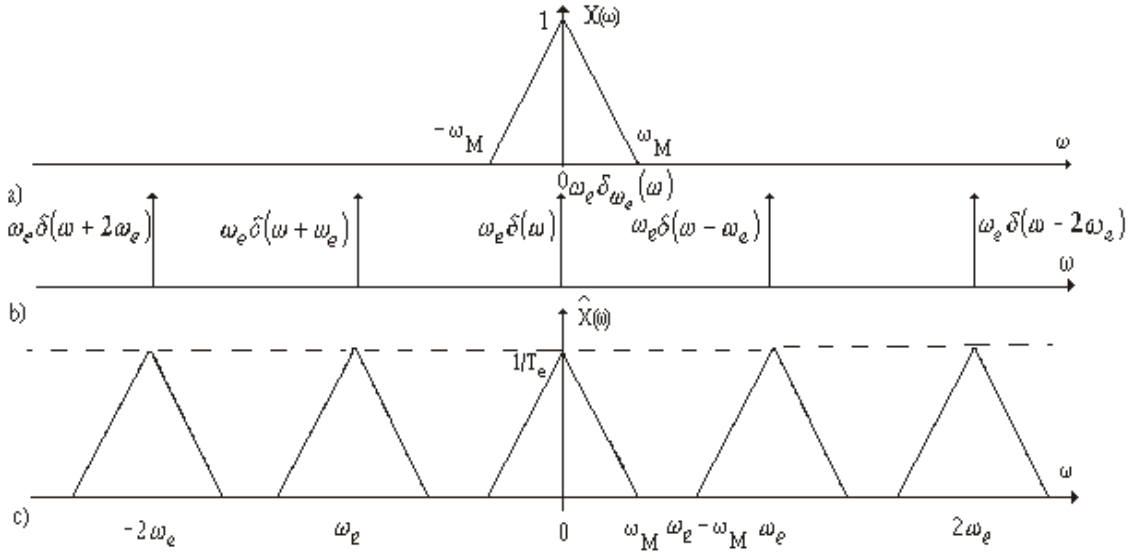


Fig.8.4 Eşantionarea unui semnal de bandă limitată la $\pm\omega_M$. Dacă $\omega_M \le \omega_e-\omega_M$, lobii spectrali rezultaţi nu se suprapun.

Figura 8.4 a prezintă spectrul X(ω) , X(ω) ≡ 0 pentru $|\omega| > \omega_M$ precum şi factorul de convoluţie $\omega_e \cdot \delta_{\omega_e}(\omega)$ - figura 8.4 b. Rezultatul convoluţiei - relaţia (8.6) - este cel din figura 8.4 c. Pentru ordinul k, lobii spectrali $X(\omega-k\omega_e)$ nu se suprapun, dacă este îndeplinită condiţia ce rezultă, în mod evident, din figură:

$$\omega_M \le \omega_e - \omega_M \quad sau \quad 2\omega_M \le \omega_e \quad ; \quad T_e \le \frac{\pi}{\omega_M} \quad . \tag{8.7}$$

Deoarece lobii spectrali de diferite ordine nu se suprapun, lobul central, k = 0, poate fi extras prin filtrare trece jos ideală. Dacă filtrul de reconstrucţie $H_r(\omega)$ are răspunsul în frecvenţă:

$$H_r(\omega) = T_e p_{\omega_c} = \begin{cases} T_e & , \ |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \ |\omega| > \omega_c \end{cases} , \tag{8.8}$$

şi, dacă frecvenţa sa de tăiere ω_c satisface condiţia:

$$\omega_M \le \omega_c \le \omega_e - \omega_M \quad , \tag{8.9}$$

atunci:

$$X_r(\omega) = H_r(\omega) \cdot \hat{X}(\omega) = T_e p_{\omega_c}(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_e} X(\omega - k\omega_e) = X(\omega) \ . \tag{8.10}$$

Dacă aplicăm semnalul eşantionat $\hat{x}(t)$ la intrarea filtrului ce are răspunsul în frecvenţă $H_r(\omega)$ (8.8) şi, de asemenea, respectă condiţia (8.9), atunci, la ieşirea sa, apare semnalul $y(t) = x_r(t)$ ce are spectrul $X_r(\omega)$ egal cu spectrul semnalului x(t) supus eşantionării, $X(\omega)$: $X_r(\omega) = X(\omega)$. Egalitatea spectrelor atrage după sine egalitatea aproape peste tot a semnalelor:

$$x_r(t) = x(t) \quad a.p.t. \tag{8.11}$$

În figura 8.5 poate fi urmărită procedura de extragere a spectrului semnalului iniţial din spectrul semnalului eşantionat, $\hat{X}(\omega)$, prin filtrare trece jos ideală.

Putem exprima expresia semnalului x(t) în funcţie de eşantioanele sale. În acest scop, avem în vedere faptul că funcţia pondere a filtrului de reconstrucţie este:

$$h_r(t) = T_e \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad \longleftrightarrow \quad T_e p_{\omega_c}(\omega) \quad . \tag{8.12}$$

La ieşirea filtrului rezultă, conform relaţiei (8.11), semnalul iniţial, x(t):

$$\begin{aligned} x(t) &= h_r(t) * \hat{x}(t) = h_r(t) * \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\, \delta(t - kT_e) \right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \left[h_r(t) * \delta(t - kT_e) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\, h_r(t - kT_e) \quad . \end{aligned} \tag{8.13}$$

Ţinând seama de expresia (8.12), formula de reconstruire devine:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) T_e \frac{\sin \omega_c (t - kT_e)}{\pi (t - kT_e)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) 2 \frac{\omega_c}{\omega_e} \frac{\sin \omega_c (t - kT_e)}{\omega_c (t - kT_e)} \ . \tag{8.14}$$

Frecvenţa de eşantionare minimă, ce permite, încă, reconstruirea semnalului din eşantioanele sale, corespunde cazului în care lobii spectrali se ating, fără, însă, să se suprapună: $\omega_e = 2\omega_M$. Această frecvenţă minimă, egală cu dublul frecvenţei maxime din spectrul semnalului, ω_M , se numeşte şi frecvenţă Nyquist.

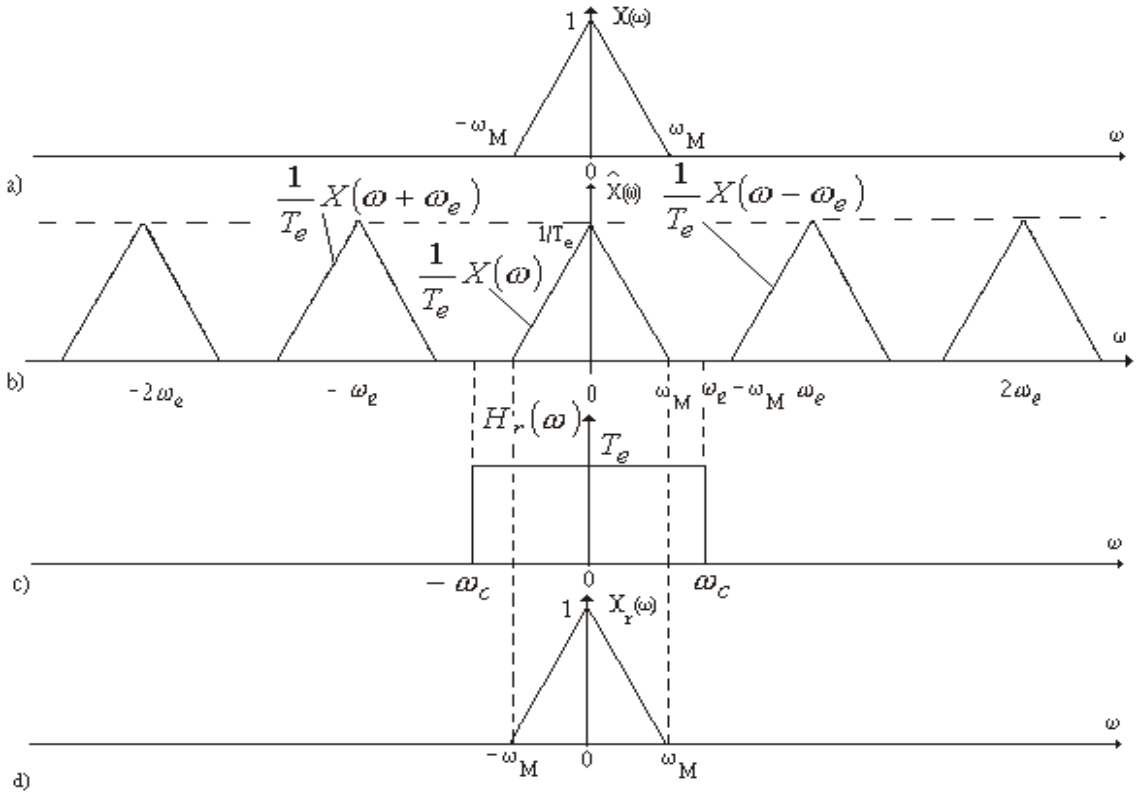


Fig.8.5 Eşantionarea unui semnal de bandă limitată, $\omega_M \le \omega_e - \omega_M$, permite reconstruirea, prin filtrare TJ ideală, a spectrului iniţial.

În cazul $\omega_e = 2\omega_M$, conform condiţiei (8.9), frecvenţa de tăiere a filtrului de reconstrucţie devine:

$$\omega_c = \omega_M = \frac{\omega_e}{2} \quad . \tag{8.15}$$

Relaţia de reconstruire (8.14) se particularizează, în acest caz devenind:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\,\frac{\sin\omega_M(t-kT_e)}{\omega_M(t-kT_e)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\,\frac{\sin(\omega_M t - k\pi)}{\omega_M t - k\pi} \tag{8.16}$$

Dacă se eşantionează cu o frecvenţă mai mică decât frecvenţa Nyquist, $2\omega_M$, după cum evidenţiază figura 8.6, se produce suprapunerea lobilor spectrali de diferite ordine. Deşi semnalul eşantionat este de bandă limitată, ca urmare a unei frecvenţe de eşantionare prea reduse, nu se mai poate reconstrui semnalul iniţial din eşantioanele sale $\{x(nT_e) \mid n \in Z\}$.

Rezultatele obţinute până în acest punct pot fi sintetizate prin teorema eşantionării, cunoscută şi sub numele de teorema WKS (Whittaker, Kotelnikov, Shannon).

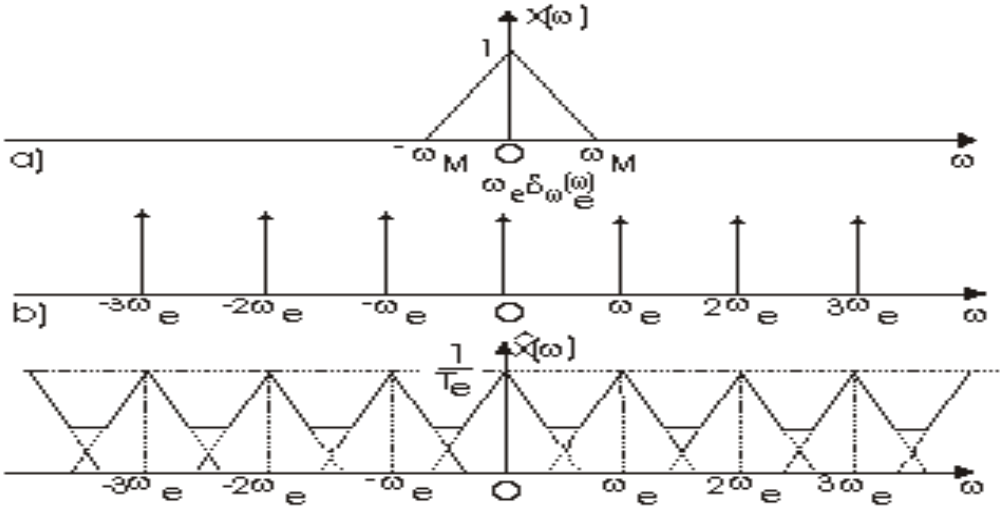


Fig.8.5 Suprapunerea lobilor spectrali rezultaţi prin eşantionare, atunci când $\omega_e-\omega_M< \omega_M$.

Teorema eşantionării (WKS)

Dacă semnalul x(t) este de bandă limitată, X(ω) ≡ 0 pentru $|\omega|>\omega_M$, atunci x(t) este unic determinat de mulţimea eşantioanelor sale $\{x(nT_e) \mid n\in Z\}$, dacă $\omega_e=2\pi/T_e \geq 2\omega_M$.

În ipotezele de mai înainte, fiind dată mulţimea eşantioanelor $\{x(nT_e) \mid n\in Z\}$, se poate reconstrui semnalul iniţial utilizând relaţia de interpolare:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\, 2\,\frac{\omega_c}{\omega_e}\,\frac{\sin\omega_c(t-kT_e)}{\omega_c(t-kT_e)} \quad ,$$

cu condiţia ca ω_c să fie ales astfel încât $\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_e-\omega_M$.

Se desprinde concluzia majoră că un semnal ce are banda ω_M trebuie eşantionat cu o frecvenţă de eşantionare cel puţin dublă, $\omega_e \geq 2\omega_M$.

Se poate arăta că mulţimea $\left\{\frac{1}{\sqrt{T_e}}\, h_r(t-kT_e) \triangleq h_k(t)\right\}_{k\in Z}$, este o bază ortonormată a spaţiului Hilbert al semnalelor de bandă limitată şi energie finită: $B^2_{\omega_M} = \left\{x(t)\in L^2(\mathbb{R}) \mid X(\omega) = 0 \ pentru \ |\omega|>\omega_M\right\}$, pentru $\omega_c = \omega_M = \omega_e/2$.

În acest caz teorema WKS se exprimă sub forma particulară:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{T_e}\, x(kT_e) \frac{1}{\sqrt{T_e}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T_e}(t-kT_e)\right) \quad . \tag{8.17}$$

Elementele mulţimii $\{h_k(t)\}_{k\in Z}$ sunt de forma:

$$h_k(t) = \sqrt{T_e} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_e}(t-kT_e)\right]}{\pi(t-kT_e)} = \frac{1}{\sqrt{T_e}} \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{T_e}(t-kT_e)\right] \quad . \tag{8.18}$$

Pe baza relaţiei (8.17) se constată că orice semnal de energie finită şi bandă limitată, $x \in B_{\frac{\omega_e}{2}}^2$ se exprimă sub forma unei combinaţii liniare de elemente $\{h_k(t)\}_{k\in Z}$. Acesta este motivul pentru care se poate afirma că mulţimea $\{h_k(t)\}_{k\in Z}$ este completă în spaţiul $B_{\frac{\omega_e}{2}}^2$. Mulţimea este şi ortonormată pentru că:

$$\left\langle h_k(t)\ ,\ h_n(t)\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle H_k(\omega)\ ,\ H_n(\omega)\right\rangle \quad , \tag{8.19}$$

sau:

$$\left\langle h_k(t), h_n(t)\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T_e p_{\frac{\omega_e}{2}}^2(\omega) e^{-j(k-n)T_e\omega} d\omega = T_e \frac{2j\sin\left[(n-k)\frac{\omega_e T_e}{2}\right]}{2j(n-k)T_e\pi} =$$

$$= \frac{\sin\left[(n-k)\frac{\omega_e T_e}{2}\right]}{(n-k)\frac{\omega_e T_e}{2}} = \operatorname{sinc}\left[(n-k)\pi\right] = \begin{cases} 1 & ,\ n = k \\ 0 & ,\ \hat{i}n\ rest \end{cases} \quad .$$

(8.20)

Fiind ortonormată şi completă, mulţimea $\{h_k(t)\}_{k\in Z}$ este o bază ortonormată a spaţiului $B_{\frac{\omega_e}{2}}^2$.

Orice semnal din $B_{\frac{\omega_e}{2}}^2$ poate fi descompus într-o serie Fourier în această bază. Expresia coeficienţilor Fourier ai acestei descompuneri este:

$$c_k = \langle x(t), h_k(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle X(\omega), H_k(\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi} \sqrt{T_e} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega k T_e} p_{\frac{\omega_e}{2}}(\omega) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{T_e} \int_{-\frac{\omega_e}{2}}^{\frac{\omega_e}{2}} X(\omega) e^{j\omega k T_e} d\omega = \sqrt{T_e} \mathcal{F}^{-1} \{X(\omega)\} \Big|_{t = kT_e} = \sqrt{T_e}\, x(kT_e) \quad .$$

Deci:

$$c_k = \sqrt{T_e}\, x(kT_e) \quad , \quad k \in Z \quad , \qquad \textbf{(8.21)}$$

şi sunt proporţionale cu eşantioanele semnalului de prelucrat.

Expresia descompunerii în serie Fourier este:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{T_e}\, x(kT_e)\, h_k(t) \quad . \qquad (8.22)$$

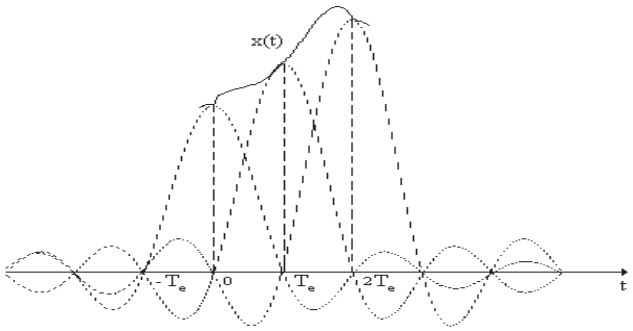


Fig.8.7 Semnalul x(t) reconstruit prin suma (8.17). Într-un punct de eşantionare apare contribuţia unui singur termen al sumei

Formula de interpolare (8.17) - sau celelalte - permite reconstrui-rea semnalului. Dacă $\omega_c = \omega_e/2$, aşa cum se observă şi din figura 8.7, în punctele de eşantionare toţi termenii sumei sunt nuli, cu excepţia unuia, a cărui valoare este egală cu valoarea eşantionului. Între două puncte de eşantionare, semnalul se reconstruieşte prin contribuţia tuturor termenilor sumei.

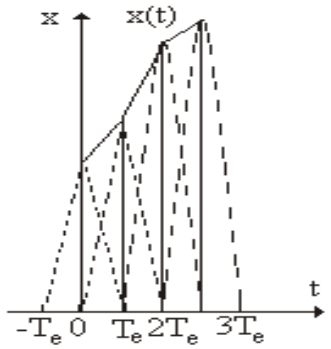


Fig.8.8 Reconstruirea semnalului eşantionat prin interpolare liniară între două eşantioane succesive.

Reconstrucţia obţinută prin filtrarea trece jos ideală a semnalului eşantionat ideal nu este unica posibilă. Există şi alte metode de interpolare, dar ele sunt aproximări, pe când relaţiile deduse până acum erau egalităţi.

O modalitate de interpolare o constituie unirea valorilor a două eşantioane succesive cu linii drepte, aşa cum se arată în figura 8.8. Semnalul reconstruit $x_r(t)$ nu mai este egal cu x(t). Se poate scrie doar că $x_r(t) \approx x(t)$.

Analiza figurii ne arată faptul că ordonatele segmentelor ce unesc punctele de eşantionare de pe curbă, pot fi considerate ca reprezentând, la fiecare moment de timp, suma ordonatelor a două flancuri de triunghiuri. Triunghiurile sunt isoscele, şi au ca înălţime chiar valoarea eşantionului în punctul respectiv, iar ca bază $2T_e$.

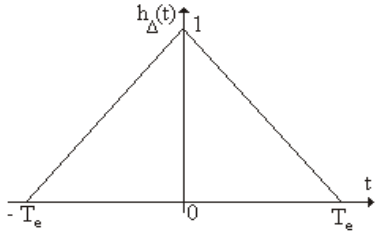


Fig.8.9 Răspunsul la impuls al filtrului de interpolare liniară.

În concluzie, putem considera interpolarea liniară ca fiind obţinută prin aplicarea semnalului eşantionat la intrarea unui sistem având răspunsul la impuls triunghiular, aşa cum se prezintă în figura 8.9. Ca urmare a necauzalităţii sale, în practică se recurge la translatarea răspunsului la impuls. Aceasta are drept consecinţă o întârziere cu un eşantion în semnalul reconstruit. Răspunsul în frecvenţă al filtrului de reconstruire $h_\Delta(t)$ este:

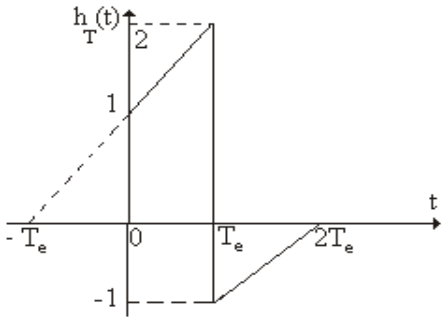


Fig.8.10 Răspunsul la impuls al extrapolatorului de ordinul unu.

$$H_\Delta(\omega) = T_e \left(\frac{\sin \frac{\omega T_e}{2}}{\frac{\omega T_e}{2}} \right)^2 . \qquad \textbf{(8.23)}$$

Prima trecere prin zero a caracteristicii de frecvenţă are loc la $\omega = 2\pi/T_e = \omega_e$. Caracteristica (8.23) aproximează răspunsul unui FTJ ideal.

Sunt utilizate şi alte metode de interpolare, care fac aproximarea funcţiei prin curbe de grad superior. Este posibilă, de asemenea, utilizarea extrapolării. Ea se fundamentează pe aproximarea creşterii funcţiei cu seria Taylor trunchiată, derivatele fiind şi ele aproximate pe baza eşantioanelor

$$x(t) \cong x(nT_e) + \frac{t - nT_e}{1!} \frac{x(nT_e) - x(nT_e - T_e)}{T_e} +$$
$$+ \frac{(t - nT_e)^2}{2!} \frac{x(nT_e) - 2x(nT_e - T_e) - x(nT_e - 2T_e)}{T_e^2} + \ldots, \quad nT_e \le t \le (n+1)T_e . \qquad \textbf{(8.24)}$$

trecute. Astfel, dacă suntem în punctul $t = nT_e$, x(t) se aproximează prin:

Dacă ne oprim la primul termen, obţinem aşa numitul extrapolare de ordinul zero, ce va fi tratată ulterior. Dacă luăm în considerare primii doi termeni, se obţine extrapolarea de ordinul unu, ş.a.m.d.

În figura 8.10 se prezintă răspunsul la impuls unitar al filtrului care asigură aproximarea prin extrapolarea de ordinul unu. Răspunsul său în frecvenţă poate fi uşor determinat şi reprezintă o aproximare (destul de grosieră) a filtrului trece jos ideal.

8.1.4 Erori în eşantionarea ideală a unui semnal

Vom lua în considerare numai erorile cauzate de suprapunerea lobilor spectrali. În figura 8.11 a este prezentat un semnal de bandă nelimitată, eşantionat cu frecvenţa $\omega_e = 2\pi/T_e$. Lobii spectrali se întrepătrund - figura 8.11 c - aşa că filtrând cu un FTJ ideal cu $\omega_c = \omega_e/2$, în banda filtrului nu intră numai o parte din lobul central ci şi "cozi" spectrale ale lobilor vecini.

În urma analizei figurii 8.6, se observă că şi în cazul semnalelor de bandă limitată pot apărea asemenea efecte, prin care "cozi" spectrale ale lobilor vecini intră în intervalul spectral de filtrare. Apare fenomenul denumit în literatura de limbă engleză "alias" iar în cea de limbă franceză "recouvrement spectral" sau chiar "effet de repliement". În limba română tinde să se stabilizeze utilizarea termenului de "aliere" de la aliaj. Dar "alias" în engleză are sensul de "a se da drept altcineva". Într-adevăr, în banda filtrului intră frecvenţe ce apar ca făcând parte din lobul principal, fără însă a fi din el. Vom prefera termenul de eroare "alias".

Evaluarea erorii alias, definită cu:

$$e_a(t) = x(t) - x_r(t) = x(t) - \hat{x}(t) * h_r(t) \quad , \qquad \textbf{(8.25)}$$

va fi făcută pentru semnalul x(t) <—> X(ω) , spectrul X(ω) având suportul nemărginit. În formula erorii se utilizează relaţiile de recuperare a semnalului:

$$e_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_e)\Big] p_{\frac{\omega_e}{2}}(\omega)e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(u)\, p_{\frac{\omega_e}{2}}(u + k\omega_e)e^{jut}e^{jk\omega_e t}du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(-2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(-2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(u)\, e^{jut}e^{jk\omega_e t}\, du \quad .$$

Se face transformarea k —> -k şi u —> ω , şi se obţine:

$$e_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(\omega)\, e^{j\omega t}e^{-jk\omega_e t}d\omega \quad .$$

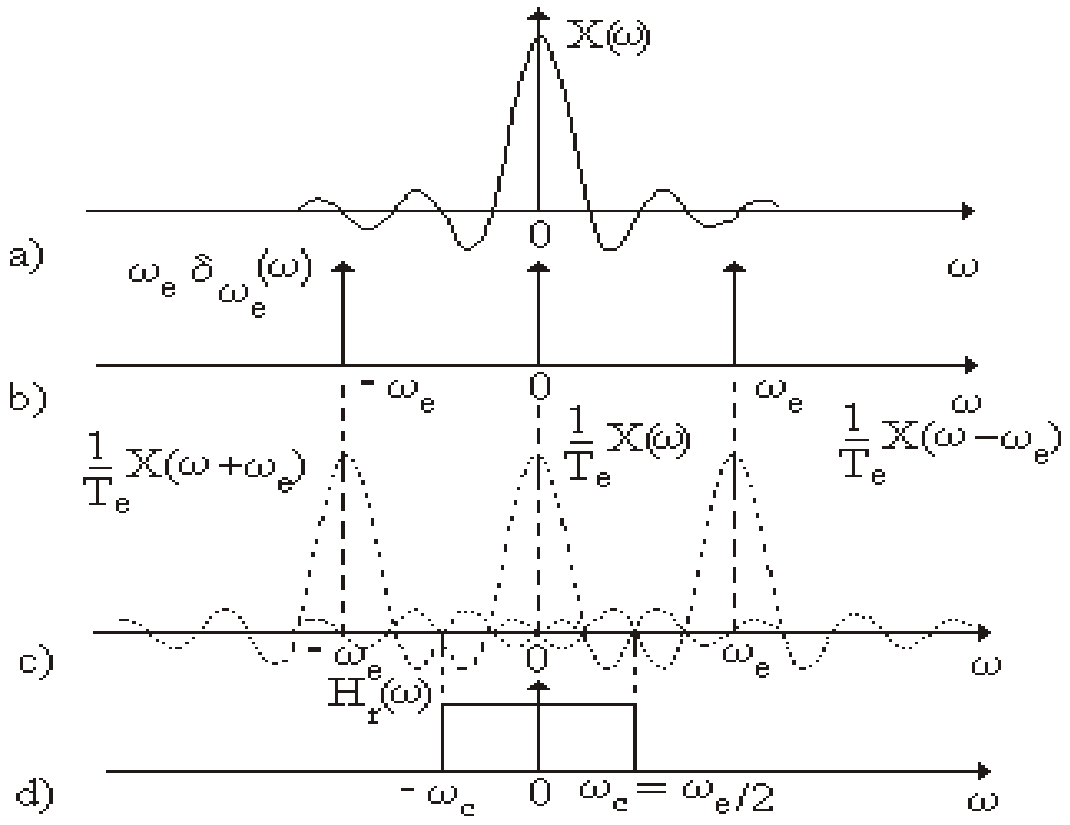


Fig.8.11 Semnalul de bandă nelimitată eşantionat are lobii spectrali întrepătrunşi. În intervalul de filtrare intră contribuţia tuturor lobilor spectrali.

Dar prima integrală poate fi şi ea exprimată printr-o sumă de integrale, cu limite de integrare succesive:

$$e_a(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega_e t}\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad .$$

În final se obţine:

$$e_a(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1-e^{-jk\omega_e t}\right)\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \quad . \qquad \textbf{(8.26)}$$

Modulul erorii poate fi acum majorat, ţinând seama de faptul că $\left|1-e^{-jk\omega_e t}\right| \le 2$. Se obţine:

$$|e_a(t)| \le \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} |X(\omega)|\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|\,d\omega \quad . \qquad \textbf{(8.27)}$$

Evaluarea erorii cere ca $X(\omega) \in L^1$.

Pornind de la (8.26), eroarea de aliere poate fi exprimată în forme alternative care permit stabilirea unor margini superioare ale acestei erori mai fine decât cea stabilită prin relaţia (8.27). Conform relaţiei (8.26) se mai poate scrie:

$$e_a(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(1-e^{-jk\omega_e t}\right)\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-e^{-jk\omega_e t}\right)\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right) .$$

Făcând în prima sumă schimbarea de indice l = -k se obţine:

$$e_a(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1-e^{-jk\omega_e t}\right)\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega - \left(1-e^{-jk\omega_e t}\right)\int_{-(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{-(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] .$$

Făcând în cea de a doua integrală schimbarea de variabilă u = - ω se obţine:

$$e_a(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(2j\sin\left(k\frac{\omega_e}{2}t\right)\right)\left[e^{-jk\frac{\omega_e}{2}t}\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega + e^{-jk\frac{\omega_e}{2}t}\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}} X(-u)e^{-jut}\left[-du\right]\right] ,$$

sau:

$$e_a(t) = \frac{2j}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sin\left(k\frac{\omega_e}{2}t\right)\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}}\left[X(\omega)e^{j(\omega-k\frac{\omega_e}{2})t} - X(-\omega)e^{-j(\omega-k\frac{\omega_e}{2})t}\right]d\omega\right],$$

Exprimând transformarea Fourier a semnalului x(t) (considerat real) sub forma $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\arg\{X(\omega)\}}$, funcţia $|X(\omega)|$ va fi pară, iar funcţia $\arg\{X(\omega)\}$ impară. Folosind aceste proprietăţi, expresia erorii devine:

$$e_a(t) = \frac{j}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sin\left(k\frac{\omega_e}{2}t\right)\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}}|X(\omega)|\left(e^{j[(\omega-k\frac{\omega_e}{2})t+arg\{X(\omega)\}]} - e^{-j[(\omega-k\frac{\omega_e}{2})t+arg\{X(\omega)\}]}\right)d\omega\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(k\frac{\omega_e}{2}t\right)\int_{(2k-1)\frac{\omega_e}{2}}^{(2k+1)\frac{\omega_e}{2}}|X(\omega)|\sin\left[(\omega-k\frac{\omega_e}{2})t+arg\{X(\omega)\}\right]d\omega \quad .$$

Ultima relaţie poate conduce uşor, prin majorări succesive, la diferite expresii ale marginii superioare ale erorii de aliere.

8.1.5 Eşantionarea ideală a semnalelor periodice

Vom considera cazul unui semnal periodic cu un spectru care se întinde până la armonica a N-a (cea mai mare frecvenţă din spectrul semnalului periodic este $N\omega_o$, unde ω_o este pulsaţia fundamentală). Un astfel de spectru este prezentat în figura 8.12a. Dacă se eşantionează cu o frecvenţă ω_e aflată în relaţie armonică cu fundamentala ω_o , $\omega_e = (M/K)\omega_o$; $M, K \in \mathbb{N}$, semnalul eşantionat rămâne periodic. Se spune că eşantionarea cu $\omega_e = (M/K)\omega_o$ este de tip "corelat" (în sensul frecvenţelor).

Dacă $x(t) = x(t+T)$ şi $x(t) \longleftrightarrow \{c_k\}$, $k \in \{-N,...,0,...,N\}$, atunci:

$$X(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_o) \quad .$$

După eşantionarea corelată, spectrul devine:

$$x(t)\delta_{T_e}(t) \longleftrightarrow \hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_e) =$$

$$= \frac{1}{T_e}\sum_{k=-N}^{N} 2\pi c_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_o - n\omega_e) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-N}^{N} 2\pi c_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_o - n\frac{M}{K}\omega_o) \ .$$

(8.28)

Fie k fixat. Distanţa dintre două linii spectrale în funcţie de n este $(n+1)(M/k)\omega_o$-$n(M/K)\omega_o = (M/K)\omega_o$. Faţă de linia $k\omega_o$ distanţa este $k\omega_o$-$n(M/K)\omega_o$= =$[(kK-nM)/K]\omega_o$ care poate fi minimum ω_o/K .

Lobul spectral corespunzător lui n = 0 se întinde pe semiaxa pozitivă până la $N\omega_o$, pulsaţie căreia îi corespunde termenul $2\pi c_N\delta(\omega-N\omega_o)$ din $\hat{X}(\omega)$. Dacă se consideră lobul vecin de pe semiaxa pozitivă, corespunzător lui n = 1 , atunci cea mai mică frecvenţă a uneia dintre componentele sale spectrale este $[(M/K)-N]\omega_o$, deoarece termenul pentru k = -N şi n = 1 este $2\pi c_{-N}\delta(\omega_o+N\omega_o-(M/K)\omega_o)$.

Nu apar suprapuneri ale lobilor spectrali, dacă:

$$N\omega_o < \left(\frac{M}{K} - N\right)\omega_o \quad , \quad \frac{M}{K} > 2N \quad . \qquad \textbf{(8.29)}$$

Pentru $N = (M/K)-N$ ar apare o suprapunere la frecvenţa $N\omega_o=[(M/K)-N]\omega_o$, termenul sumei care îl exprimă pe $\hat{X}(\omega)$ fiind $2\pi c_N+2\pi c_{-N}$. Dacă toate eşantioanele se prelucrează în aceiaşi perioadă a semnalului (pentru k = 1 condiţia (8.29) devine M > 2N), numărul de eşantioane prelevate trebuie să fie un întreg mai mare ca 2N. Singura soluţie este $M \geq 2N+1$.

Teoremă (i)

Dacă semnalul x(t), periodic de perioadă T , $\omega_o=2\pi/T$ are spectrul de bandă limitată la a N-a armonică, atunci semnalul poate fi în mod unic determinat din eşantioanele sale $\{x(kT_e) \mid 0 \leq k \leq M-1\}$, prelevate în decursul unei singure perioade T a fundamentalei, dacă $M \geq 2N+1$. Din fundamentală se prelevează la limită, trei eşantioane.

Se mai poate spune că $\omega_e = 2\pi/T_e = M(2\pi/T) = M\omega_o \geq 2N\omega_o+\omega_o$. Dacă $\omega_M=N\omega_o$, atunci condiţia de eşantionare fără erori alias devine:

$$\omega_e = M\omega_o \geq 2\omega_M + \omega_o = (2N+1)\omega_o \quad . \qquad \textbf{(8.30)}$$

Vom reţine condiţia implicită din relaţia (8.30) şi anume că ω_e este un multiplu întreg al lui ω_o.

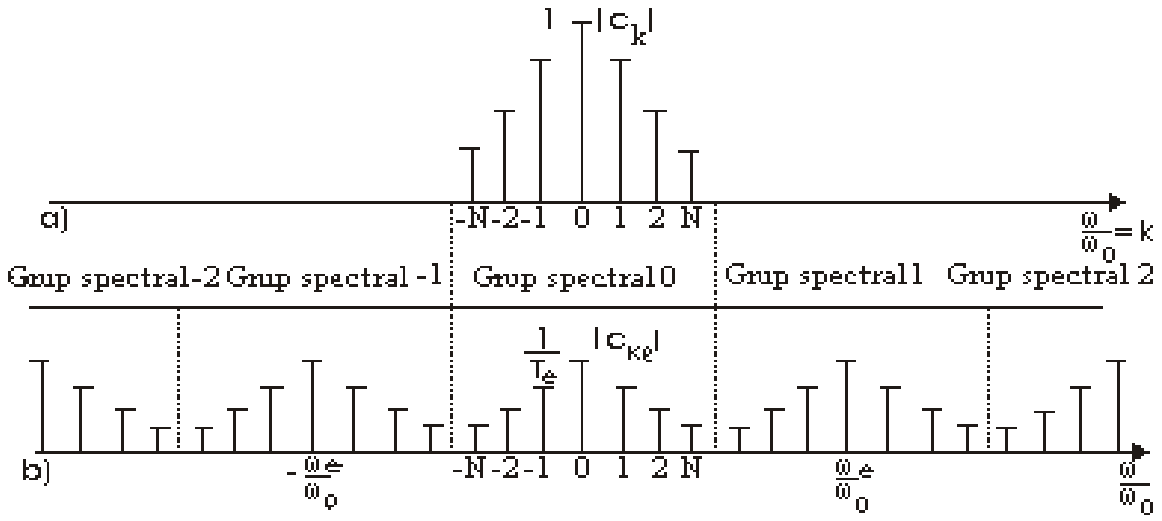


Fig.8.12 Efectul eşantionării corelate a unui semnal periodic. După eşantionare, semnalul rămâne periodic.

Diagrama spectrală de modul din figura 8.12 poate lămuri şi mai bine problema eşantionării corelate. ($\omega_e = M\omega_o$) a unui semnal periodic cu spectru limitat. Pentru ca grupurile spectrale ale coeficienţilor să nu se suprapună este necesar ca ω_e să fie la limită $(2N+1)\omega_o$. În rest frecvenţa de eşantionare poate fi mai mare dar, pentru păstrarea periodicităţii şi după eşantionare, este necesar ca ω_e să fie în relaţie armonică cu frecvenţa fundamentală ω_o .

Dacă ω_e şi ω_o se găsesc în relaţie armonică, $\omega_e = (M/K)\omega_o$, $K \neq 1$, teorema de eşantionare poate fi reformulată.

Teoremă (ii)

Dacă semnalul x(t), periodic de perioadă T, $\omega_o = 2\pi/T$ are spectrul limitat la a N-a armonică, el poate fi reconstruit în mod unic din eşantioanele sale: $\{x(kT_e) \mid 0 \le k \le [M/K]-1\}$, prelevate în decursul unei singure perioade T a fundamentalei, dacă M > 2KN.

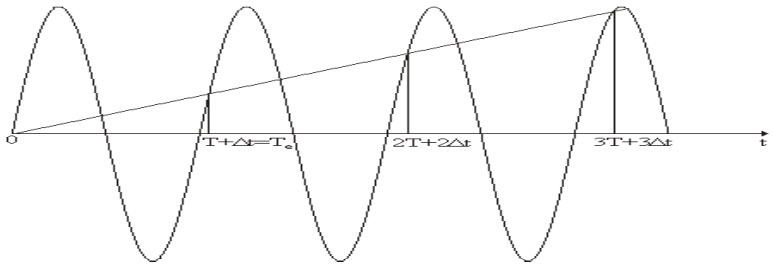


Fig.8.13 Eşantionarea unui semnal periodic de perioadă T cu pasul $T_e = T+\Delta t$, unde $\Delta t = T/M$, $M \in \mathbb{N}$.

Din fundamentală se prelevează minimum două eşantioane dar distanţa T_e dintre ele este mai mică decât T/2 , astfel că nu se ajunge la cazul absurd al eşantionării zerourilor fundamentalei.

Vom considera un caz interesant legat de eşantionarea semnalelor periodice de spectru limitat. În loc de a lua câte un eşantion cu cadenţa T/M , obţinerea celor M eşantioane durând astfel T, o perioadă, se poate recurge la prelevarea eşantioanelor adiacente din perioade succesive. În figura 8.13 se prelevează eşantioane tot după o perioadă plus incrementul pasului de eşantionare, T/M . Rezultă:

$$T_e = T + \frac{T}{M} \quad . \tag{8.31}$$

E

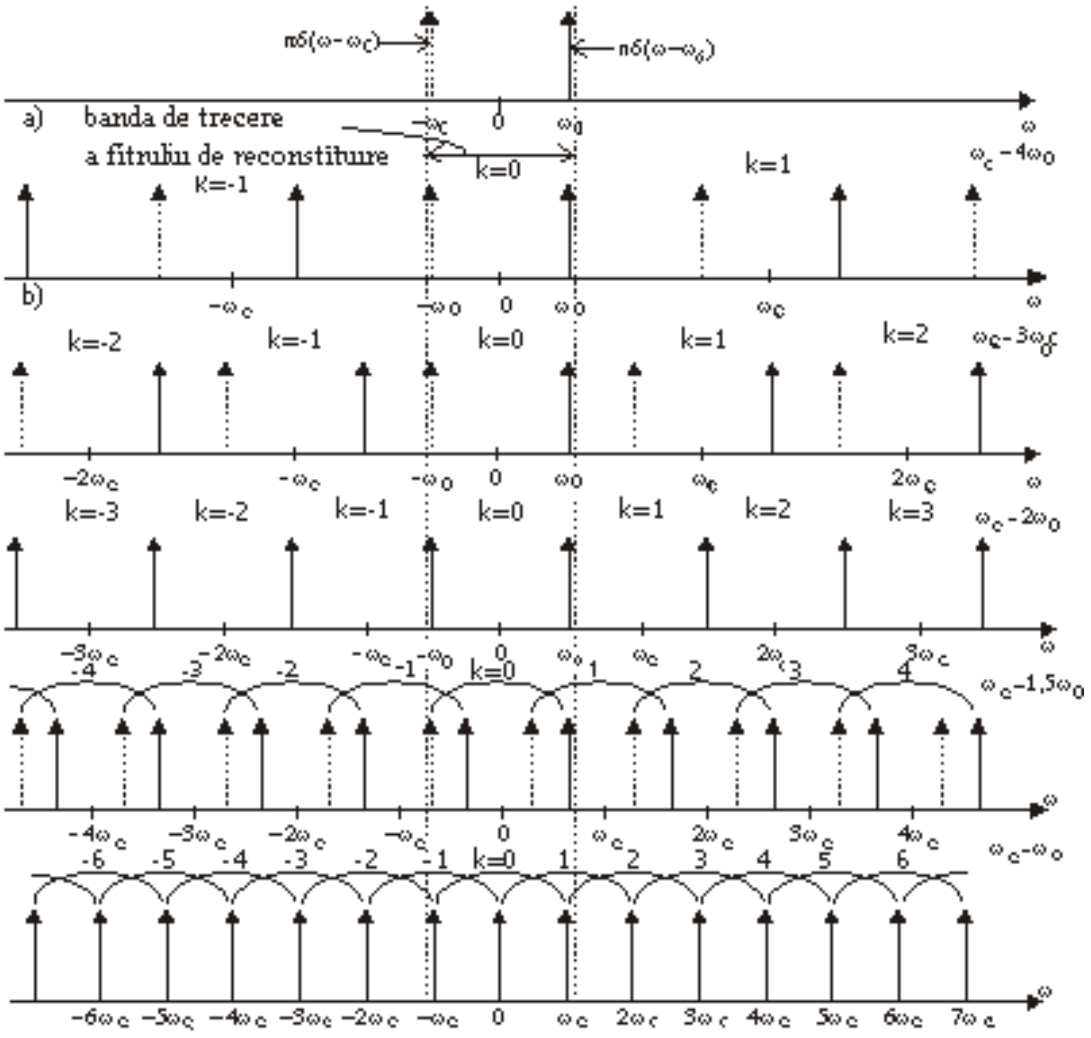


Fig.8.14 Eşantionare unui semnal periodic (a): cu respectarea teoremei eşantionării (b), (c) şi fără respectarea teoremei eşantionării (d), (e) şi (f).

ste posibilă şi o eşantionare mai rară, printr-o prelevare de eşantioane adiacente la un interval de K perioade T plus incrementul T/M :

$$T_e = KT + \frac{T}{M} \quad , \quad K \in \mathbb{N} \quad . \qquad \textbf{(8.31')}$$

Prelevarea celor M eşantioane durează MT (M perioade), respectiv KMT. În schimb semnalul rezultat prin eşantionare are componente spectrale foarte apropriate de zero, cu atât mai apropriate cu cât K este mai mare.

Principiul de eşantionare prezentat este utilizat în osciloscoapele cu eşantionare. Se construiesc relativ uşor generatoare de impulsuri foarte scurte şi circuite care permit eşantionarea cu astfel de impulsuri de durată extrem de redusă. În schimb, amplificatoarele de bandă foarte largă se realizează mai greu. Procedeul expus, coboară frecvenţa semnalului, prin eşantionarea după relaţia (8.31) la valori la care se pot utiliza amplificatoare normale.

În figura 8.14 sunt prezentate spectrele obţinute prin eşantionarea unei cosinusoide de frecvenţă ω_o (fig. 8.14 a). S-a considerat numai cazul eşantionării corelate, cu $\omega_e = (M/K)\omega_o$. În figurile 8.14 b şi 8.14 c sunt date spectrele obţinute pentru $\omega_e = 4\omega_o > 2\omega_o$ şi $\omega_e = 3\omega_o > 2\omega_o$. În banda de trecere a filtrului de reconstrucţie, de frecvenţă de trecere ω_c , $\omega_o < \omega_c \leq \omega_e/2$, intră numai o pereche de linii spectrale (a căror intensitate nu mai este indicată pentru a nu încărca desenul) astfel că semnalul iniţial poate fi reconstruit din eşantioanele sale. Componenta din stânga a spectrului este marcată cu linie întreruptă pentru a o distinge de perechea ei din dreapta, marcată cu linie continuă.

Dacă se eşantionează cu $\omega_e = 2\omega_o$, fără a mai respecta teorema eşantionării semnalelor periodice, care cere inegalitatea $\omega_e > 2\omega_o$! (şi nu admite şi egalitatea ca în cazul semnalelor aperiodice) apare fenomenul de suprapunere a grupurilor (lobilor) spectrului. O linie din stânga este suprapusă peste o linie din dreapta.

Pentru frecvenţe mai mici, $\omega_e < 2\omega_o$, se prezintă două cazuri. Din figura 8.14e se observă că pentru $\omega_e = 1{,}5\omega_o = (3/2)\omega_o$ grupurile spectrale de diverse ordine, indicate prin valorile k, se întrepătrund.

Pentru $\omega_e = \omega_o$ (figura 8.14f) se produce din nou suprapunerea liniilor spectrale.

În concluzie, reconstruirea semnalului iniţial din eşantioanele sale, folosind un filtru trece jos ideal, se poate realiza numai dacă $\omega_e > 2\omega_o$ (inegalitate strictă).

În osciloscoapele cu eşantionare există interesul translatării spectrului semnalului de măsurat într-o bandă de frecvenţe cât mai joase, pentru a putea fi uşor amplificat după filtrarea care separă componentele spectrale din aceiaşi bandă.

Figura 8.15 a arată spectrul cosinusoidei $x(t) = \cos\omega_o t$. Dacă se eşantionează cosinusoida cu $T_e = 2T+T/4$ se obţine o primă pereche spectrală la $\pm(1/9)\omega_o$ (figura 8.15 c). Dacă perioada de eşantionare este şi mai mare, $T_e = 4T+T/4$, prima pereche spectrală se plasează la $\pm(1/17)\omega_o$ (figura 8.15 c). Lungind şi mai mult pasul de eşantionare T_e , se poate micşora şi mai mult ecartul de frecvenţă în care apar două componente spectrale (este adevărat că acestea aparţin altor lobi spectrali, dar acest lucru nu are importanţă în cazul de faţă).

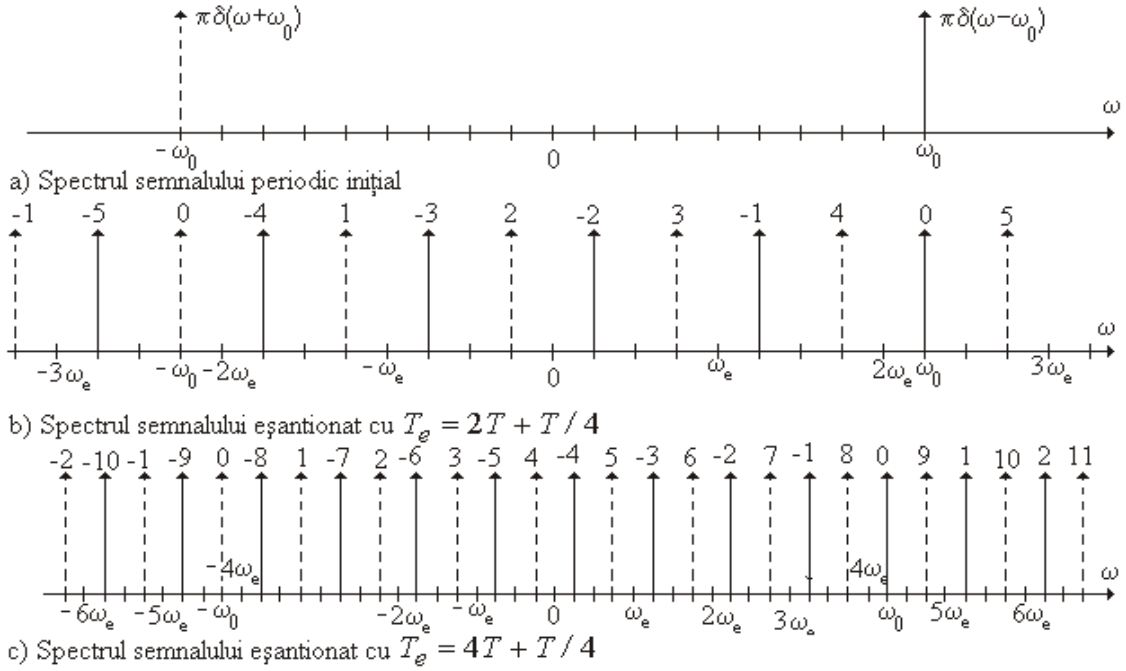


Fig.8.15 Semnal periodic eşantionat cu o frecvenţă inferioară frecvenţei semnalului. Semnalul eşantionat are o altă perioadă decât semnalul iniţial.

În vederea amplificării (în amplificatorul pe verticală al osciloscopului), semnalul eşantionat este filtrat. Dacă în acest scop se utilizează un filtru trece jos ideal cu răspunsul în frecvenţă:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \le \dfrac{\pi}{T_e} \\ 0 & , \quad \hat{i}n\ rest \end{cases} ,$$

atunci din spectrul din figura 8.15 b se separă doar componentele notate cu 2 şi -2, iar din spectrul din figura 8.15 c doar componentele notate cu 4 şi -4 . Semnalele filtrate au spectrele:

$$X_{fb}(\omega) = \frac{1}{T_e}\left\{\pi\left[\delta(\omega+\omega_o-2\omega_e)+\delta(\omega-\omega_o+2\omega_e)\right]\right\} \ , \ \omega_e = \frac{4}{9}\omega_o \quad si:$$

$$X_{fc}(\omega) = \frac{1}{T_e}\left\{\pi\left[\delta(\omega+\omega_o-4\omega_e)+\delta(\omega-\omega_o+4\omega_e)\right]\right\} \ , \ \omega_e = \frac{4}{17}\omega_o \quad .$$

Deci: $x_{fb}(t) = \dfrac{4}{9T}\cos\left(\dfrac{\omega_o}{9}t\right)$ *si* $x_{fc}(t) = \dfrac{4}{17T}\cos\left(\dfrac{\omega_o}{17}t\right)$.

Se constată că semnalele $x_{fb}(t)$ şi $x_{fc}(t)$ sunt proporţionale cu x(t/9), respectiv cu x(t/17). Prin urmare, semnalele obţinute prin filtrare reprezintă variante încetinite ale semnalului x(t) , perioada lui $x_{fb}(t)$ fiind de nouă ori mai mare decât perioada lui x(t) , iar perioada lui $x_{fc}(t)$, de şaptesprezece ori mai mare. Este clar că pentru amplificarea acestor semnale este posibilă utilizarea unor amplificatoare de bandă mai îngustă decât cea necesară pentru semnalul x(t).

În cazul general, când semnalul periodic x(t) de bandă limitată, are mai multe armonice decât în cazul exemplificat, în care $\cos(\omega_o t)$ are doar două componente armonice, valoarea incrementului Δt nu mai poate fi aleasă arbitrar, ea trebuind corelată cu valoarea benzii semnalului care trebuie eşantionat.

8.1.6 Relaţii energetice

Dacă x(t) este un semnal periodic de energie finită şi spectru limitat la $\pm\omega_M$, eşantionând cu $\omega_e \geq 2\omega_M$ se obţin eşantioanele $\{x(kT_e) \mid k \in Z\}$. Relaţia lui Parseval se scrie având în vedere că x(t) se exprimă printr-o serie Fourier generalizată în baza $\{h_k(t)\}_{k\in Z}$ (relaţia 8.17):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sqrt{T_e}\cdot x(kT_e)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad ,$$

adică:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = T_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(kT_e)|^2 \quad . \qquad \textbf{(8.32)}$$

Energia unui semnal de bandă limitată eşantionat conform teoremei eşantionării, se poate calcula şi din eşantioanele sale, conform relaţiei (8.32).

Dacă se eşantionează un semnal periodic, de perioadă T, $\omega_o = 2\pi/T$ de bandă limitată la pulsaţia maximă $N\omega_o$, cu $\omega_e = M\omega_o$, $M \geq 2N+1$, $M \in Z$ se poate imediat verifica relaţia:

$$P = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} |x(kT_e)|^2 \quad , \qquad \textbf{(8.33)}$$

care arată faptul că puterea semnalului poate fi determinată şi din eşantioanele sale. Se pot scrie relaţii asemănătoare şi pentru celelalte cazuri de eşantionare corelată, în care ω_e şi ω_o sunt în relaţie armonică.

8.2 Eşantionarea cu memorare

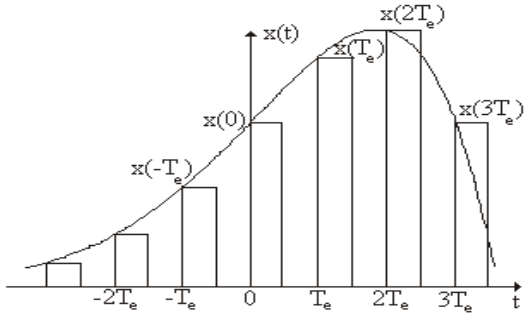


Fig.8.16 Semnal eşantionat cu memorare pe durata Δt.

În sistemele de transmisie a informaţiei ce utilizează modulaţia de amplitudine a impulsurilor se utilizează o eşantionare cu memorare (cu reţinere), aşa cum prezintă figura 8.16.

După obţinerea eşantionului $x(kT_e)$ se generează un impuls cu amplitudinea egală cu valoarea eşantionului şi durata Δt. Se obţine un tren de impulsuri cu perioada de repetiţie T_e, modulat în amplitudine cu valorile semnalului x(t) la momentele de timp kT_e .

Modelul matematic al eşantionării cu memorare este prezentat în figura 8.17. Semnalul $\hat{x}(t)$ obţinut prin eşantionarea ideală a semnalului de bandă limitată x(t) - cu respectarea teoremei eşantionării - se aplică la intrarea unui formator de impulsuri având răspunsul la impuls h(t):

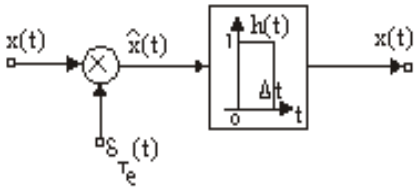


Fig.8.17 Modelul matematic al eşantionării cu memorare.

$$= p_{\frac{\Delta t}{2}}\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right) = \begin{cases} 1\ , & 0<t \\ 0\ , & în\ r \end{cases} \qquad \textbf{(8.34)}$$

La ieşirea formatorului, se obţine semnalul eşantionat cu memorare x̃(t) :

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) * h(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\,\delta(t-kT_e)\right] * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\,h(t-kT_e) \quad .$$

(8.35)

Amplitudinea impulsurilor poartă informaţie asupra semnalului x(t).

Spectrul semnalului eşantionat cu memorare se obţine prin aplicarea teoremei de convoluţie a semnalelor:

$$\tilde{X}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\tilde{x}(t)\right\} = \hat{X}(\omega)\,H(\omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega-k\omega_e)\,e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}}\,2\,\frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\omega} \quad ,$$

sau:

$$\frac{\Delta t}{T_e} e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} X(\omega - k\omega_e) = \frac{\Delta t}{T_e} e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} \qquad \textbf{(8.36)}$$

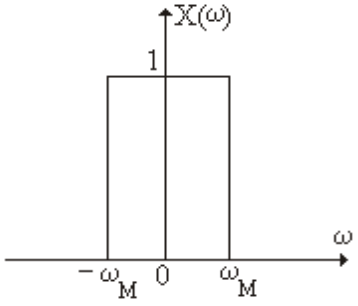


Fig.8.18 Spectrul semnalului supus eşantionării cu memorare.

Pentru a da o interpretare grafică relaţiei (8.36), vom considera că spectrul semnalului de eşantionat, X(ω) , are forma din figura 8.18. Se eşantionează cu $\omega_e=3\omega_M$, iar memorarea se face pe o durată $\Delta t = T_e/2$. Prin urmare $2\omega_e=2\pi/\Delta t$. Curba înfăşurătoare $\sin(\omega\Delta t/2)/(\omega\Delta t/2)$ are trecerile prin zero la frecvenţele $\omega_k=k(2\pi/\Delta t)=2k\omega_e=6k\omega_M$.

În figura 8.19 este prezentată forma spectrului $e^{j\omega\ \Delta t/2}$ X(ω) din relaţia (8.36). Se observă că lobii spectrali din spectrul semnalului eşantionat ideal, X(ω) , sunt deformaţi, deformarea fiind mai pronunţată la lobii de ordin superior (|k| mare). Refacerea semnalului necesită un filtru de reconstrucţie neuniform în banda de trecere.

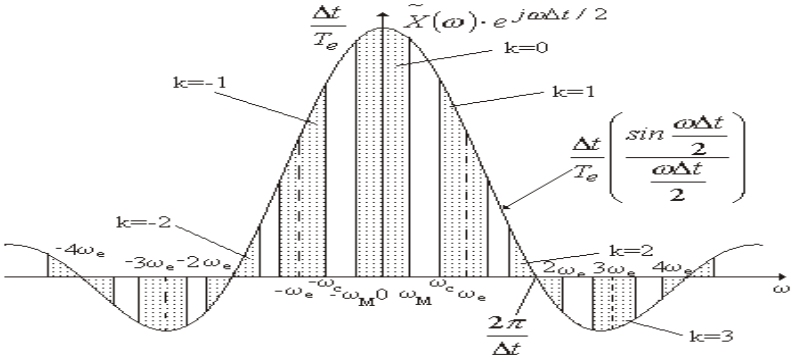


Fig.8.19 Spectrul $e^{j\omega\Delta t/2}$ X(ω). Se observă deformarea lobilor spectrali, în special a celor de ordin superior.

Expresia lobului spectral central din (8.36) este $\frac{\Delta t}{T_e} e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} X(\omega)$.

Produsul cu funcţia de transfer a filtrului de reconstrucţie trebuie să conducă la recuperarea spectrului. Prin urmare, în domeniul $\pm\omega_e/2$ trebuie să avem:

$$\frac{\Delta t}{T_e} e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}} \frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}} X(\omega) H_r(\omega) = X(\omega) \quad ,$$

din care se deduce forma răspunsului în frecvenţă al filtrului de reconstrucţie:

$$H_r(\omega) = \begin{cases} \dfrac{T_e}{\Delta t} \dfrac{\frac{\omega\Delta t}{2}}{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}} e^{j\frac{\omega\Delta t}{2}} & , \ |\omega| < \dfrac{\omega_e}{2} \\ 0 & , \ \hat{i}n \ rest \ . \end{cases} \qquad \textbf{(8.37)}$$

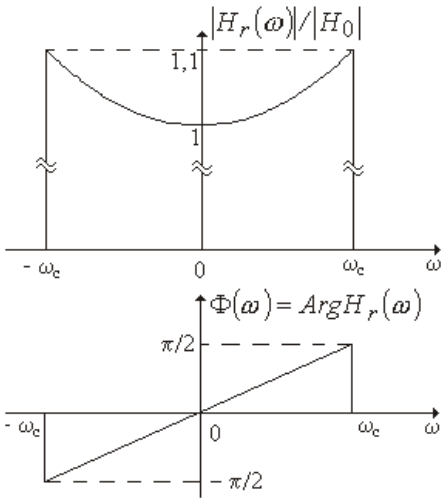


Fig.8.20 Răspunsul în frecvenţă al filtrului de reconstrucţie eşantionat cu memorare.

prin particularizarea relaţiei (8.36) pentru $\Delta t = T_e$:

$$\tilde{X}(\omega) = e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\frac{\omega T_e}{2}}{\frac{\omega T_e}{2}} X(\omega - k\omega_e) \quad . \qquad \textbf{(8.38)}$$

este $|H_o| = T_e/\Delta t$. Modulul răspunsului în frecvenţă, normat la $|H_o|$, este prezentat în figura 8.20, pentru cazul deja amintit, $\omega_e = \pi/\Delta T$, deci $\Delta t = T_e/2$ şi $\omega_c = \omega_e/2$.

Un caz particular al eşantionării cu memorare este cel corespunzător reţinerii pe toată durata T_e , deci $\Delta t = T_e$ - figura 8.21. Cazul corespunde şi interpolării după formula (8.24) în care se ia numai primul termen (interpolarea de ordinul zero)

Spectrul semnalului eşantionat ideal şi interpolat cu un interpolator de ordinul zero, având răspunsul la impuls $h(t) = p_{\frac{T_e}{2}}\left(t - \frac{T_e}{2}\right)$, rezultă

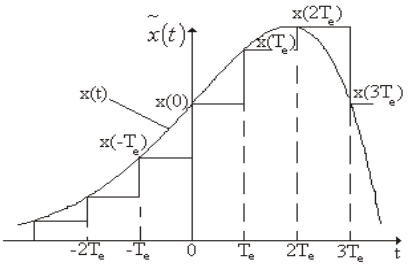


Fig.8.21 Reconstrucţie prin interpolare de ordinul zero.

Efectul extrapolatorului de ordinul zero este cel al unui FTJ cu o caracteristică de modul destul de mult abătută de la cea ideală. Extrapolarea de ordin zero a unui semnal se obţine la ieşirea unui convertor numeric-analogic. În registrul acestuia se încarcă un cod numeric ce corespunde valorii eşantionului; se generează o tensiune ce rămâne constantă până la încărcarea în registrul convertorului a codului următorului eşantion, ş.a.m.d.

8.3 Eşantionarea naturală

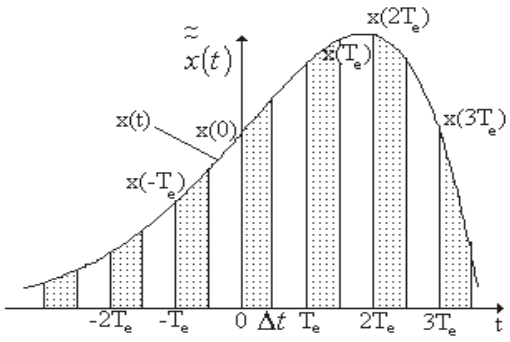


Fig.8.22 Semnalul eşantionat în mod natural pe durata Δt.

Eşantionarea naturală sau cu urmărire, corespunde operaţiunii de "decupare" a unor segmente din semnal de durată Δt şi distanţate între ele cu T_e. Un semnal de bandă limitată eşantionat natural este prezentat în figura 8.22. Modelul matematic al eşantionării uniforme corespunde înmulţirii semnalului x(t) cu un tren de impulsuri de amplitudine unitară, durată Δt şi interval de repetiţie T_e .

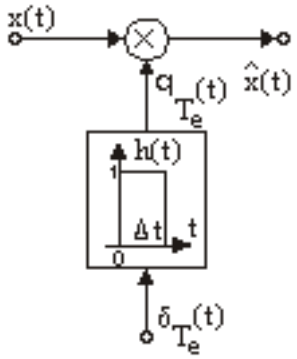


Fig.8.23 Modelul matematic al eşantionării naturale.

Modelul matematic al eşantionării naturale este cel din figura 8.23. Aplicând la intrarea unui formator de impulsuri, cu răspuns la impuls $h(t) = p_{\Delta t/2}(t-\Delta t/2)$, semnalul Dirac periodic $\delta_{Te}(t)$, se obţine trenul de impulsuri $q_{Te}(t)$, periodic cu perioada T_e . Acesta serveşte ca factor multiplicator pentru semnalul x(t) , la ieşirea circuitului de multiplicare obţinându-se $\tilde{x}(t)$, semnalul eşantionat în mod natural.

Expresia semnalului $\tilde{x}(t)$ este următoarea:

$$\tilde{x}(t) = \left[h(t) * \delta_{T_e}(t) \right] = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) p_{\frac{T_e}{2}}(t - \frac{T_e}{2} - kT_e) \ . \tag{8.39}$$

Spectrul semnalului x̃(t), X̃(ω) , se determină după cum urmează:

$$\tilde{X}(\omega)=\mathcal{F}\left\{\left[h(t)*\delta_{T_e}(t)\right]x(t)\right\}=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{h(t)*\delta_{T_e}(t)\right\}*X(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\left[e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}}2\,\frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\omega}\,\omega_e\delta_{\omega_e}(\omega)\right]=$$

$$=\frac{\Delta t}{T_e}X(\omega)*\left[\left(e^{-j\frac{\omega\Delta t}{2}}\frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_e)\right)\right]=\frac{\Delta t}{T_e}X(\omega)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\frac{k\omega_e\Delta t}{2}}\frac{\sin\frac{k\omega_e\Delta t}{2}}{\frac{k\omega_e\Delta t}{2}}\delta(\omega-k\omega_e)\ .$$

Efectuând operaţia de convoluţie, rezultă, în final, spectrul semnalului eşantionat în mod natural:

$$\tilde{X}(\omega)=\frac{\Delta t}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\frac{k\omega_e\Delta t}{2}}\frac{\sin\frac{k\omega_e\Delta t}{2}}{\frac{k\omega_e\Delta t}{2}}X(\omega-k\omega_e)\quad . \qquad \textbf{(8.40)}$$

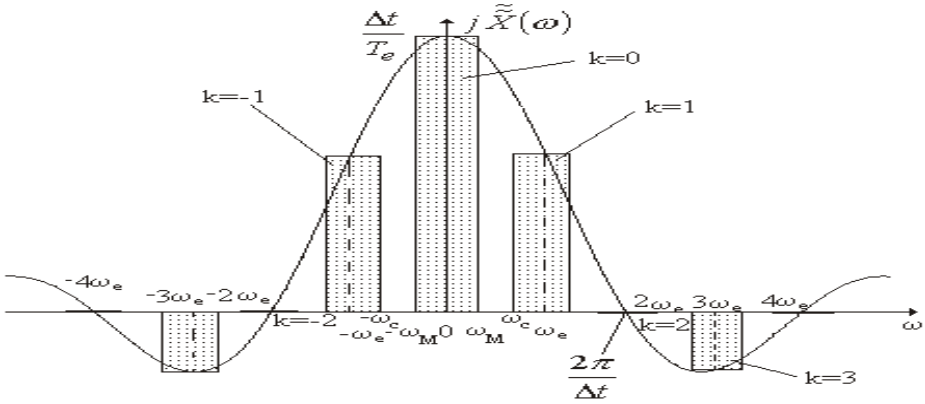


Fig.8.24 Spectrul unui semnal de bandă limitată eşantionat natural pe o durată Δt. Se observă că lobii spectrali pot fi refăcuţi prin amplificare.

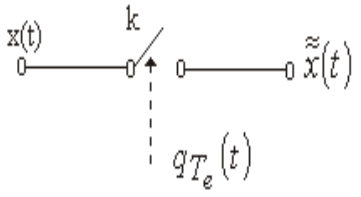


Fig.8.25 Model pentru eşantionarea naturală.

Dacă spectrul semnalului supus eşantionării naturale este cel din figura 8.18, atunci se obţine spectrul din figura 8.24. Lobii spectrali nu mai suferă deformări diferite în banda lor; factorii ce multiplică pe $X(\omega-k\omega_e)$ nu depind de ω, variabila curentă ci sunt constanţi. Unii lobi spectrali pot dispare complet, aşa cum este cazul lobilor k = ±2 , k = ±4 etc, din exemplul prezentat în figura 8.24 pentru $\Delta t = T_e/2$ şi $\omega_e = 2\omega_M$.

Reconstruirea semnalului x(t) din semnalul x̃(t) se face prin filtrare cu un FTJ ideal, având $\omega_c = \omega_e/2$ şi câştigul în bandă constant, egal cu $T_e/\Delta t$.

Eşantionarea naturală poate fi realizată cu ajutorul unui comutator electronic K (figura 8.25) comandat la intervale de timp kT_e, să se închidă pentru câte un interval de timp Δt. Comutatorul K este, de cele mai multe ori, realizat cu un tranzistor cu efect de câmp.

8.4 Relaţia dintre spectrul unui semnal discret şi spectrul semnalului analogic din care provine

Dacă semnalul analogic $x_a(t)$, având spectrul $X_a(\omega)$ se eşantionează, atunci secvenţa valorii eşantioanelor sale $\{x_a(kT_e) \mid k \in Z\}$ formează un semnal discret, definit prin $x_d[n] = x_a(nT_e)$. Semnalul discret are spectrul $X_d(\Omega)$. Se pune întrebarea: deoarece între semnalul analogic şi cel discret există o legătură, care este legătura dintre spectrele lor?

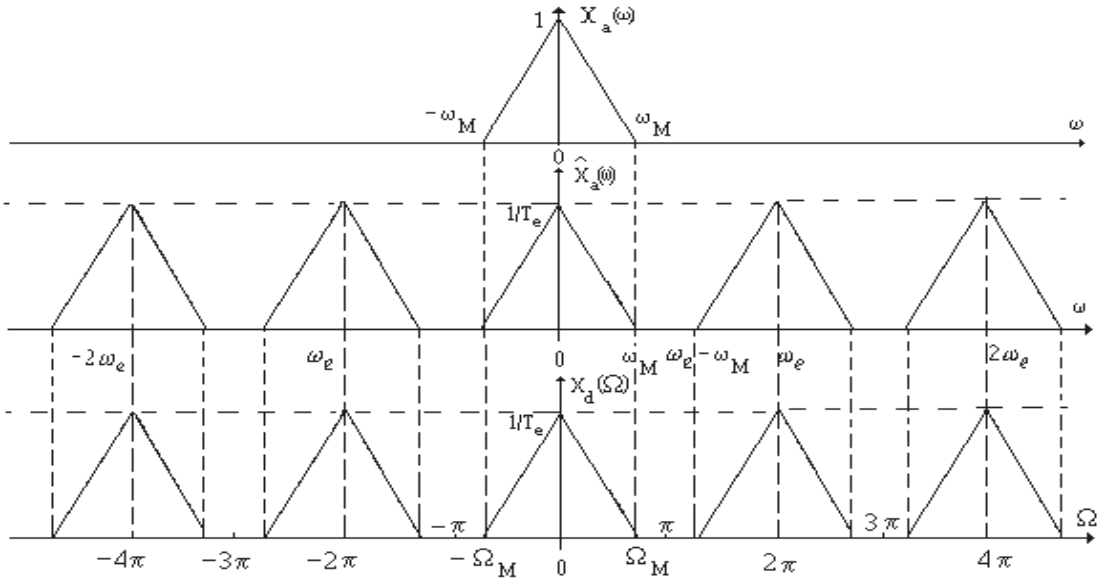


Fig.8.26 Relaţia dintre spectrul unui semnal discret $X_d(\Omega)$ şi spectrul semnalului analogic din care provine, $X_a(\omega)$.

Se ştie că:

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - k\omega_e) \quad , \quad \omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \quad , \qquad \textbf{(8.41)}$$

este spectrul semnalului $\hat{x}(t) = x(t)\,\delta_{T_e}(t)$ din care provine. Dar X(ω) se poate calcula şi prin aplicarea directă a transformatei Fourier semnalului x̂(t) :

$$\hat{X}(\omega) = \mathcal{F}\left\{x_a(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_e)\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_a(kT_e)\delta(t-kT_e)\right\} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_a(kT_e)\mathcal{F}\left\{\delta(t-kT_e)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_a(kT_e)e^{-j\omega kT_e} \quad . \tag{8.42}$$

Am ajuns la două expresii echivalente pentru spectrul X(ω):

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(\omega - k\omega_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_a(kT_e)e^{-j\omega kT_e} \quad . \tag{8.43}$$

Spectrul semnalului discret este:

$$X_d(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_d[k]\,e^{-j\Omega k} \quad . \tag{8.44}$$

Dacă în (8.44) se substituie $x_d[n] = x_a(nT_e)$ se obţine:

$$X_d(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_d[k]\,e^{-j\Omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_a(kT_e)\,e^{-j\Omega k} \quad . \tag{8.45}$$

Se compară (8.43) cu (8.45). Se observă că punând în (8.43) $\omega = \Omega/T_e$ se obţine:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_a(kT_e)\,e^{-j\omega kT_e}\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T_e}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_a(kT_e)\,e^{-jk\Omega} \quad , \tag{8.46}$$

sau pe baza relaţiilor (8.43) şi (8.44):

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(\omega - k\omega_e)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T_e}} = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left(\frac{\Omega}{T_e} - k\frac{2\pi}{T_e}\right) \quad ,$$

adică:

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left(\frac{\Omega}{T_e} - k\frac{2\pi}{T_e}\right) \quad , \tag{8.47}$$

În figura 8.26 se poate urmări grafic modul de obţinere al spectrului $X_d(\Omega)$. Între cele două axe de frecvenţă corespunzătoare spectrului eşantionat respectiv spectrului semnalului discret există relaţia:

$$\Omega = \omega T_e \quad . \tag{8.48}$$

Se explică acum şi natura periodică a spectrului semnalului discret $X_d(\Omega)$. Între Ω_M şi ω_M există o relaţie ce rezultă din (8.48):

$$\Omega_M = \omega_M T_e \quad ; \quad T_e \le \frac{\pi}{\omega_M} \quad . \tag{8.49}$$

8.5 Eşantionarea semnalelor discrete

În prelucrarea numerică a semnalelor apar situaţii în care, ulterior achiziţionării eşantioanelor, se constată că frecvenţa de eşantionare a fost prea mare. În principiu, acest lucru nu deranjează decât în măsura în care prelucrarea mai multor eşantioane decât este strict necesar duce la un timp de prelucrare inadmisibil de mare. În astfel de situaţii, când nu se mai poate eşantiona semnalul analogic, este posibilă eşantionarea semnalului numeric, reţinându-se din acesta tot a N-a valoare.

Fie semnalul $\delta_N[n]$ definit prin:

$$\delta_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \quad . \tag{8.50}$$

El este echivalent în spaţiul semnalelor discrete distribuţiei $\delta_{T_e}(t)$ din spaţiul semnalelor definite în timp continuu (analogice). Trebuie menţionat că $\delta_N[n]$ este o funcţie obişnuită.

Dacă x[n] este un semnal discret, atunci semnalul discret eşantionat $\hat{x}[n]$ se obţine prin produsul:

$$\hat{x}[n] = x[n]\,\delta_N[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN]\,\delta[n - kN] \tag{8.51}$$

În figura 8.27 este ilustrată eşantionarea semnalului x[n] cu pasul N = 3 . Semnalul $\hat{x}[n]$ conţine între două valori prelevate din x[n] câte două (sau în cazul general câte N-1) valori nule.

Vom presupune că restricţia la perioada principală a spectrului $X(\Omega)$ are suportul $[-\Omega_M , \Omega_M]$, unde $\Omega_M < \pi$. Dar, conform relaţiei (5.60'), schimbând Ω_o în Ω_e , spectrul semnalului $\delta_N[n]$ este:

$$\delta_N[n] \longleftrightarrow \Omega_e\,\delta_{\Omega_e}(\Omega) = \Omega_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_e) \ , \ \Omega_e = \frac{2\pi}{N} \quad . \tag{8.52}$$

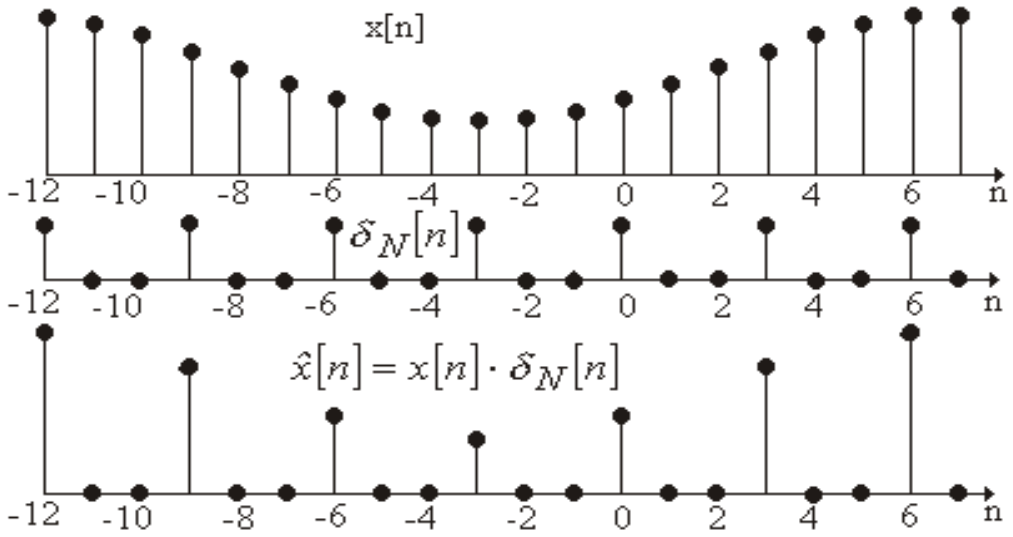


Fig.8.27 Semnalul discret x[n] este eşantionat cu pasul N, obţinându-se semnalul discret eşantionat x̂[n].

Aplicând teorema produsului semnalelor (teorema convoluţiei circulare în domeniul spectrului) rezultă spectrul semnalului eşantionat, X(Ω):

$$\hat{X}(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\,\delta_N[n]\} = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \otimes \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega \qquad \textbf{(8.53)}$$

Deoarece convoluţia circulară se efectuează pe o perioadă de lungime 2π , va trebui să constatăm care dintre distribuţiile Dirac $\delta(\Omega - k\Omega_e)$ au suportul în, să zicem $[0,2\pi)$. Cum suportul lui $\delta(\Omega - k\Omega_e)$ se reduce la $\Omega = k\Omega_e$ (un punct), rezultă pentru k condiţia: $0 \le k\Omega_e < 2\pi$ sau $0 \le k(2\pi/N) < 2\pi$, adică $0 \le k < N$. În consecinţă, indicele k în relaţia (8.53) se limitează la $0 \le k \le N-1$ şi deci, pentru calculul lui X(Ω) se poate calcula restricţia sa la perioada principală $X_r(\Omega)$, şi apoi se poate prelungi prin periodicitate această restricţie:

$$\hat{X}_r(\Omega) = \frac{1}{N} X_r(\Omega) * \sum_{k=0}^{N-1} \delta(\Omega - k\Omega_e) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_r(\Omega - k\Omega_e) \;,\; \Omega_e = \frac{2\pi}{N} \quad , \qquad \textbf{(8.54)}$$

unde s-a notat cu $X_r(\Omega)$ restricţia la aceeaşi perioadă principală a lui X(Ω) .

Deoarece X(Ω) este periodic de perioadă 2π , se observă imediat din (8.54) că prelungirea prin periodicitate cu perioada 2π a lui $X_r(\omega)$ este şi periodică de perioadă Ω_e , $X(\Omega+\Omega_e) = X(\Omega)$. În consecinţă, aşa cum rezultă şi din figura 8.28, desenată pentru N = 3 , spectrul semnalului eşantionat este periodic, de perioadă $2\pi/N$. Lobul spectral k = 0 se întinde pe semiaxa $\Omega > 0$ până la Ω_M . Primul lob vecin, axat pe Ω_e , are frecvenţa

minimă $\Omega_e - \Omega_M$. Condiţia de evitare a suprapunerii lobilor spectrali este $\Omega_M \le \Omega_e - \Omega_M$, care se pune sub forma:

$$\Omega_e \ge 2\Omega_M \quad ; \quad \Omega_e = \frac{2\pi}{N} \quad . \qquad \textbf{98.55)}$$

Relaţia este asemănătoare cu (8.7), stabilită pentru semnalele analogice.

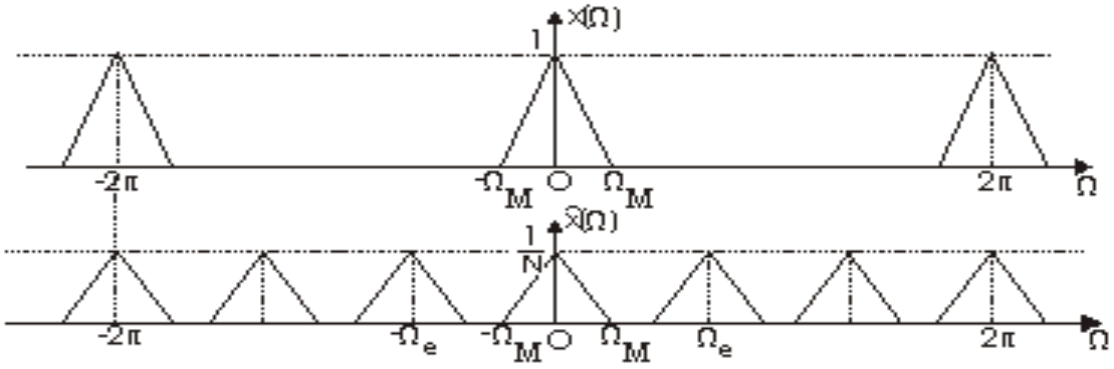


Fig.8.28 Relaţia dintre spectrul unui semnal discret X(Ω) şi spectrul secvenţei eşantionate X̄(Ω) pentru N = 3 .

Cum $\Omega_M = T_e\omega_M$, unde ω_M este frecvenţa maximă din spectrul semnalului analogic din care provine x[n] , iar T_e pasul cu care acest semnal analogic a fost eşantionat, rezultă din (8.55):

$$NT_e \le \frac{\pi}{\omega_M} \quad ; \quad T_e' \le \frac{\pi}{\omega_M} \quad T_e' \triangleq NT_e \quad . \qquad \textbf{(8.56)}$$

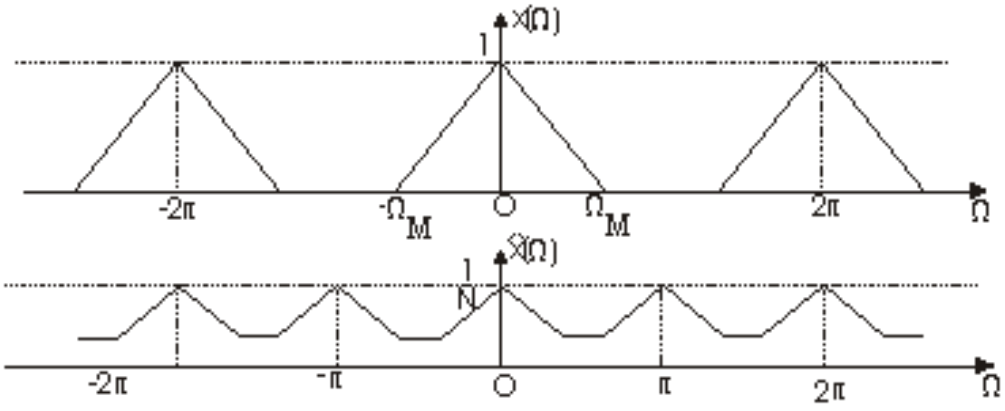


Fig.8.29 Dacă $\Omega_e - \Omega_M < \Omega_M$ se produce suprapunerea lobilor spectrali ai semnalului discret eşantionat.

Se dovedeşte prin urmare, că semnalul discret x[n] este eşantionabil cu pasul N,

fără să apară suprapunerea lobilor spectrali, dacă semnalul analogic ar fi putut să fie eşantionat şi cu perioada $T'_e = NT_e$, respectându-se teorema WKS. În aceste condiţii, semnalul analogic a fost, iniţial, supraeşantionat.

Dacă condiţia (8.55) nu este satisfăcută, deci dacă se eşantionează astfel încât $\Omega_e - \Omega_M < \Omega_M$, apare suprapunerea lobilor spectrali vecini, după cum se poate remarca şi din figura 8.29. Erorile ce apar sunt de tip "alias", făcând de nerecuperat semnalul discret iniţial x[n] din spectrul semnalului discret eşantionat, $X(\Omega)$.

Reconstruirea semnalului discret din eşantioanele sale.

Dacă, după eşantionare, lobii spectrali ai semnalului eşantionat nu se suprapun, este posibilă reconstruirea semnalului iniţial din eşantioanele sale $\{\hat{x}[n]\}$, prin filtrare trece jos ideală efectuată prin intermediul unui filtru de reconstruire, $H_r(\Omega)$, aşa cum rezultă şi din figura 8.30. Răspunsul în frecvenţă al filtrului este periodic, cu perioadă 2π şi are expresia:

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} N & |\Omega - 2k\pi| \le \Omega_c \\ 0 \ , \ \hat{i}n \ rest & \end{cases} \qquad \Omega_M \le \Omega_c \le \Omega_e - \Omega_M \quad . \tag{8.57}$$

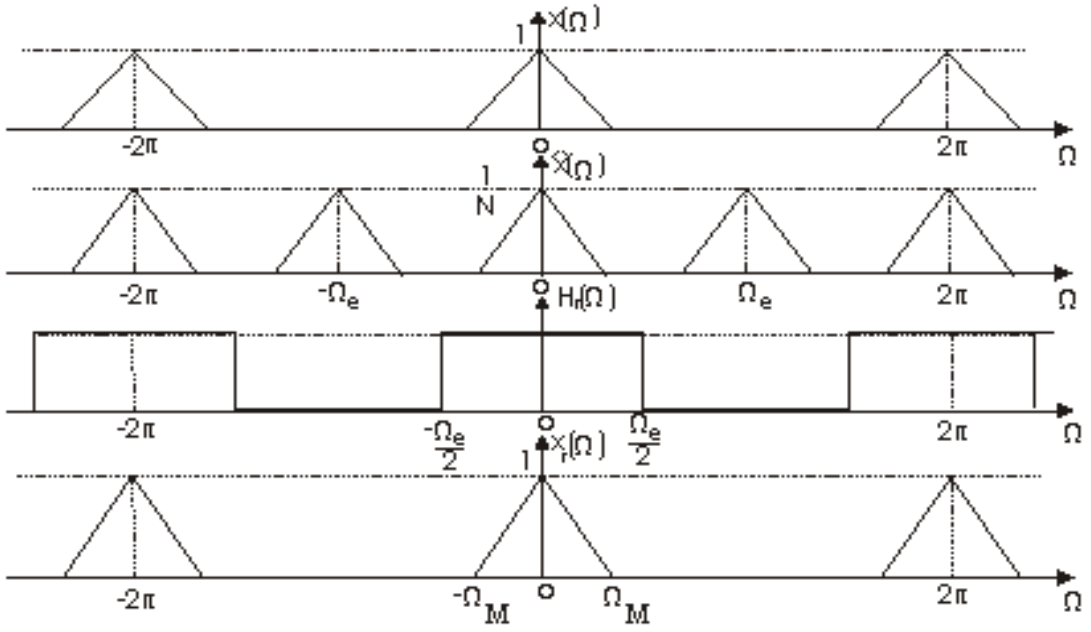


Fig.8.30 Reconstruirea semnalului discret din semnalul discret eşantionat prin filtrare trece jos ideală cu $\Omega_c = \Omega_e/2$.

De obicei se ia $\Omega_c = \Omega_e/2$, ca şi în cazul eşantionării ideale a semnalelor analogice.

Răspunsul la impuls al filtrului de reconstruire este:

$$h_r[n] = \frac{\sin n\Omega_c}{n\Omega_c} \quad ; \quad \Omega_c = \frac{\Omega_e}{2} = \frac{\pi}{N} \quad . \tag{8.58}$$

Din:

$$X_r(\Omega) = H_r(\Omega)\cdot\hat{X}(\Omega) = H_r(\Omega)\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_e) = X(\Omega) \quad , \tag{8.59}$$

rezultă egalitatea dintre $x_r[n]$, semnalul de la ieşirea filtrului de reconstruire şi x[n], semnalul iniţial:

$$x_r[n] = \hat{x}[n] * h_r[n] = x[n] \quad ,$$

relaţie care se poate pune şi sub forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}[k]\, h_r[n-k] \quad .$$

Cum însă $\hat{x}[k] = 0$ pentru $k \neq Nm$ şi $\hat{x}[Nm] = x[Nm]$, se mai poate scrie şi:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}[Nm]\, h_r[n-Nm] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[Nm]\frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}n - \pi m\right)}{\frac{\pi}{N}n - \pi m} \quad . \tag{8.60}$$

<u>Eşantionarea şi decimarea unui semnal discret</u>

După eşantionarea unui semnal discret, foarte multe valori ale acestuia se anulează forţat. Între două valori reţinute sunt intercalate N-1 zerouri care nu aduc nici o informaţie despre semnalul x[n] care a fost eşantionat. În consecinţă, ele pot fi omise, rezultând un nou semnal denumit "decimatul" semnalului eşantionat, pe care îl vom nota cu $\hat{x}_D[n]$. Din semnalul decimat se poate reconstrui semnalul nedecimat prin simpla inserare a câte N-1 zerouri între două valori consecutive.

Un semnal eşantionat (cu N = 2) şi apoi decimat este prezentat în figura 8.31c.

Între semnalul discret decimat şi cel eşantionat există relaţia simplă:

$$\hat{x}_D[n] = \hat{x}[nN] \quad . \tag{8.61}$$

Spectrul semnalului decimat, $X_D(\Omega)$, se determină în urma aplicării directe a definiţiei transformării Fourier în timp discret:

$$\hat{X}_D(\Omega) = \mathcal{F}\{\hat{x}_D[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_D[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=--\infty}^{\infty} \hat{x}[nN] e^{-j\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}[m] e^{-j\frac{\Omega}{N}m} \quad .$$

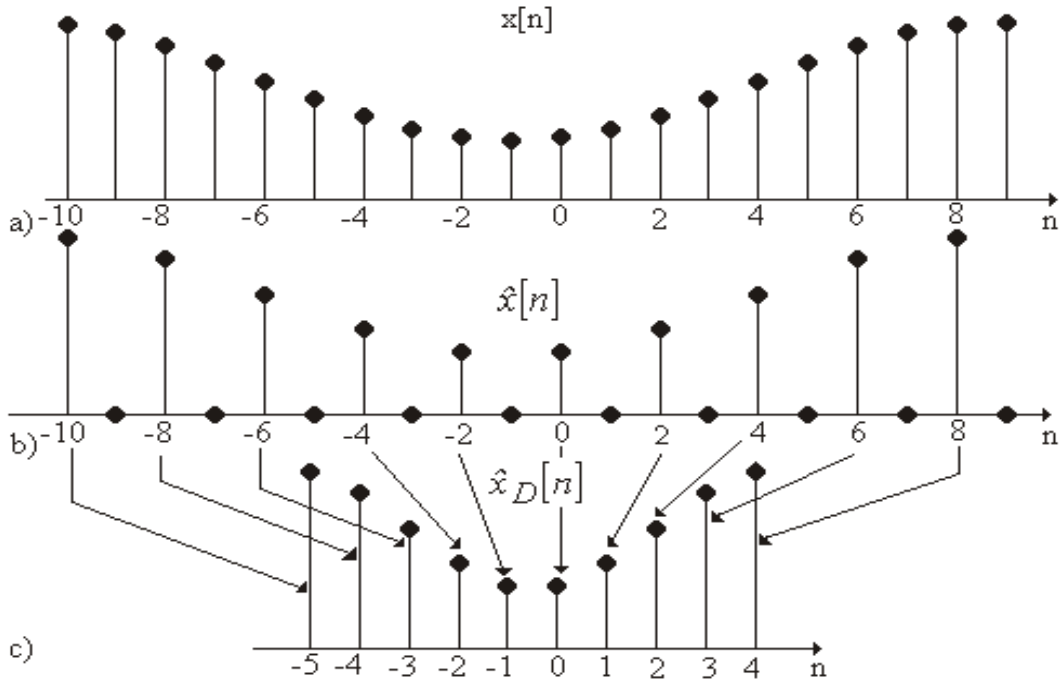


Fig.8.31 Eşantionarea semnalului discret (a) dă naştere semnalului discret eşantionat (b). Prin decimare se obţine semnalul (c).

În concluzie, s-a obţinut relaţia:

$$\hat{X}_D(\Omega) = \hat{X}\left(\frac{\Omega}{N}\right) \quad . \tag{8.62}$$

Dacă se ţine seama de (8.54), relaţia (8.62) conduce la:

$$\hat{X}_{Dr}(\Omega) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_r\left(\frac{\Omega - k2\pi}{N}\right) \tag{8.63}$$

Se observă imediat periodicitatea de perioadă 2π a spectrului semnalului eşantionat şi decimat.

Pentru k = 0 lobul central (1/N)X(Ω/N) se anulează la argumentul $\Omega/N = \Omega_M$, deci $\Omega = N\Omega_M$. Prin urmare, lobii spectrali ai lui $X_D(\Omega)$ au întinderea de N ori mai mare decât a lobilor semnalului iniţial x[n] <—> X(Ω) .

În figura 8.32 sunt ilustrate spectrul semnalului iniţial X(Ω) (a), spectrul semnalului eşantionat X(Ω) cu N = 2 (b) şi spectrul obţinut după decimarea semnalului eşantionat, $X_D(\Omega)$ (c).

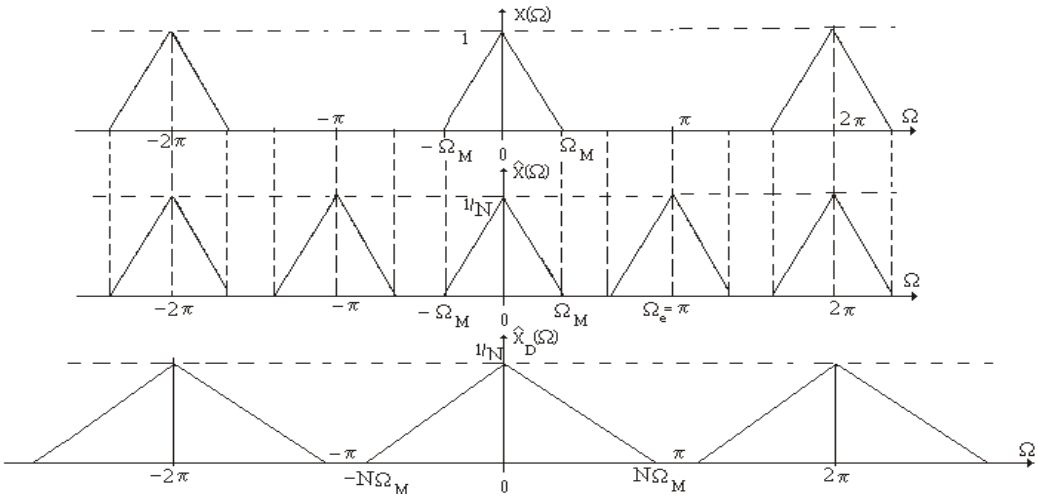


Fig.8.32 Spectrul semnalului discret (a), spectrul semnalului eşantionat, $\tilde{X}(\Omega)$, (b) şi spectrul semnalului decimat, $\tilde{X}_D(\Omega)$, (c) .

8.6 Eşantionarea spectrului X(Ω) al unui semnal discret de durată finită

Discretizarea semnalelor a fost impusă de utilizarea calculatoarelor numerice, care nu pot prelucra decât mărimi discrete în timp (şi evident şi în mărime). Prelucra-rea în domeniul spectrului, de multe ori mai simplă decât în domeniul timp, nu poate fi însă realizată în mod direct cu un calculator electronic. Aceasta, deoarece spectrul semnalului discret este o funcţie de variabila continuă Ω. Se pune întrebarea dacă spectrul unui semnal discret nu ar putea fi el însuşi eşantionat, pentru a fi prelucrat cu calculatorul? Efectul eşantionării în domeniul timp a unui semnal având spectrul cu suport finit a avut drept efect periodizarea spectrului. Ne putem aştepta, deci, la un efect similar şi anume eşantionarea în domeniul frecvenţei să conducă la o periodizare în domeniul timpului, transformând un semnal x[n] aperiodic într-un semnal $\tilde{x}[n]$, periodic.

Fie semnalul discret aperiodic (dacă semnalul este periodic, el are spectrul discret şi problema nu se pune) x[n] de spectru X(Ω) . Se eşantionează spectrul în mod ideal, utilizând pentru aceasta produsul cu distribuţia Dirac periodică în frecvenţă $\delta_{\Omega_e}(\Omega)$. Se obţine un spectru de linii - figura 8.33 - cu expresia:

$$\tilde{X}(\Omega) = X(\Omega)\,\delta_{\Omega_e}(\Omega) = X(\Omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega \qquad \textbf{(8.64)}$$

Pentru a determina semnalul $\tilde{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{X}(\Omega)\}$, se ţine seama de relaţia (8.52). din care se obţine prin împărţire cu Ω_e:

$$\frac{1}{\Omega_e}\delta_N[n] \quad \longleftrightarrow \quad \delta_{\Omega_e}(\Omega) \qquad \Omega_e = \frac{2\pi}{N} \quad . \tag{8.65}$$

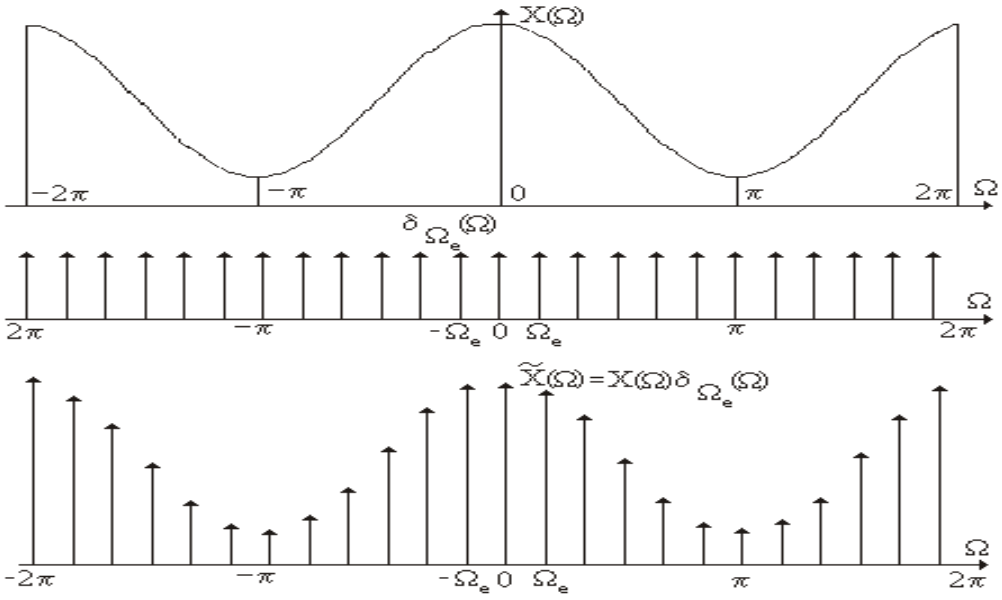


Fig.8.33 Spectrul unui semnal discret (a) se eşantionează cu un semnal Dirac periodic (b), obţinându-se un spectru discret, X̃(ω), (c)

Aplicând relaţiei (8.64) transformarea Fourier inversă, conform teoremei convoluţiei semnalelor, avem:

$$\tilde{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\,\delta_{\Omega_e}(\Omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} * \mathcal{F}^{-1}\{\delta_{\Omega_e}(\Omega)\} = x[n] * \frac{1}{\Omega_e}\delta_N[n] \;;\; \Omega_e = \frac{2\pi}{N} \;,$$

sau:

$$\tilde{x}[n] = \frac{N}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN] \quad , \tag{8.66}$$

adică ceea ce era de aşteptat. Pentru ca semnalul x[n] să poată fi recuperat din x̃[n] este necesar ca el să fie cu suportul mărginit.

Fie x[n] cu suportul $0 \le n \le M-1$, de lungime M , aşa cum se prezintă în figura 8.34 a. Semnalul ce are spectrul eşantionat este x̃[n] . Perioada sa este $N=2\pi/\Omega_e$. Dacă $N \ge M$ nu se produce suprapunerea grupurilor temporale din relaţia (8.66) corespuzătoare diverselor valori k. Nu apare decât un efect de tip "alias" în domeniul timp. Prin multiplicarea semnalului x̃[n] cu fereastra temporală rectangulară:

$$w_r[n] = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{N} & , \ 0 \le n \le N-1 \\ 0 & , \ \hat{i}n \ rest \end{cases} , \qquad \textbf{(8.67)}$$

se obţine semnalul reconstruit $x_r[n]$, identic cu semnalul x[n] :

$$x_r[n] = x[n] = \tilde{x}[n]\, w_r[n] \quad . \qquad \textbf{(8.68)}$$

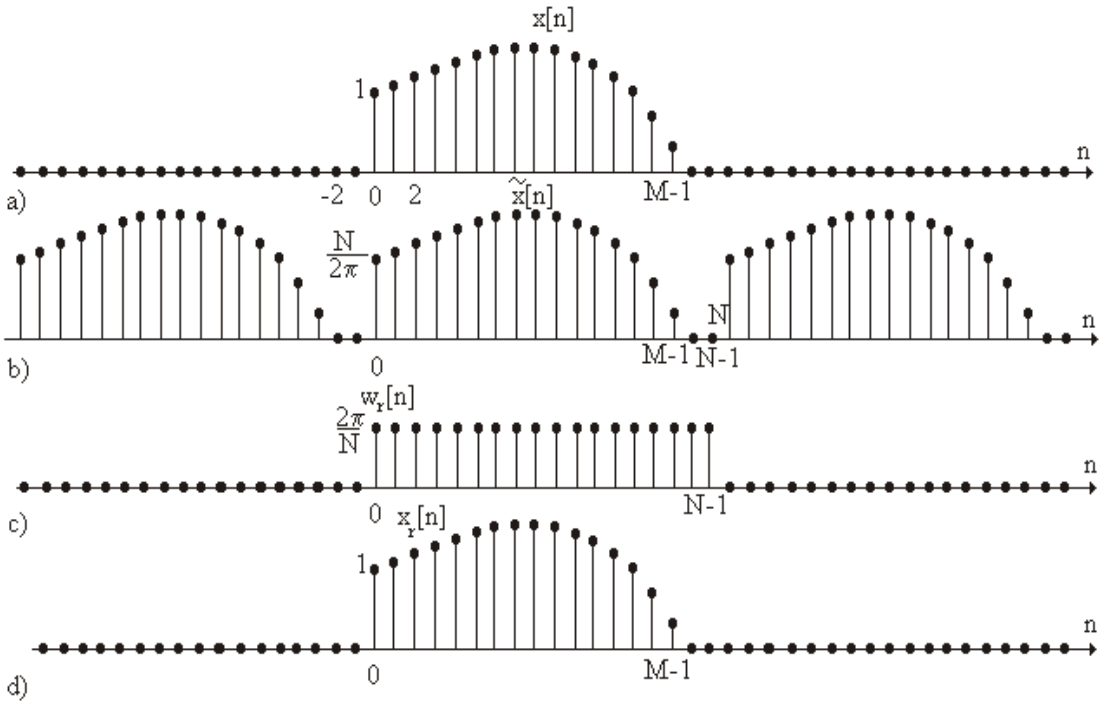


Fig.8.34 Semnalul de durată limitată M, x[n] (a). Semnalul periodic x̃[n] (b). Fereastra temporală $w_r[n]$ (c) şi semnalul $x_r[n]$ (d).

Dacă spectrul X(Ω) se eşantionează prea rar, rezultă N < M şi apare suprapunerea grupurilor temporale, determinând erori de tip "alias". Semnalul x[n] nu mai poate fi reconstruit din spectrul eşantionat.

8.7 Măsuri practice ce se iau în cazul eşantionării semnalelor definite în timp continuu

În multe cazuri nu se cunoaşte lărgimea benzii unui semnal de bandă limitată ce urmează a fi eşantionat. Semnalul poate avea componente spectrale de frecvenţe mari, neinteresante în aplicaţia considerată. Ele pot fi cauzate şi de zgomotul ce însoţeşte semnalul. De aceea există riscul apariţiei erorilor de tip "alias". Pentru a evita astfel de erori se prevede în structura lanţului de prelucrare a semnalului, înaintea circuitului de eşantionare şi memorare, un filtru trece jos, numit filtru "anti-alias" sau filtru de gardă - figura 8.35.

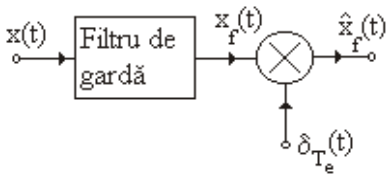


Fig.8.35 Filtrul de gardă pentru evitarea apariţiei erorilor de tip "alias".

Caracteristica de modul a unui astfel de filtru are aspectul prezentat în figura 7.9. Eşantionarea nu poate fi făcută decât cu o frecvenţă de cel puţin de două ori mai mare decât frecvenţa de oprire ω_s : $\omega_e \geq 2\omega_s$. Pe de altă parte, pentru a nu afecta semnalul prea mult, trebuie să avem $\omega_M \leq \omega_p$, unde ω_p este limita de trecere. În consecinţă:

$$\omega_M \leq \omega_p < \omega_s \leq \frac{\omega_e}{2} \quad . \qquad \textbf{(8.69)}$$

Cu cât banda de tranziţie ω_s-ω_p este mai mare, trebuie să eşantionăm la o frecvenţă mult superioară frecvenţei Nyquist, $2\omega_M$. Dar bandă de tranziţie mare înseamnă că filtrul are un ordin redus, puţine elemente constructive, deci ieftin. Se plăteşte însă, prin creşterea frecvenţei de eşantionare. Dacă filtrul de gardă are un ordin mai mare, frecvenţa de eşantionare poate să scadă, apropriindu-se mai mult de limita ei inferioară, $2\omega_M$.

Cu cât eroarea ϵ_2 admisă - vezi figura 7.9 - este mai redusă, cu atât mai reduse vor fi erorile de tip "alias". În schimb creşte ω_s deci creşte şi ω_e .

În sistemele de telefonie numerică, frecvenţa maximă din spectrul semnalului vocal transmis este 3,4kHz. Frecvenţa Nyquist de eşantionare este, prin urmare, de 6,8kHz. În practică s-a standardizat valoarea de 8kHz pentru cadenţa de eşantionare.

În sistemele de televiziune, semnalul video se întinde până la ~5MHz. În consecinţă, limita inferioară a frecvenţei de eşantionare este de 10MHz. Se lucrează, însă, cu frecvenţe de eşantionare de ordinul a 18MHz.

În cazul unei frecvenţe de eşantionare reduse, spre limita inferioară $2\omega_M$, filtrului de gardă i se impun condiţii severe în ceea ce priveşte banda de tranziţie. Şi filtrul de reconstrucţie, neideal, introduce erori în refacerea semnalelor. Erori reduse de reconstruire, la o frecvenţă de eşantionare adoptată, se obţin crescând ordinul filtrului. Sau, la un ordin dat al filtrului, reducerea erorilor de reconstruire se poate face prin creşterea frecvenţei de eşantionare.

8.8 Eşantionarea semnalelor trece bandă

Spectrul semnalelor prezentate până acum era concentrat în benzi de frecvenţă care includeau şi frecvenţa nulă. Aceste semnale sunt denumite semnale de tip "trece jos". O altă categorie de semnale utilizate în practică este cea a semnalelor de tip "trece bandă". Suportul spectrului acestor semnale este de forma:

$$\text{supp}\{X(\omega)\} = [-\omega_M, -\omega_m] \cup [\omega_m, \omega_M] \quad .$$

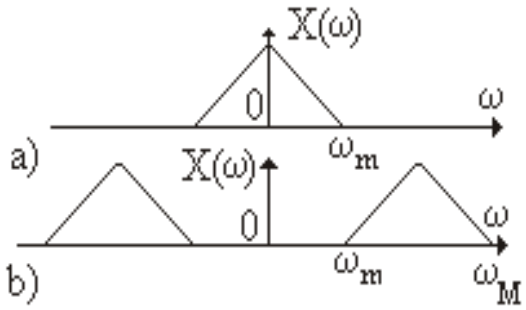


Fig.8.36 Exemple de spectre de semnale de tip trece jos (a) şi trece bandă (b).

Figura 8.36 prezintă spectrele unor semnale de tip trece jos şi de tip trece bandă.

Reconstrucţia perfectă a unui semnal de tip trece bandă eşantionat ideal poate fi realizată pe baza teoremei WKS. Condiţia ce trebuie îndeplinită în acest caz este $\omega_e \geq 2\omega_M$, unde cu ω_e s-a notat frecvenţa de eşantionare.

În anumite condiţii (prezentate în continuare) semnalele de tip trece bandă pot fi reconstruite perfect chiar dacă au fost eşantionate cu frecvenţe mai mici decât frecvenţa Nyquist. Pentru a exemplifica ultima afirmaţie, să examinăm în continuare cazul semnalelor de tip trece bandă de bandă îngustă. Acestea sunt semnale de tip trece bandă care satisfac şi condiţia suplimentară:

$$\frac{\omega_M - \omega_m}{\omega_m} < 1 \quad .$$

Semnalul al cărui spectru este prezentat în figura 8.36 b este de acest tip.

Suportul spectrului unui semnal trece bandă de bandă îngustă eşantionat ideal $X_e(\omega)$ este de forma:

$$\text{supp}\{X_e(\omega)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{R}} \left\{ \left[-\omega_M + n\omega_e, -\omega_m + n\omega_e \right] \cup \left[\omega_m + n \right. \right. \qquad \textbf{(8.70)}$$

Această relaţie poate fi verificată şi pe baza exemplului din figura 8.37 care prezintă spectrul unui semnal trece bandă de bandă îngustă eşantionat ideal. Figura evidenţiază faptul că un filtru trece bandă ideal poate reconstrui perfect semnalul $X(\omega)$ din semnalul eşantionat $X_e(\omega)$, chiar dacă frecvenţa de eşantionare este inferioară frecvenţei Nyquist.

Condiţia de reconstrucţie perfectă, a unui semnal trece bandă de bandă îngustă eşantionat ideal, din eşantioanele sale, este:

$$\left[-\omega_M + k\omega_e, -\omega_m + k\omega_e \right] \cap \left[\omega_m + l\omega_e, \omega_M + l\omega_e \right] = \varnothing \quad \forall k, l \in Z \quad . \qquad \textbf{(8.71)}$$

Pentru l = 0 condiţia devine $\left[-\omega_M + k\omega_e, -\omega_m + k\omega_e \right] \cap \left[\omega_m, \omega_M \right] = \varnothing \quad \forall k \in Z \quad .$

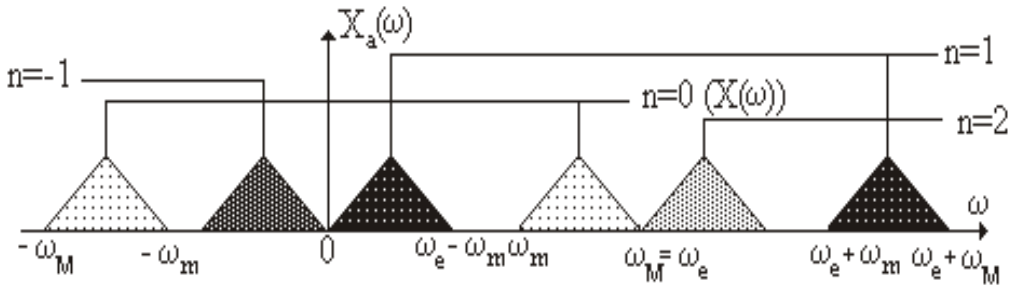


Fig.8.37 Spectrul unui semnal trece bandă de bandă îngustă eşantionat ideal.

Îndeplinirea ultimei condiţii implică satisfacerea următoarelor inegalităţi:

$$\begin{cases} -\omega_M + k\omega_e \le \omega_m \\ -\omega_M + (k+1)\omega_e \ge \omega_M \end{cases} .$$

Ultimele relaţii pot fi puse şi sub forma:

$$\frac{2\omega_M}{k+1} \le \omega_e \le \frac{2\omega_m}{k} \quad . \tag{8.72}$$

Se poate demonstra că dacă această condiţie este satisfăcută, atunci este satisfăcută şi condiţia (8.71).

Dacă există valori întregi k, pentru care dubla inegalitate (8.72) este îndeplinită, atunci există valori pentru frecvenţa de eşantionare (sub frecvenţa Nyquist) pentru care semnalele trece bandă de bandă îngustă pot fi reconstruite în urma eşantionării ideale.

Privim ultima relaţie ca o inecuaţie în mulţimea numerelor întregi. Soluţia acesteia este:

$$0 < k \le \frac{\omega_m}{\omega_M - \omega_m} \quad . \tag{8.73}$$

Notând cu n_o partea întreagă a fracţiei $\omega_m/(\omega_M-\omega_m)$, rezultă că frecvenţa de eşantionare va aparţine unor intervale de forma:

$$\left[\frac{2\omega_M}{k+1} , \frac{2\omega_m}{k} \right] \quad cu \quad k \in \{1,...,n_o\} \quad . \tag{8.74}$$

Exemplu: *Spectrul X(ω) al unui semnal trece bandă are suportul cuprins între* $\omega_m = 8\pi$ *şi* $\omega_M = 10\pi$. *Se cer valorile posibile ale frecvenţei de eşantionare care asigură reconstruire fără erori a semnalului trece bandă eşantionat.*

Calculăm factorul n_o :

$$n_o = \frac{\omega_m}{\omega_M - \omega_m} = 4 \quad .$$

Valorile admisibile ale lui k, care satisfac condiţia (8.74) sunt 1,2,3,4. Acestor valori le corespund pentru frecvenţa de eşantionare, următoarele domenii de pe axa frecvenţelor:

$$k \in \{4\pi\} \cup [5\pi \ , \ 5{,}33\pi] \cup [6{,}66\pi \ , \ 8\pi] \cup [10\pi \ , \ 16\pi] \cup [20\pi \ , \ \infty] \quad .$$

Problema 1.

Se consideră sistemul din figură:

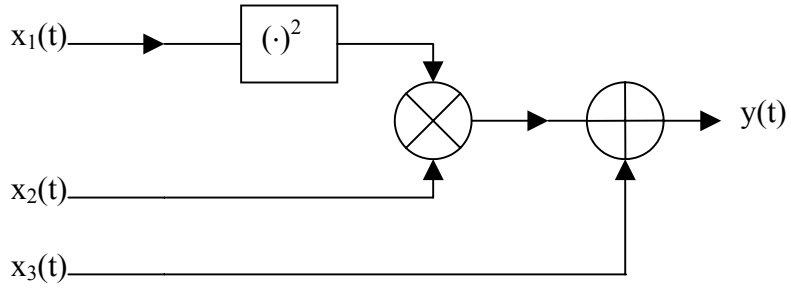


Fig. 1.1. Sistemul investigat.

Suporturile transformatelor Fourier ale semnalelor $\boldsymbol{x_i(t)}$, $\boldsymbol{i = \overline{1,3}}$ *sunt* $[-\omega_i, \omega_i]$. *Determinați perioada maximă de eşantionare, T, pentru care semnalul y(t) poate fi recuperat din eşantioanele sale prin filtrare trece jos ideală.*

Rezolvare:

Semnalul de la ieşirea sistemului, din figura de mai sus, este:

$$\boldsymbol{y(t) = x_1^2(t) \cdot x_2(t) + x_3(t)}$$

Aplicând transformata Fourier în ambii membrii ai ecuației rezultă:

$$\boldsymbol{Y(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi} [X_1(\omega) * X_1(\omega)] \right) * X_2(\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} + X_3(\omega)}$$

Conform datelor problemei:

$$\boldsymbol{sup\ p\{X_1(\omega)\} = [-\omega_1, \omega_1]}$$

rezultă că:

$$\boldsymbol{sup\ p\{X_1(\omega) * X_1(\omega)\} = [-2\omega_1, 2\omega_1]}$$

şi:

$$\boldsymbol{sup\ p\{[X_1(\omega) * X_1(\omega)] * X_2(\omega)\} = [-2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_1 + \omega_2]}$$

deci:

$$\omega_y$$

$$\sup p\{Y(\omega)\} = \left[-\max(2\omega_1 + \omega_2, \omega_3), \quad \max(\overline{2\omega_1 + \omega_2} \wedge \overline{\omega_3}) \right]$$

Pentru ca semnalul y(t) să poată fi recuperat din eşantioanele sale prin filtrare trece jos ideală este necesar să fie respectată teorema eşantionării:

$$\frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_y \quad \Rightarrow \quad T \leq \frac{2\pi}{2\omega_y} = \frac{\pi}{\omega_y}$$

Obs: $\frac{2\pi}{T}$ *reprezintă frecvenţa de eşantionare şi* ω_y *reprezintă frecvenţa maximă din spectrul semnalului de eşantionat.*
Aşadar, valoarea maximă a lui T este:

$$T = \frac{\pi}{\max(2\omega_1 + \omega_2, \omega_3)}$$

Problema 2.

Se consideră un sistem cu intrarea x(t) şi ieşirea y(t) legate printr-o relaţie polinomială:

$$y = P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot x^k$$

Dacă semnalul x(t) este de bandă limitată la intervalul $[-\omega_M, \omega_M]$*, determinaţi perioada maximă de eşantionare pentru care semnalul y(t) poate fi recuperat din eşantioanele sale prin filtrare trece jos ideală.*

Rezolvare.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k [x(t)]^k$$

În urma aplicării transformării Fourier rezultă:

$$\boldsymbol{Y}(\omega)=\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{a_k}\cdot\mathcal{F}\underbrace{\left\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\cdot\ldots\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\right\}}_{\boldsymbol{de}\quad\boldsymbol{k}\quad\boldsymbol{ori}}(\omega)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{a_k}\boldsymbol{X}(\omega)*\mathcal{F}\underbrace{\left\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\cdot\ldots\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\right\}}_{\boldsymbol{de}\quad\boldsymbol{k}-1\quad\boldsymbol{ori}}(\omega)=$$

$$=\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi}}\right)^{\boldsymbol{2}}\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{a_k}\boldsymbol{X}(\omega)*\boldsymbol{X}(\omega)*\mathcal{F}\underbrace{\left\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\cdot\ldots\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\right\}}_{\boldsymbol{de}\quad\boldsymbol{k-2}\quad\boldsymbol{ori}}(\omega)$$

$$=\ldots=\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{N}}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi}}\right)^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a_k}\underbrace{\left(\boldsymbol{X}(\omega)*\boldsymbol{X}(\omega)*\ldots*\mathcal{F}\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\}(\omega)\right)}_{\boldsymbol{de}\quad\boldsymbol{k}\quad\boldsymbol{ori}}$$

$$\boldsymbol{sup\ p}\{\boldsymbol{Y}(\omega)\}=\boldsymbol{sup\ p}\underbrace{\left\{\boldsymbol{X}(\omega)*\boldsymbol{X}(\omega)*\ldots*\boldsymbol{X}(\omega)\right\}}_{\boldsymbol{de}\quad\boldsymbol{N}\quad\boldsymbol{ori}}=\left[-\boldsymbol{N}\omega_{\boldsymbol{M}},\boldsymbol{N}\omega_{\boldsymbol{M}}\right]$$

Conform teoremei eşantionării:

$$\frac{2\pi}{\boldsymbol{T}}\geq 2\boldsymbol{N}\omega_{\boldsymbol{M}}\Rightarrow\boldsymbol{T}\leq\frac{\pi}{\boldsymbol{N}\omega_{\boldsymbol{M}}}$$

perioada maximă de eşantionare este:

$$\boldsymbol{T_{max}}=\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{N}\omega_{\boldsymbol{M}}}$$

Problema 3.

Se consideră semnalul z(t), de bandă limitată, la intervalul $[\omega_1, \omega_2]$ *cu spectrul prezentat în figură:*

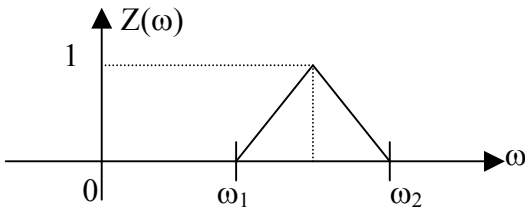


Fig. 3.1. Spectrul semnalului de analizat.

Se notează: $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$**;** $\omega_M = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$.

a) Arătaţi că este valabilă relaţia: $z(t) = x_1(t) \cdot e^{j\omega_c t}$ *; unde* $x_1(t)$ *este un semnal de bandă limitată la intervalul* $[-\omega_M, \omega_M]$.

b) Utilizând formula de recuperare a semnalului $x_1(t)$ *din eşantioanele sale, determinaţi cea mai mare valoare T pentru care este valabilă relaţia:*

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(nT) \cdot e^{j\omega_c (t-nT)} \cdot \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T} - n\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T} - n\right)}$$

Rezolvare.

a) Se verifică relaţia din enunţ prin identificarea suporturilor celor două semnale. Dacă aceasta este adevărată:

$$z(t) = x_1(t) \cdot e^{j\omega_c t} \Rightarrow Z(\omega) = X_1(\omega - \omega_c)$$
$$\Rightarrow sup\, p\{Z(\omega)\} = sup\, p\{X_1(\omega - \omega_c)\}$$

Suportul lui z este reprezentat în figura următoare.

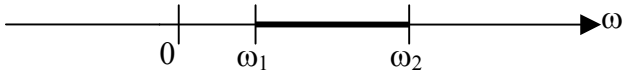


Fig. 3.2. Suportul semnalului z(t).

Ţinând seama de suportul semnalului $x_1(t)$ *se poate scrie:*

$$-\omega_M \le \omega - \omega_c \le \omega_M \Rightarrow -\omega_M + \omega_c \le \omega \le \omega_M + \omega_c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) + \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \le \omega \le \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) + \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega_1 \le \omega \le \omega_{21} \Leftrightarrow \boldsymbol{sup\ p}\{\boldsymbol{Z}(\omega)\} = [\omega_1, \omega_2]$$

ceea ce este adevărat. Aşadar se poate scrie:

$$\boldsymbol{z(t) = x_1(t) \cdot e^{j\omega_c t}}$$

b) Pe baza acestei relaţii se poate scrie:

$$\boldsymbol{x_1(t) = z(t) \cdot e^{-j\omega_c t}}$$

Fiind de bandă limitată semnalul $\boldsymbol{x_1(t)}$ *poate fi reconstruit din eşantioanele sale, prin filtrare trece-jos ideală, cu formula:*

$$\boldsymbol{x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(nT)\, sin\, c\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)}$$

Dacă:

$$\frac{2\pi}{T} \ge 2\omega_M \Rightarrow T \le \frac{\pi}{\omega_M} \Rightarrow T_{max} = \frac{\pi}{\omega_M}$$

se poate scrie:

$$\boldsymbol{z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(nT) e^{-j\omega_c nT} e^{j\omega_c t} \frac{sin\left(\pi\left(\frac{t}{T} - n\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{T} - n\right)}}$$

adică, tocmai formula din enunţ.

9. TRANSFORMAREA Z 455
9.1 Răspunsul unui sistem discret liniar şi invariant în timp la exponenţiala complexă discretă de modul neunitar 455
9.2. Transformarea Z bilaterală 456
9.2.1 Proprietăţile domeniului de convergenţă al transformatei Z bilaterale 458
9.2.2 Transformarea Z inversă 461
9.2.3 Definirea transformatei z bilaterale prin constelaţia de poli şi zerouri 462
9.3 Transformata Z unilaterală 464
9.5 Relaţia dintre transformarea Z şi transformarea Laplace 471
9.6 Studiul sistemelor discrete liniare şi invariante în timp prin intermediul transformării Z 472
9.6.1 Funcţia de sistem a unui sistem discret, liniar şi invariant în timp 472
9.6.2 Determinarea răspunsului unui sistem discret liniar şi invariant în timp, utilizând transformarea Z 472
9.6.3 Sisteme discrete liniare şi invariante în timp, caracterizate prin ecuaţii cu diferenţe finite liniare şi cu coeficienţi constanţi . . . 479
9.6.4 Sisteme de ordinul întâi 482
9.6.5 Sisteme de ordinul doi 483
9.6.6 Funcţia de sistem echivalentă unor sisteme discrete conectate în serie şi în paralel 484
9.7 Forme de implementare ale filtrelor numerice utilizând transformarea Z 485
9.7.1 Forma laticială a unui filtru având numai poli 486
Tabelul 9.1 Proprietăţile transformării Z 491
Tabelul 9.2 Perechile semnal-transformată Z 492

BIBLIOGRAFIE 494

9. TRANSFORMAREA Z

9.1 Răspunsul unui sistem discret liniar şi invariant în timp la exponenţiala complexă discretă de modul neunitar

Vom nota variabila complexă cu:

$$z = x + j \cdot y = r \cdot e^{j\Omega} \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R} \quad . \tag{9.1}$$

unde evident: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi $\Omega = arg\,(z)$. Răspunsul unui SLIT discret la exponenţiala $z_o^n = r_o^n \cdot e^{\Omega_o n}$ se poate calcula cu relaţia:

$$y[n] = h[n] * z_o^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z_o^{-k} = z_o^n \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z_o^{-k} \quad , \tag{9.2}$$

în ipoteza că seria este convergentă. Se introduce notaţia:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k} \quad . \tag{9.3}$$

Funcţia H(z), în măsura în care suma (9.3) există, este dependentă numai de răspunsul la impuls al sistemului, h[n], şi în anumite condiţii caracterizează sistemul. Cu notaţia (9.3) relaţia (9.2) devine:

$$y[n] = z_o^n \cdot H(z_o) \quad , \tag{9.4}$$

şi arată că z_o^n este o funcţie proprie a SLIT discret, valoarea proprie ataşată fiind $H(z_o)$. Pentru cazul în care semnalul de intrare este de forma:

$$x[n] = \sum_k c_k z_k^n \quad , \tag{9.5}$$

răspunsul sistemului se calculează cu:

$$y[n] = \sum_k c_k H(z_k) z_k^n \quad . \tag{9.6}$$

Se relevă importanţa unei funcţii având forma (9.3) pentru studiul SLIT discrete.

9.2. Transformarea Z bilaterală

Fie x[n] un semnal discret aperiodic. Prin definiţie, transformata Z bilaterală a semnalului x[n] dat este funcţia X(z) :

$$Z\{x[n]\}(z) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot z^{-n} \quad ; \quad z = r\cdot e^{j\Omega} \quad , \quad r \geq 0 \quad .$$

(9.7)

Se poate face imediat o legătură între transformata Z şi transformata Fourier în timp discret. Substituind forma polară a lui z în relaţie, rezultă:

$$Z\{x[n]\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]\cdot r^{-n}\right)\cdot e^{-j\Omega n} = \mathcal{F}\left\{r^{-n}\cdot x[n]\right\}(\Omega) \; ; \; r \geq 0 \quad .$$

(9.8)

Dacă se evaluează transformata Z pentru $|z| = r = 1$, se obţine:

$$Z\{x[n]\}\left(e^{j\Omega}\right) = \mathcal{F}\{x[n]\}(\Omega) \quad . \qquad \textbf{(9.9)}$$

Transformata Z evaluată pe cercul unitar (de rază r = 1) din planul complex z=x+jy este transformata Fourier în timp discret a semnalului. Acesta este motivul pentru care în unele lucrări de specialitate se utilizează notaţia $X\left(e^{j\omega T_e}\right)$.

Pentru ca X(z) definită prin relaţia (9.7) să existe, este necesar ca:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |r^{-n}x[n]|\cdot|e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |r^{-n}x[n]| < \infty \quad .$$

deci $r^{-n}x[n] \in l^1$.

***Exemple**:*

1. Vom considera semnalul discret cauzal $x[n] = a^n\sigma[n]$, $|a| < 1$. Transformata Z a acestuia este, conform definiţiei:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a z^{-1}\right)^n \quad .$$

Dacă $|az^{-1}| < 1$, convergenţa transformatei este asigurată. În acest caz:

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z| > |a| \quad . \qquad \textbf{(9.10)}$$

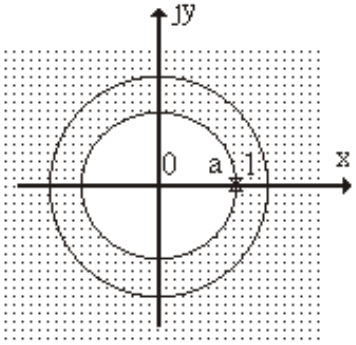


Fig. 9.1 Domeniul de convergenţă al transformatei X(z) pentru semnalul cauzal.

Valorile variabilei complexe z pentru care X(z) există (seria ce o defineşte este convergentă) formează domeniul de convergenţă (DC) al transformatei. În exemplul discutat, toate numerele complexe de modul mai mare decât $|a|$ formează domeniul de convergenţă al transformatei. El este, aşa cum rezultă şi din figura 9.1, exteriorul discului de rază $|a|$.

Dacă cercul unitar se găseşte în DC, atunci există şi transformata Fourier în timp discret. Ea se obţine substituind z cu $e^{j\Omega}$.

În exemplul considerat, cercul unitar este din DC şi deci există:

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}} \quad .$$

2. Fie acum semnalul discret anticauzal $x[n] = - a^n \sigma[-n-1]$. Transformata Z bilaterală a semnalului este:

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(az^{-1}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{az^{-1}}\right)^n = -\frac{1}{az^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a \cdot z^{-1}}\right)^n .$$

Dacă $\frac{1}{|a|\,|z^{-1}|} < 1$ *, X(z) există şi este:*

$$X(z) = -\frac{1}{az^{-1}\left(1 - \frac{1}{az^{-1}}\right)} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ;$$

$$|z| < |a| \quad .$$

(9.11)

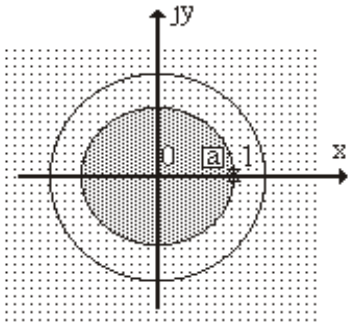


Fig.9.2 DC al transformatei semnalului anticauzal.

Domeniul de convergenţă al transformatei bilaterale este interiorul discului de rază $|a|$ - figura 9.2. Dacă cercul unitar nu este din DC (cazul exemplificat în figura 9.2) nu există transformată Fourier a semnalului.

Analizând comparativ (9.10) şi (9.11), se constată că cele două transformate Z bilaterale, deşi aparţin unor semnale complet diferite au aceleaşi expresii. Domeniile lor de convergenţă nu sunt însă aceleaşi.

Cele două exemple subliniază importanţa precizării domeniului de convergenţă al transformatei Z bilaterale.

9.2.1 Proprietăţile domeniului de convergenţă al transformatei Z bilaterale

Transformata Z bilaterală există acolo unde există transformata Fourier în timp discret a semnalului $x[n]r^{-n}$, $r = |z|$. Cum condiţia de existenţă este independentă de Ω - depinde numai de $r = |z|$ - rezultă:

1. **Domeniul de convergenţă al transformatei Z bilaterale este o coroană circulară a planului Z, centrată în origine.**

Punctele z_p pentru care $\lim_{z \to z_p} X(z) = \infty$ se numesc polii lui X(z) . Dar în poli, tranformata nu este convergentă, deci:

2. **Domeniul de convergenţă al transformatei Z bilaterale nu poate conţine nici un pol al acesteia.**

Fie un semnal x[n] de durată finită. Pentru el, transformata este:

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] z^{-n} \quad ; \quad 0 < |z| < \infty \quad .$$

Dacă $n_1 < 0$, apar în X(z) puteri pozitive ale lui z şi în consecinţă, punctul de la infinit ($z = \infty$) nu face parte din DC. Dacă $n_2 > 0$, apar puteri negative ale lui z şi $z = 0$ nu este din DC. Semnalele discrete cauzale de durată finită au în consecinţă transformata olomorfă în tot planul, cu excepţia originii. Se poate enunţa:

3. **Dacă x[n] este un semnal cu suportul de durată finită, X(z), transformata sa bilaterală există în tot planul, cu excepţia eventual a punctelor $z = 0$ şi/sau $z = \infty$.**

Fie un semnal x[n] cu suportul nemărginit spre dreapta, $x[n] = 0$, pentru orice $n < n_1$. Transformata sa bilaterală este:

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad .$$

Dacă $n_1 < 0$, seria modulelor se scrie ca o sumă de două sume:

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |x[n] z^{-n}| = \sum_{n=n_1}^{-1} |x[n] z^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x[n] z^{-n}| \quad ; \quad |z| = r \quad , \quad n_1 < 0 \quad .$$

Primul termen nu pune problema de convergenţă, el eliminând din DC doar punctul de la infinit. Al doilea termen conţine numai puteri negative şi vom nota raza sa de convergenţă cu R_- . Dacă r_o este raza unui cerc inclus în DC, atunci toate punctele din plan $|z| \geq r_o$ sunt din DC. Demonstraţia este imediată: $|x[n]\,z^{-n}| \leq |x[n]|\,r_0^{-n}$ şi cum $\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|\,r_0^{-n} < \infty$ prin ipoteză, rezultă că şi $\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]\,z^{-n}| < \infty$. Raza de convergenţă R_- poate fi determinată cu relaţia:

$$R_- = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x[n+1]}{x[n]} \right| \quad . \tag{9.12}$$

Dacă $n_1 \geq 0$, semnalul este cauzal şi punctul de la infinit rămâne în DC.

Deoarece avem de obicei de-a face cu transformate de tip fracţie raţională, nu este necesară calcularea razei R_- , ea rezultând din plasarea polilor.

Concluzia pe care o desprindem este:

4. Dacă x[n] este un semnal cu întindere spre dreapta şi dacă cercul $|z| = r_o$ este din DC al transformatei Z bilaterale, atunci toate punctele din plan $|z| > r_o$, cu excepţia eventual a punctului de la infinit, sunt din DC.

Semnalele cu suportul nemărginit şi întins spre stânga, ceea ce înseamnă că $x[n] = 0$, $n > n_2$ au transformata Z bilaterală:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x[n]\,z^{-n} \quad .$$

Seria modulelor, pentru $n_2 > 0$ este:

$$\sum_{n=-\infty}^{n_2} |x[n]\,z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{0} |x[n]\,z^{-n}| + \sum_{n=1}^{n_2} |x[n]\,z^{-n}| \quad .$$

Al doilea termen este convergent cu excepţia punctului $z = 0$. Primul termen, ce conţine numai puteri pozitive ale lui z, are raza de convergenţă R_+ , calculabilă cu relaţia:

$$R_+ = \lim_{n\to-\infty} \left| \frac{x[n]}{x[n+1]} \right| \quad . \tag{9.13}$$

Dacă r_o este raza unui cerc inclus în DC, atunci, pe baza criteriului comparaţiei aplicat primei sume, toate punctele din plan $|z| \leq r_o$ sunt din DC. Prin urmare:

5. Dacă x[n] este un semnal cu întindere spre stânga şi dacă cercul $|z| = r_o$, este inclus în DC al transformatei Z bilaterale atunci toate punctele din plan $|z| \le r_o$, cu excepţia eventual a punctului din origine, sunt din DC.

Cazul cel mai general este cel al semnalelor cu întindere de la -∞ la ∞ . Pentru aceste semnale se scrie:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]\, z^{-n} \quad .$$

Prima sumă este transformata unui semnal cu întindere spre dreapta. Ea are raza de convergenţă R_- şi DC corespunzător este $|z| \le R_+$. Al doilea termen este transformata unui semnal cu întindere spre stânga. Raza sa de convergenţă, R_+ , delimitează un DC definit prin $|z| < R_+$. Dacă $R_- < R_+$, cele două domenii de convergenţă au intersecţia nevidă şi ambele sume sunt convergente. Este în consecinţă convergentă transformata Z bilaterală X(z) . De importanţă practică este afirmaţia:

6. Dacă x[n] este un semnal cu întindere de la -∞ la ∞ şi dacă cercul $|z| = r_o$ este inclus în DC al transformatei Z bilaterale, atunci acesta este o coroană circulară ce include cercul $|z| = r_o$.

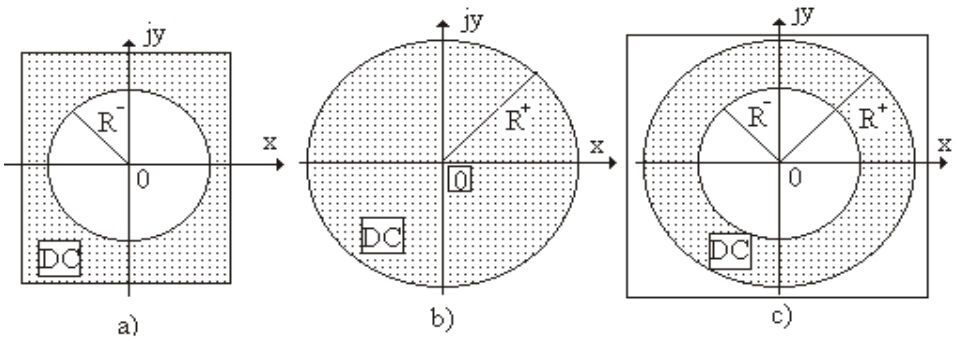


Fig. 9. 3 Domeniul de convergenţă al unui semnal cu întindere: (a) spre dreapta, (b) spre stânga, (c) de la -∞ la ∞ .

De obicei DC se stabileşte după dispunerea polilor în constelaţia de poli şi zerouri şi după sensul de întindere al semnalului, aplicând cele 6 reguli enunţate.

În figura 9.3 se prezintă cele 3 tipuri de domenii de convergenţă:

Exemplu *Vom considera semnalul cu întindere de la la -∞ la +∞ , $x[n] = a^{|n|}$, $0<a<1$. El poate fi scris ca suma dintre semnalul cauzal $x_1[n] = a^n\sigma[n]$ şi semnalul*

anticauzal $x_2[n] = a^{-n}\sigma[-n-1]$ *. Conform exemplelor anterioare :*

$$a^n \sigma[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad , \quad |z| > a \quad .$$

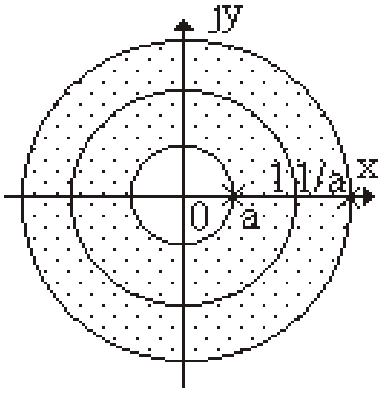


Fig.9.4 DC al semnalului cu întindere de la -∞ la +∞ .

şi:

$$a^{-n} \sigma[-n-1] = \left(\frac{1}{a}\right) \sigma[-n-1] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{-1}{1 - \frac{1}{a} z^{-1}} \quad , \quad |z| < \frac{1}{a} \quad .$$

În consecinţă:

$$a^{|n|} \longrightarrow \frac{a^2 - 1}{a} \frac{z}{(z-a)\left(z - \frac{1}{a}\right)} \quad ;$$

$$a < |z| < \frac{1}{a} \quad .$$

Polii transformatei sunt z = a şi z = 1/a . Singura coroană circulară (DC este ***numai o coroană circulară****, semnalul fiind cu întindere de la -∞ la +∞) ce nu conţine poli este tocmai a <* $|z|$ *< 1/a - vezi şi figura 9.4.*

9.2.2 Transformarea Z inversă

Transformarea Z directă a asociat unui semnal discret x[n] o funcţie X(z) prin relaţia (9.7), unde z ∈ DC. Transformarea Z inversă urmăreşte recuperarea semnalului din expresia transformatei Z bilaterale X(z), valorile z fiind din DC.

Considerăm un contur închis inclus în DC (de obicei un cerc cu centrul în origine). Transformata directă:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} \quad , \quad z \in DC$$

se înmulţeşte cu z^{n-1} şi se integrează pe cercul Γ :

$$\oint_{\Gamma} X(z)\, z^{n-1}\, dz = \oint_{\Gamma} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, z^{n-k-1} \right) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^{k-n+1}} \quad ; \quad \Gamma \in DC \quad . \qquad \textbf{(9.14)}$$

Se ştie însă că pentru orice funcţie f(z) olomorfă în DC şi orice curbă închisă, Γ, din DC avem:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi j}{n!} \frac{d^n}{dz^n} f(z) \quad , \tag{9.15}$$

punctul a fiind unul oarecare din planul complex, interior curbei. În particular f(z)=1 este olomorfă în tot planul deci şi în DC, iar a = 0 este interior cercului considerat în relaţia (9.14). În consecinţă:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^{(n-k)+1}} = \begin{cases} \frac{2\pi j}{0!} \cdot 1 & , \ n = k \\ 0 & , \ n \neq k \end{cases} \quad , \quad 0! = 1 \quad . \tag{9.16}$$

Relaţia (9.14) devine deci:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz \quad ; \quad \Gamma \subset DC \quad , \tag{9.17}$$

şi defineşte transformarea Z inversă:

$$Z^{-1}\{X(z)\}[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz = x[n] \quad ; \quad \Gamma \subset DC \tag{9.17'}$$

Se obişnuieşte să se spună că transformarea Z bilaterală defineşte o pereche semnal-transformată şi se scrie:

$$x[n] \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad X(z) \quad , \tag{9.18}$$

specificarea Z fiind de obicei omisă.

9.2.3 Definirea transformatei z bilaterale prin constelaţia de poli şi zerouri

Dacă transformata bilaterală X(z) este o fracţie raţională, ea poate fi pusă sub forma :

$$X(z) = k \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - z_{ok})}{\prod_{k=1}^{N} (z - z_{pk})} \quad ; \quad z \in DC \quad . \tag{9.19}$$

Această relaţie ne arată că este suficientă cunoaşterea polilor z_{pk} şi a zerourilor z_{ok} pentru ca X(z) să fie determinată în domeniul de convergenţă, cu excepţia unei constante

multiplicative k. Dacă se cunoaşte $X(z_o)$, z_o din DC, se poate determina şi constanta k.

Fie spre exemplu constelaţia de poli şi zerouri din figura 9.5. cu $z_o = 0$ şi $z_p=0,5$. Transformata X(z) , considerând k=1 , este:

$$X(z) = \frac{z}{z-0,5} = \frac{1}{1-0,5\,z^{-1}} \quad .$$

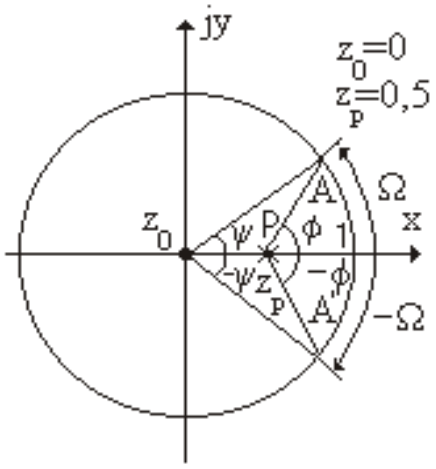


Fig. 9.5 CPZ al unei transformate Z bilaterale.

Ea singură, ca transformată bilaterală, nu spune încă nimic despre semnal. Dacă însă precizăm că semnalul x[n] <—> X(z) este de tip cauzal (cu întindere spre dreapta), atunci $|z| > |z_p| = 0,5$ defineşte DC.

In acest caz, cum cercul unitar este în DC, există şi transformata Fourier în timp discret:

$$) = X\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0,5} = \frac{1}{1-0,5\,e^{-j}}$$

Este posibilă şi determinarea grafică a modulului $|X(\Omega)|$ şi a fazei $\Phi(\Omega)=\mathrm{Arg}X(\Omega)$. Fie punctul A de pe cercul unitar, plasat la unghiul Ω (lungimea arcului de cerc în radiani). Atunci:

$$|X(\Omega)| = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{AP}|} \quad ; \quad \Phi(\Omega) = \psi - \varphi \quad .$$

În cazul general, dacă z_{pk} şi z_{ok} sunt punctele din plan (afixele) corespunzătoare tuturor polilor şi zerourilor, atunci:

$$X(\Omega) = |k| \frac{\prod_{k=1}^{M} |\overline{Az_{ok}}|}{\prod_{k=1}^{N} |\overline{Az_{pk}}|} e^{j\Phi(\Omega)} \; ; \; \Phi(\Omega) = \mathrm{Arg}k + \sum_{k=1}^{M} \psi_k - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \quad .$$

(9.20)

Frecvenţa Ω reprezintă lungimea arcului de cerc măsurată în radiani, pe cercul unitar, de la intersecţia acestuia cu semiaxa x > 0 şi pînă în punctul A, sensul fiind cel trigonometric.

9.3 Transformata Z unilaterală

Transformarea unilaterală a unui semnal discret x[n] este definită prin:

$$Z_u\{x[n]\}(z) = X_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \quad . \tag{9.21}$$

Domeniul de convergenţă al transformatei unilaterale este fie tot planul, fie exteriorul unui disc cu centrul în origine. Acest fapt rezultă imediat din aceea că $X_u(z) = X(z)$, transformata bilaterală a unui semnal cauzal.

Dacă se lucrează numai cu sisteme şi semnale cauzale, este suficientă utilizarea transformării unilaterale. După cum s-a văzut, utilizăm de multe ori semnale necauzale pentru care este aplicabilă numai transformarea Z bilaterală. Pentru semnalele şi sistemele cauzale, cele 2 transformate sunt egale, motiv pentru care vom omite uneori indicele "u" ce marchează în mod expres caracterul unilateral al transformării.

Transformarea inversă se efectuează utilizând tot relaţia de calcul (9.17), domeniul de convergenţă DC fiind unul particular.

În încheiere menţionăm că transformarea Z unilaterală este indicată pentru studiul sistemelor cauzale caracterizate de ecuaţii cu diferenţe finite, liniare şi cu coeficienţi constanţi şi care nu au condiţii iniţial nule.

9.4 Proprietăţi ale celor două tipuri de transformări Z

Vom face notaţiile:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)\ ,\ z \in DC_x\ ;\ x[n] \overset{Z_u}{\longleftrightarrow} X_u(z)$$

$$y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z)\ ,\ z \in DC_y\ ;\ y[n] \overset{Z_u}{\longleftrightarrow} Y_u(z)\ .$$

1. <u>Liniaritate şi omogenitate</u> Din relaţiile ce definesc transformările rezultă imediat că:

$$a\,x[n] + b\,y[n] \longleftrightarrow a\,X(z) + b\,Y(z)\ ;\ z \in DC_x \cap DC_y\ ,\ cel\ putin$$

$$a\,x[n] + b\,y[n] \longleftrightarrow a\,X_u(z) + b\,Y_u(z) \tag{9.22}$$

Este posibil ca domeniul de convergenţă al transformatei sumei semnalelor să fie mai cuprinzător decât intersecţia celor 2 domenii, ca urmare a simplificării unor poli prin zerouri ce se introduc. De altfel e cunoscut că suma a 2 serii convergente este convergentă dar nu e imposibil ca suma a 2 serii divergente să fie totuşi convergentă.

2. <u>Translaţia în timp</u> Pentru $x[n-n_o]$ se calculează:

$$Z\{x[n-n_o]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_o]\,z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,z^{-(m+n_o)} = z^{-n_o}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,z^{-m}$$

$$x[n-n_o] \;\longleftrightarrow\; z^{-n_o}X(z) \quad , \quad z \in DC \quad .$$

(9.23')

Dacă $n_o > 0$; $z = 0$ se elimină din DC, iar dacă $n_o < 0$, $z = \infty$ se elimină din DC.

Dacă se consideră aplicarea transformării unilaterale, pentru $n_o>0$ rezultă:

$$Z_u\{x[n-n_o]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-n_o]z^{-n} = \sum_{m=-n_o}^{\infty} x[m]z^{-m}z^{-n_o} = z^{-n_o}\left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} + \sum_{m=-n_o}^{-1} x[m]z^{-m}\right) ,$$

sau:

$$x[n-n_o] \;\longleftrightarrow\; z^{-n_o}\left(X_u(z) - \sum_{n=-n_o}^{-1} x[n]z^{-n}\right) \quad , \quad n_o > 0 \quad . \qquad \textbf{(9.23'')}$$

Dacă semnalul deplasat este cauzal, $x[n] \equiv 0$, $n < 0$, relaţia (9.23'') devine formal identică cu (9.23').

3. <u>Modularea în timp</u> Considerăm semnalul $e^{j\Omega_o n}x[n]$:

$$Z\{e^{j\Omega_o n}x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_o n}x[n]\,z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(e^{-j\Omega_o}z\right)^{-n}$$

$$e^{j\Omega_o n}x[n] \;\longleftrightarrow\; X\left(e^{-j\Omega_o}z\right) \quad , \quad z \in DC \quad . \qquad \textbf{(9.24')}$$

Domeniul de convergenţă al transformatei semnalului modulat este acelaşi cu al semnalului iniţial. Multiplicarea cu $e^{-j\Omega}$ a variabilei z nu modifică raza polilor ci numai unghiul lor. Cum simetria DC este circulară, această modificare de unghi nu modifică DC.

În mod similar se ajunge, pentru transformata unilaterală la:

$$e^{j\Omega_o n}x[n] \;\longleftrightarrow\; X_u\left(e^{-j\Omega_o}z\right) \quad . \qquad \textbf{(9.24'')}$$

Se poate stabili o relaţie de natură mai generală, modulând cu z_o^n , $|z_o|$ diferit de 1 :

$$Z\{z_o^n x[n]\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_o^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{z}{z_o}\right)^n \quad ;$$

$$z_o^n x[n] \quad <\longrightarrow \quad X\left(\frac{z}{z_o}\right) \qquad \frac{z}{z_o} \in DC \quad ; \qquad \textbf{(9.25')}$$

$$z_o^n x[n] \quad <\longrightarrow \quad X_u\left(\frac{z}{z_o}\right) \quad . \qquad \textbf{(9.25'')}$$

4. <u>Reflectarea semnalului</u> Deoarece reflectatul unui semnal cauzal este un semnal anticauzal, nu discutăm decât cazul transformării Z bilaterale:

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(\frac{1}{z}\right)^{-m} = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad ;$$

$$x[-n] \quad <\longrightarrow \quad X\left(z^{-1}\right) \quad , \quad \frac{1}{z} \in DC \quad . \qquad \textbf{(9.26)}$$

Dacă DC este definit prin $R_- < |z| < R_+$ atunci noul domeniu este dat de condiţia din (9.26) $R_- < \frac{1}{|z|} < R_+$ adică $\frac{1}{R_+} < |z| < \frac{1}{R_-}$.

5. <u>Diferenţierea în domeniul n</u> Diferenţa finită a semnalului x[n] este x[n]-x[n-1] . Aplicând proprietatea de translaţie în timp, rezultă:

$$x[n] - x[n-1] \quad <\longrightarrow \quad \left(1 - z^{-1}\right) X(z) \quad ; \quad z \in DC \quad ; \qquad \textbf{(9.27')}$$

$$x[n] - x[n-1] \quad <\longrightarrow \quad \left(1 - z^{-1}\right) X_u(z) - x[-1] \quad . \qquad \textbf{(9.27'')}$$

Evident fracţia factor (z-1)/z cumulează polul z = 1 al transformatei (dacă z=1 este pol) dar introduce z = 0 ca pol, dacă nu cumva z = 0 a fost un zerou al transformatei X(z).

6. <u>Însumarea în domeniul n (timpului)</u> Semnalul sumă

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{m} x[k]$ satisface relaţia x[n] = y[n]-y[n-1] . În consecinţă:

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \quad <\longrightarrow \quad X(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Y(z) \quad ,$$

de unde:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad \longleftrightarrow \quad \frac{X(z)}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} X(z) \quad ; \quad z \in DC \cap DC^* \quad ,$$

(9.28')

domeniul de convergenţă DC* fiind domeniul $|z| > 1$.

Pentru transformarea unilaterală:

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \quad \longleftrightarrow \quad X_u(z) = \left(1-z^{-1}\right) Y(z) - y[-1] \quad .$$

Dar $y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]$ şi deci:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad \longleftrightarrow \quad \frac{X_u(z) + \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} X(z) \quad ; \quad |z| > 1 \quad .$$

(9.28'')

Dacă semnalul x[n] este cauzal, $x[n] \equiv 0$, $n < 0$ şi deci (9.28") este formal identică cu (9.28').

7. <u>Diferenţierea în domeniul z</u> Derivând X(z) dat de relaţia (9.7) obţinem:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{dz^{-n}}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n\, x[n] z^{-n-1} = z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-n\, x[n]\right) z^{-n} \quad ,$$

şi deci:

$$n\, x[n] \quad \longleftrightarrow \quad -z \frac{dX(z)}{dz} \quad ; \quad z \in DC \quad . \qquad \textbf{(9.29')}$$

În mod similar:

$$n\, x[n] \quad \longleftrightarrow \quad -z \frac{dX_u(z)}{dz} \quad . \qquad \textbf{(9.29')}$$

8. <u>Transformarea semnalului complex conjugat</u> Dacă $x[n] \in \mathbb{C}$:

$$Z\left\{x^*[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(z^*\right)^{-n} \right)^* = X^*(z^*) \quad ;$$

$$x^*[n] \quad \longleftrightarrow \quad X^*(z^*) \quad , \quad z \in DC \quad . \qquad \textbf{(9.30')}$$

şi similar:

$$x^*[n] \quad \longleftrightarrow \quad X_u^*(z^*) \quad . \qquad \textbf{(9.30'')}$$

9. <u>Teorema convoluţiei în domeniul timpului</u> Fie x[n] şi y[n] două semnale complexe. Dacă $x[n]*y[n]$ are sens, atunci:

$$Z\{x[n]*y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,y[n-k]\right)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,z^{-k}\,y[n-k]\,z^{-(n-k)}$$

Punând n-k = m se ajunge la:

$$Z\{x[n]*y[n]\} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,z^{-k}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,z^{-m}\right) = X(z)\,Y(z) \quad ;$$
$$x[n]*y[n] \quad \longleftrightarrow \quad X(z)\,Y(z) \quad z \in DC_x \cap DC_y \quad \textit{cel putin} \; .$$

(9.31')

Pentru semnalele cauzale şi transformarea unilaterală se obţine, în acelaşi mod:

$$x[n]*y[n] \quad \longleftrightarrow \quad X_u(z)\,Y_u(z) \quad . \qquad \textbf{(9.31'')}$$

10. <u>Teorema produsului semnalelor în domeniul timpului</u> cunoscută şi ca teorema convoluţiei transformatelor. Căutăm transformata produsului semnalelor:

$$Z\{x[n]\,y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,y[n]\,z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\cdot\oint_{\Gamma} X(u)\,u^{n-1}\,du\right)y[n]\,z^{-n} =$$
$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(u)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\left(\frac{z}{u}\right)^{-n}\right]\frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(u)\,Y\left(\frac{z}{u}\right)\frac{du}{u} \quad .$$

S-a obţinut relaţia:

$$x[n]\,y[n] \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(u)\,Y\left(\frac{z}{u}\right)\frac{du}{u} \quad , \quad \Gamma \in DC \quad . \qquad \textbf{(9.32')}$$

Domeniul de convergenţă al transformatei se stabileşte după cum urmează. Fie $DC_x : R_-^x < |z| < R_+^x$ şi $DC_y : R_-^y < |z| < R_+^y$. Argumentele u şi z/u ale funcţiilor ce se integrează trebuie să satisfacă inegalităţile:

$$R_-^x < |\ u\ | < R_+^y \quad ; \quad R_-^y < \frac{|z|}{|u|} < R_+^y \quad .$$

Cum razele de convergenţă sunt nenegative, cele 2 inegalităţi duble se pot înmulţi membru cu membru, păstrând sensul semnelor de inegalitate:

$$R_-^x \cdot R_-^y < |z| < R_+^x \cdot R_+^y \quad . \qquad \textbf{(9.33)}$$

Inegalitatea (9.33) defineşte domeniul de convergenţă (DC) al transformatei Z bilaterale a produsului semnalelor x[n] şi y[n] .

Dacă $x[n] \in l^2$. fie y[n] = x*[n] . Relaţia (9.32') devine:

$$|x[n]|^2 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(u)\, X^*\left(\frac{z^*}{u^*}\right) \frac{du}{u} \quad ,$$

care se explicitează prin:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(u)\, X^*\left(\frac{z^*}{u^*}\right) \frac{du}{u} \quad .$$

Pentru z = 1 (dacă $x[n] \in l^2$, cercul unitar este din DC) rezultă o generalizare a teoremei lui Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(u)\, X^*\left(\frac{1}{u^*}\right) \frac{du}{u} \quad , \quad \Gamma \subset DC \quad . \qquad \textbf{(9.34)}$$

Pentru $u = e^{j\Omega}$, $u = e^{-j\Omega}$ şi $du = je^{j\Omega}d\Omega$ iar (9.34) se transformă în:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\Omega}\right) X^*\left(e^{j\Omega}\right) j \frac{e^{j\Omega}\, d\Omega}{e^{j\Omega}} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad ,$$

adică forma relaţiei lui Parseval din domeniul frecvenţei Ω .

În mod asemănător se arată că şi pentru transformarea unilaterală avem:

$$x[n]\, y[n] \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X_u(u)\, Y_u\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u} \quad , \quad \Gamma \subset DC \qquad \textbf{(9.32'')}$$

11. <u>Teorema valorii iniţiale a unui semnal discret cauzal</u> Pentru un semnal x[n] cauzal cele 2 transformate Z sunt identice $X(z) = X_u(z)$. Conform definiţiei, transformata unui semnal cauzal conţine, cu excepţia primului termen, numai puteri negative ale variabilei z:

$$X_u(z) = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = x[0] + \frac{1}{z} x[1] + \ldots$$

Trecând la limită pentru $|z|$ tinzând la infinit, se obţine relaţia:

$$x[0] = \lim_{|z|\to\infty} X_u(z) = \lim_{|z|\to\infty} X(z) \quad , \qquad \textbf{(9.35)}$$

cunoscută sub denumirea de teorema valorii iniţiale a unui semnal cauzal.

Ca o consecinţă a ei, dacă $X_u(z) = X(z) = N(z)/D(z)$ este o fracţie raţională în z, gradul numărătorului, M, nu poate depăşi gradul numitorului, N : $M \le N$. Altfel spus, dacă transformata unui semnal cauzal este fracţie raţională, ea nu poate avea mai multe zerouri decât poli.

12. <u>Teorema valorii finale a unui semnal discret cauzal</u> Transformata diferenţei x[n+1] - x[n] a unui semnal cauzal este:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n])\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1]\, z^{-n} - X(z) = \sum_{m=1}^{\infty} x[m]\, z^{-(m-1)} - X_u(z) =$$

$$= z\left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m]\, z^{-m} - x[0] \right) - X_u(z) = (z-1) X_u(z) - z\, x[0] \quad .$$

Trecând la limită pentru z –> 1 se obţine:

$$\lim_{z\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n])\, z^{-n} = \lim_{z\to 1} (z-1) X_u(z) - x[0] \quad .$$

Membrul stâng al egalităţii devine, după trecerea la limită:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n]) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (x[n+1] - x[n]) = \lim_{k\to\infty} (x[k+1] - x[0]) \quad .$$

Se obţine relaţia:

$$x[\infty] = \lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{z\to 1} (z-1) X_u(z) = \lim_{z\to 1} (z-1) X(z) \quad . \qquad \textbf{(9.36)}$$

numită şi teorema valorii finale a unui semnal cauzal.

Dacă semnalul este cauzal, domeniul de convergenţă al transformatei sale,

$X_u(z) = X(z)$, este exteriorul unui disc. Dacă cercul unitar este în domeniul de convergenţă $X(z)\big|_{|z|=1}$ are valori finite. Deci, cum z = 1 este pe cercul unitar, X(1) este o valoare finită. Rezultă deci că $x[\infty] = 1$, ca urmare a teoremei valorii finale. Semnalele cauzale ce au transformată Fourier în timp discret tind la 0 când n –> ∞ .

9.5 Relaţia dintre transformarea Z şi transformarea Laplace

Fie $x_a(t)$ un semnal analogic având transformarea Laplace bilaterală $X_a(s)$. Prin eşantionarea sa, se obţine semnalul:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(n T_e)\,\delta(t - n T_e) \quad . \tag{9.37}$$

Dar semnalul $\hat{x}(t)$ este un semnal definit în timp continuu. Prin urmare i se poate aplica transformarea Laplace bilaterală:

$$\mathcal{L}\{\hat{x}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(n T_e)\,\mathcal{L}\{\delta(t - n T_e)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(n T_e)\, e^{-s n T_e} \quad . \tag{9.38}$$

Dar $x_a(nT_e) = x_d[n]$, semnalul în timp discret. Pentru el transformata Z bilaterală este:

$$Z\{x_d[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(n T_e)\, z^{-n} \quad . \tag{9.39}$$

Comparând cele 2 relaţii se obţine că:

$$\mathcal{L}\{x_a(t)\,\delta_{T_e}(t)\}\Big|_{e^{sT_e}=z} = Z\{x_d[n]\} \quad ; \quad x_d[n] = x_a(n T_e) \quad . \tag{9.40}$$

Dacă se aplică semnalului analogic eşantionat transformata Laplace bilaterală şi se substituie în aceasta:

$$z = e^{s T_e} \quad , \tag{9.41}$$

se obţine transformata Z bilaterală a semnalului discret, provenit din semnalul analogic.

Relaţia (9.40) este valabilă şi pentru cazul transformatelor unilaterale:

$$\mathcal{L}_u\{x_a(t)\,\delta_{T_e}(t)\}\Big|_{e^{sT_e}=z} = Z_u\{x_d[n]\} \quad ; \quad x_d[n] = x_a(n T_e) \tag{9.40'}$$

substituţia fiind aceeaşi - (9.41).

9.6 Studiul sistemelor discrete liniare şi invariante în timp prin intermediul transformării Z

Forma simplă a teoremei convoluţiei semnalelor discrete face din transformata Z un instrument util pentru studiul sistemelor discrete LIT. Dacă sistemul studiat este cauzal şi nu are condiţii iniţiale nule, este utilă transformarea Z unilaterală.

9.6.1 Funcţia de sistem a unui sistem discret, liniar şi invariant în timp

Dacă x[n] este semnalul de intrare al unui SLITD, x[n] <—> X(z) iar y[n]<—>Y(z) este semnalul de la ieşirea sa, atunci aplicând relaţiei $y[n] = h[n] * x[n]$ transformarea Z bilaterală, se obţine:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad ; \quad H(z) = Z\{h[n]\} \quad . \qquad \textbf{(9.42)}$$

Relaţia (9.42) permite determinarea răspunsului unui SLIT de orice fel, nu neapărat cauzal la un semnal de intrare nici el neapărat cauzal.

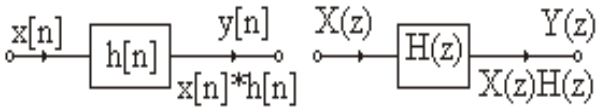


Figura 9.6. SLITD caracterizat prin: (a) răspunsul la impuls, h[n]; (b) funcţia sistem H(z).

Dacă sistemul şi semnalul de intrare sunt de tip cauzal, simpla adăugare a indicelui "u" transformatelor modifică relaţia (9.42) pentru cazul transformatelor unilaterale. Dacă se foloseşte transformarea Z bilaterală indicarea domeniului de convergenţă, explicit sau implicit, este obligatorie.

Relaţia (9.42) ne arată că funcţia H(z), numită şi "funcţia (de) sistem" sau "funcţia de transfer a sistemului" caracterizează complet comportarea sa în planul complex z, după cum răspunsul la impuls h[n] caracteriza complet comportarea sistemelor în timp - figura 9.6.

Dacă sistemul discret este stabil, există şi $\mathcal{F}\{h[n]\}$. Dar, $\mathcal{F}\{h[n]\}(\Omega)=Z\{h[n]\}(e^{j\Omega})$ şi prin urmare cercul unitar este în domeniul de convergenţă al funcţiei de sistem ce caracterizează un sistem stabil.

Dacă sistemul este cauzal: $H_u(z) = H(z)$, atunci domeniul de convergenţă al funcţiei este exteriorul unui disc. Dacă sistemul este stabil şi cauzal, cercul unitar este în DC. Toţi polii funcţiei sistem a unui sistem stabil şi cauzal au modulul subunitar ceea ce este ehivalent cu faptul că sunt cuprinşi în interiorul discului unitar.

9.6.2 Determinarea răspunsului unui sistem discret liniar şi invariant în timp, utilizând transformarea Z

Dacă x[n] este dat şi se specifică h[n] <—> H(z) atunci se aplică semnalului de intrare transformarea directă rezultând X(z). Răspunsul în complex este Y(z)=H(z)X(z) .

Aplicând transformarea Z inversă, rezultă semnalul răspuns, y[n]. Dacă se lucrează cu sisteme şi semnale cauzale în condiţii iniţiale nenule, se va utiliza numai transformarea Z unilaterală. Problema principală este transformarea directă şi inversă a unui semnal.

Calculul transformatei directe nu pune probleme, cel puţin pentru semnalele discrete uzuale. Aplicarea relaţiei de definire a transformatei sau tabelele de transformări împreună cu proprietăţile transformării conduc la obţinerea transformatei.

În ceea ce priveşte calculul transformatei Z inverse sunt aplicabile trei metode:

1. <u>Calculul direct al integralei (9.17)</u>

Se ţine seama de următoarele:

- dacă f(z) este o funcţie ce în domeniul mărginit de curba închisă Γ, netedă pe porţiuni, are un număr finit de puncte singulare izolate z_k , atunci:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{k} \operatorname{Rez}\{f(z)\}\Big|_{z=z_k} \quad . \qquad \textbf{(9.43)}$$

- dacă $z = z_k$ este un pol de ordinul s al funcţiei f(z) , atunci reziduul referitor la acest pol se calculează cu relaţia:

$$\operatorname{Rez}\{f(z)\}\Big|_{z=z_k} = \frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\left[(z-z_k)^s f(z)\right]\Big|_{z=z_k} \quad . \qquad \textbf{(9.44)}$$

Conform cu (9.43), notând $f(z) = X(z)z^{n-1}$, (9.17) devine:

$$x[n] = \sum_{k} \operatorname{Rez}\{X(z)\,z^{n-1}\}\Big|_{z=z_k} \quad , \qquad \textbf{(9.45)}$$

unde z_k sunt polii aflaţi în interiorul discului centrat pe origine şi delimitat de cercul Γ din DC pe care se face integrarea în 9.17.

Având în vedere complicaţiile de calcul, metoda este mai puţin utilizată.

<u>Exemplu:</u> *Fie de inversat:*

$$Y(z) = \frac{z(2z-1)}{2(z-1)(z+0{,}5)} \quad ; \quad |z| > 1 \quad .$$

Polii transformatei sunt $z_1 = 1$ şi z_2=-0,5 - vezi şi figura 9.7. Curba $\Gamma \subset$ DC este un cerc cu centrul în origine şi raza mai mare decât unu.

Fie $n > 0$. Factorul z^{n-1} nu introduce poli suplimentari. În consecinţă se calculează numai:

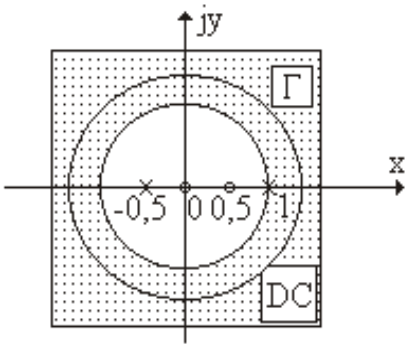


Figura 9.7 CPZ pentru exemplul de calcul al TZ inverse.

$$\left.\mathrm{Rez}\left\{\frac{z^n(2z-1)}{2(z-1)(z+0{,}5)}\right\}\right|_{z=1} = \left.\frac{z^n(2z-1)}{2(z+0{,}5)}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}\ ;$$

$$\left.\mathrm{Rez}\left\{\frac{z^n(2z-1)}{2(z-1)(z+0{,}5)}\right\}\right|_{z=-0{,}5} = \left.\frac{z^n(2z-1)}{2(z-1)}\right|_{z=-0{,}5} =$$

$$= \frac{2}{3}(-0{,}5)^n\ .$$

şi conform relaţiei (9.45):

$$y[n] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-0{,}5)^n\ ;\ n \geq 0\ . \qquad \textbf{(9.46')}$$

Dacă n ≤ -1 , notăm m = -n şi atunci:

$$Y(z)z^{n-1} = -\frac{2z-1}{2z^m(z-1)(z+0{,}5)}\ ;\quad m \geq 1$$

are în origine un pol multiplu de ordin m:

$$\mathrm{Rez}\left\{Y(z)\,z^{n-1}\right\} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{z^m\frac{2z-1}{z^m 2(z-1)(z+0{,}5)}\right\}\Bigg|_{z=0} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}(-2)^m = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}(-0{,}5)^n\quad ,$$

deoarece:

$$\frac{2z-1}{2(z-1)(z+0{,}5)} = \frac{1}{3}\frac{1}{z-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z+0{,}5}\quad ,$$

şi deci:

$$\left(\frac{2z-1}{2(z-1)(z+0{,}5)}\right)^{m-1} = \frac{1}{3}\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(z-1)^m} + \frac{2}{3}\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(z+0{,}5)^m}\quad .$$

Se calculează reziduurile în 1:

$$\left.\mathrm{Rez}\left\{\frac{2z-1}{z^m 2(z-1)(z+0{,}5)}\right\}\right|_{z=1} = \left.\frac{2z-1}{z^m 2(z+0{,}5)}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}\quad ,$$

şi în -0,5:

$$\text{Rez}\left\{\frac{2z-1}{z^m\,2\,(z-1)\,(z+0{,}5)}\right\}\Bigg|_{z=-0{,}5} = \frac{2z-1}{z^m\,2\,(z-1)}\Bigg|_{z=-0{,}5} = \frac{2}{3}(-2)^m = \frac{2}{3}(-0{,}5)^n \ .$$

Conform relaţiei (9.45):

$$y[n] \;=\; -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}(-0{,}5)^n + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-0{,}5)^n \;\equiv\; 0 \quad ; \quad n \;\leq\; -1 \qquad \textbf{(9.46'')}$$

Transformata inversă este deci un ***semnal cauzal****, după cum rezultă şi din domeniul de convergenţă. Din (9.46') şi (9.46'') obţinem:*

$$y[n] \;=\; \left[\frac{1}{3} \;+\; \frac{2}{3}(-0{,}5)^n\right]\sigma[n] \quad . \qquad \textbf{(9.46)}$$

2. Transformarea funcţiei Y(z) intr-o sumă de fracţii simple

Metoda se aplică în cazurile în care Y(z) este o funcţie raţională. Funcţia Y(z) poate fi un raport de polinoame în z^{-1} sau z. Recomandăm să se lucreze în z^{-1} , notând pentru comoditate $z^{-1} = x$, deoarece în majoritatea cazurilor tabelele sunt date în funcţie de puterile lui z^{-1}. Fie $Y(x) = Y(z^{-1})$ o funcţie raţională:

$$Y(x) \;=\; \frac{N\left(z^{-1}\right)}{D\left(z^{-1}\right)} \;=\; \frac{N(x)}{D(x)} \quad .$$

Efectuând împărţirea rezultă:

$$Y(x) \;=\; I(x) \;+\; \frac{R(x)}{D(x)} \quad . \qquad \textbf{(9.47)}$$

Pentru partea întreagă: $I(x) \;=\; \sum_k c_k x^{\,k} \;=\; \sum_k c_k z^{-k}$. şi deci:

$$Z^{-1}\left\{\sum_k c_k z^{-k}\right\} \;=\; \sum_k c_k\,\delta[n \;-\; k] \quad . \qquad \textbf{(9.48)}$$

Partea fracţională se pune sub forma:

$$\frac{R(x)}{D(x)} \;=\; \sum_m \frac{a_m}{x - x_m} \;+\; \sum_k \sum_{i=1}^{s_k} \frac{b_{ki}}{(x - x_k)^i} \quad , \qquad \textbf{(9.49)}$$

unde suma după m se extinde la toate rădăcinile simple iar suma după k la toate rădăcinile multiple, de ordine de multiplicitate s_k. Coeficienţii a_m şi b_{ki} pot fi determinaţi prin identificare sau prin aplicarea relaţiilor de calcul:

$$a_m = \left[(x - x_m) \frac{R(x)}{D(x)} \right]_{x = x_m} \quad ; \qquad \textbf{(9.50)}$$

$$b_{ki} = \frac{1}{(s_k - i)!} \left\{ \frac{d^{s_k - i}}{dx^{s_k - i}} \left[(x - x_k)^{s_k} \frac{R(x)}{D(x)} \right] \right\} \Bigg|_{x = x_k} \quad . \qquad \textbf{(9.51)}$$

Se aplică transformarea inversă fiecărui termen din suma (9.49), după ce se revine mai întâi la $z^{-1} = x$, utilizând tabelele de transformate şi tabelele de proprietăţi ale transformării.

Exemple

1. Se dă $Y(z) = \dfrac{z}{(z - 0{,}5)(z - 0{,}25)}$ *; se cere y[n] ştiind că el este un semnal cauzal. Vom remarca imediat că $Y_u(z) = Y(z)$ şi că DC este definit de raza celui mai îndepărtat pol de origine, 0,5: $|z| > 0{,}5$. Înainte de a descompune în fracţii simple, se exprimă Y(z) prin puterile lui z^{-1} , împărţind numărătorul şi numitorul cu z^2 :*

$$Y(z) = \frac{8 z^{-1}}{(2 - z^{-1})(4 - z^{-1})} = \frac{8 x}{(2 - x)(4 - x)} = \frac{Q_1}{2 - x} + \frac{Q_2}{4 - x} = \frac{8}{2 - x} - \frac{16}{4 - x} \quad ;$$

$$Y(z) = \frac{8}{2 - z^{-1}} - \frac{16}{4 - z^{-1}} = \frac{4}{1 - 0{,}5 z^{-1}} - \frac{4}{1 - 0{,}25 z^{-1}} \quad .$$

(9.52)

Din tabele rezultă:

$$y[n] = 4 \left[(0{,}5)^n - (0{,}25)^n \right] \sigma[n] \quad .$$

2. Pentru aceeaşi transformată Y(z) , cu DC definit de $|z| < 0{,}25$ se inversează (9.52) ţinând seama că ambii termeni sunt definiţi în discurile $|z| < 0{,}5$ respectiv $|z| < 0{,}25$:

$$y[n] = -4 \left[(0{,}5)^n - (0{,}25)^n \right] \sigma[-n - 1] \quad .$$

3. Tot pentru aceeaşi transformată dar cu DC: $0{,}25 < |z| < 0{,}5$, primul termen este definit pentru $|z| < 0{,}5$ iar al doilea pentru $|z| > 0{,}25$. În consecinţă:

$$y[n] = -4 (0{,}5)^n \sigma[-n - 1] - 4 (0{,}25)^n \sigma[n] \quad .$$

Şi din aceste 3 exemple se poate deduce însemnătatea definirii corecte a domeniului în care se face transformarea inversă.

3. Metoda dezvoltării funcţiei Y(z) în serie de puteri

Dacă se dezvoltă Y(z) în serie de puteri în jurul originii, se obţine forma explicită a lui x[n] :

a) Astfel, pentru $Y(z) = e^{z^{-1}}$ originea este un punct singular esenţial. Pentru $|z|>0$ avem:

$$e^{z^{-1}} = 1 + \frac{1}{1!} z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \ldots + \frac{1}{n!} z^{-n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \quad .$$

şi deci $y[n] = \dfrac{1}{n!}$.

b) Dacă se consideră $Y(z) = e^{z}$, ea are la infinit un punct singular şi deci y[n] nu poate fi cauzal. Avem pentru $|z| \geq 0$, cu excepţia punctului de la infinit:

$$e^{z} = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^{2} + \ldots + \frac{1}{m!} z^{m} + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^{m} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^{-n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-n)!} z^{-n} \quad .$$

Rezultă din tabele:

$$y[n] = \delta[n] - \frac{1}{(-n)!} \sigma[-n-1] = \frac{1}{(-1)^n n!} \sigma[-n] \quad .$$

c) Fie $Y(z) = \ln(1+az^{-1})$ şi DC definit de $|z| > |a|$. Semnalul y[n] este cauzal. Dezvoltarea în serie a funcţiei Y(z) în domeniul de convergenţă este:

$$Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{n}}{n} z^{-n} \longrightarrow y[n] = \frac{(-1)^{n+1} a^{n}}{n} \quad ; \quad n \geq 1 \quad .$$

Semnalul fiind cauzal, teorema valorii iniţiale dă $y[0] = \lim_{z \to \infty} \ln\left(1 + a z^{-1}\right) = 0$

şi în consecinţă $y[n] = \dfrac{(-1)^{n}}{n} a^{n} \sigma[n-1]$.

Un caz aparte al dezvoltării în serie de puteri apare atunci când Y(z) este o fracţie raţională.

Fie $Y(z) = \dfrac{1}{1 - a z^{-1}}$, $|z| > |a|$. Se efectuează împărţirea urmărind forma câtului în z^{-1} deoarece transformata semnalului cauzal nu conţine decât puterile negative ale lui z:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1 - az^{-1} \\
\hline
-1 + az^{-1} & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \ldots \\
\hline
\quad / \quad az^{-1} & \\
\quad -az^{-1} + a^2z^{-2} & \\
\hline
\quad\quad / \quad a^2z^{-2} & \\
\quad\quad -a^2z^{-2} + a^3z^{-3} & \\
\hline
\quad\quad\quad / \quad a^3z^{-3} & \\
\quad\quad\quad \ldots &
\end{array}
$$

Se obţine deci $y[n] = a^n\sigma[n]$.

Dacă $Y(z) = \dfrac{1}{1 - a z^{-1}}$ este definită pentru $|z| < |a|$, semnalul corespunzător este anticauzal. Transformata sa conţine numai puterile pozitive ale lui z. De aceea se scrie $Y(z) = \dfrac{z}{z - a}$ şi se efectuează împărţirea sub forma:

$$
\begin{array}{l|l}
z & -a + z \\
\hline
-z + a^{-1}z^2 & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - a^{-4}z^4 - \ldots \\
\hline
\quad / \quad a^{-1}z^2 & \\
\quad -a^{-1}z^2 + a^{-2}z^3 & \\
\hline
\quad\quad / \quad a^{-2}z^3 & \\
\quad\quad -a^{-2}z^3 + a^{-3}z^4 & \\
\hline
\quad\quad\quad / \quad a^{-3}z^4 & \\
\quad\quad\quad \ldots &
\end{array}
$$

Rezultă că: $Y(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^m = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$ şi în consecinţă forma

semnalului este $y[n] = -a^n \sigma[-n-1]$.

9.6.3 Sisteme discrete liniare şi invariante în timp, caracterizate prin ecuaţii cu diferenţe finite liniare şi cu coeficienţi constanţi

Fie SLIT discret caracterizat de ecuaţia cu diferenţe finite:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad , \tag{9.53}$$

cu condiţii iniţiale nule.

Aplicând egalităţii transformarea Z bilaterală rezultă:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) \quad ,$$

din care se poate determina funcţia H(z) = Y(z)/X(z) ca fiind:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad . \tag{9.54}$$

Dacă este dată ecuaţia cu diferenţe finite (9.53), forma (9.54) a lui H(z) se determină imediat, identificând coeficienţii din cele 2 relaţii şi reciproc. Se mai observă că H(z) este în acest caz o fracţie raţională în z^{-1} sau în z.

Dacă sistemul nu este cauzal, este necesară specificarea domeniului de convergenţă DC. Pentru sistemele cauzale, $H_u(z) = H(z)$, şi domeniul de convergenţă este implicit. El este exteriorul unui disc cu raza egală cu cel mai mare modul al polilor lui H(z). Rădăcinile ecuaţiei N(z) = 0 sunt zerourile sistemului, iar rădăcinile ecuaţiei D(z) = 0 sunt polii sistemului.

Dacă sistemul este stabil şi cauzal, toţi polii săi au modulul subunitar deci sunt plasaţi în interiorul discului unitar: $|z_{pk}| < 1$.

Fie sistemul discret cauzal. Teorema valorii iniţiale pentru h[n] cauzal este:

$$h[0] = \lim_{z\to\infty} H_u(z) = \lim_{z\to\infty} H(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{N(z)}{D(z)} \quad . \tag{9.55}$$

Din ea rezultă că, dacă $H_u(z) = H(z)$ este o fracţie raţională, atunci gradul numărătorului, M, nu poate depăşi gradul numitorului, N: $M \leq N$. Condiţia este mai puţin severă decât în cazul sistemelor în timp continuu (analogice), unde M < N (inegalitatea trebuie să fie strictă).

Funcţiile $H_u(z)$ care au atât poli cât şi zerouri plasate în interiorul discului unitar se numesc funcţii de rază minimă.

<u>Contribuţia polilor unui sistem discret cauzal în răspunsul la impuls al acestuia</u>

Vom considera numai cazul polilor simpli şi dubli, celelalte cazuri tratându-se în mod identic.

Deoarece $H_u(z)$ are coeficienţi reali, dacă $N(z) = 0$ admite $z_k \in \mathbb{C}$ ca rădăcină atunci ea admite şi pe z_k^* ca rădăcină. Polii apar în perechi complex conjugate.

Fie $z_p = r_p e^{j\Omega_p}$ şi $z_p^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ o pereche de poli. Termenii corespunzători în descompunerea lui $H_u(z) = H(z)$ în fracţii simple sunt:

$$\dots + \frac{a}{1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a^*}{1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}} + \dots ,$$

iar contribuţia lor în h[n] este de forma $Ar_p^n \sin(\Omega_p n + \Phi_p)$. Dacă $r_p < 1$, răspunsul, având un caracter oscilant, se amortizează. Perechea de poli nu conferă instabilitate sistemului. Dacă însă $r_p > 1$, răspunsul creşte exponenţial, sistemul fiind instabil. Un caz aparte îl reprezintă polii simplii situaţi pe cercul unitar. Contribuţia lor în răspunsul la impuls este un semnal oscilant $A\sin(\Omega_p n + \Phi_p)$, a cărui amplitudine rămâne mărginită. Oscilaţia continuă să se menţină deşi excitaţia a dispărut, fără ca amplitudinea ei să se modifice. Este un caz de stabilitate la limită, sistemul respectiv fiind un oscilator.

Dacă polii $z_p = r_p e^{j\Omega_p}$ şi $z_p^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ sunt dublii, apar în $H_u(z) = H(z)$ termeni de forma:

$$\dots + \frac{a_1}{1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a_1^*}{1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a_2}{\left(1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}\right)^2} + \frac{a_2^*}{\left(1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}\right)^2} + \dots$$

Contribuţia lor în răspunsul la impuls este de forma:

$$\left[A_1 r_p^n \sin\left(\Omega_p n + \Phi_p\right) + A_2 n r_p^n \sin\left(\Omega_p n + \Psi_p\right)\right]\sigma[n] \quad .$$

Dacă $r_p < 1$, răspunsul este amortizat şi polii dublii din interiorul discului unitar nu conduc la instabilitate. Dacă însă $r_p < 1$, răspunsul creşte în timp şi nu este satisfăcută condiţia de BIBO stabilitate.

Concluzia ce se desprinde este aceea că un sistem discret şi cauzal este întotdeauna BIBO stabil dacă polii săi sunt în interiorul discului unitar. Dacă polii sunt plasaţi pe cercul unitar, sistemul cauzal este stabil la limită, doar dacă ei sunt simpli. Pentru cazul unei singure perechi de poli simpli plasaţi pe cercul unitar se obţine un oscilator numeric ce generează un semnal discret sinusoidal.

Plasarea unui pol în afara discului unitar cauzează instabilitatea sistemului, chiar dacă el este simplu.

Calculul răspunsului unui SLIT discret caracterizat printr-o ecuatie cu diferenţe finite

În loc de a determina răspunsul y[n] al unui SLIT discret rezolvând ecuaţia cu diferenţe finite pentru un semnal de intrare x[n] dat, se poate proceda în modul descris în paragraful 9.6.2. Calculul se efectuează prin intermediul transformatei Z bilaterale sau unilaterale, după caz. Dacă de exemplu se consideră că ecuaţia (9.53) cu condiţii iniţiale nenule, caracterizează un sistem cauzal (dar semnalul de la ieşire y[n] este necauzal), atunci prin aplicarea în cei doi membrii ai ralaţiei (9.53) a transformării Z unilaterale rezultă:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y_u(z) + \sum_{n=1}^{k} y[-n] z^{n} \right] = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}\left[X_u(z) + \sum_{n=1}^{k} x[-n] z^{n} \right] . \qquad \textbf{(9.56)}$$

Dacă semnalul de intrare este cauzal atunci x[-n] ≡ 0 , n > 0 şi ecuaţia devine:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y_u(z) + \sum_{n=1}^{k} y[-n] z^{n} \right] = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} X_u(z) \quad . \qquad \textbf{(9.57)}$$

Din ambele ecuaţii, cunoscând $X_u(z)$ şi condiţiile iniţiale se determină $Y_u(z)$ şi apoi semnalul y[n].

Spre exemplu, fie ecuaţia $y[n] - a\,y[n-1] = x[n]$, iar semnalul de intrare $x[n] = k e^{j\Omega_o n}\,\sigma[n]$. Se presupune că y[-1] ≠ 0. Este aplicabilă forma (9.57):

$$Y_u(z) - a z^{-1}\left(Y_u(z) + y[-1] z \right) = \frac{k}{1 - e^{j\Omega_o} z^{-1}} \quad ; \quad |z| > 1 \quad .$$

Se determină $Y_u(z)$:

$$Y_u(z) = \frac{k}{\left(1 - e^{j\Omega_o} z^{-1}\right)\left(1 - a z^{-1}\right)} + \frac{a\,y[-1]}{1 - a z^{-1}} = \frac{-k e^{j\Omega_o}}{a - e^{j\Omega_o}} \frac{1}{1 - e^{j\Omega_o} z^{-1}} +$$
$$+ \frac{k a}{a - e^{j\Omega_o}} \frac{1}{1 - a z^{-1}} + \frac{a\,y[-1]}{1 - a z^{-1}} \quad .$$

şi apoi:

$$y[n] = \left(a^{n+1} y[-1] + \frac{k a^{n+1}}{a - e^{j\Omega_o}} + \frac{k e^{j\Omega_o (n+1)}}{a - e^{j\Omega_o}} \right) \sigma[n] \quad ; \quad |a| < 1 \quad , \quad |z| > 1 \quad .$$

9.6.4 Sisteme de ordinul întâi

Un sistem de ordinul întâi este descris de ecuaţia cu diferenţe finite:

$$y[n] - a\,y[n-1] = k\,x[n] \quad . \tag{9.58}$$

Aplicând transformata Z bilaterală se deduce funcţia de sistem:

$$H(z) = \frac{k}{1 - a\,z^{-1}} = \frac{k\,z}{z - a} \quad ; \quad z \in DC \quad . \tag{9.59}$$

Răspunsul la impuls se poate determina în funcţie de natura sistemului. În figura 9.5 se ilustrează constelaţia de poli şi zerouri (CPZ) a unui sistem de ordinul întâi. El are un pol în z = a şi un zero în origine.

Dacă sistemul este cauzal atunci $H_u(z) = H(z)$ iar DC este definit de $|z| > |a|$. Considerând că polul este în interiorul discului unitar, $|a| < 1$, sistemul este stabil. Această condiţie este şi necesară şi suficientă pentru stabilitatea unui sistem cauzal de ordinul întâi. Răspunsul la impuls în aceste condiţii este:

$$h[n] = k\,a^n \sigma[n] \quad . \tag{9.60}$$

Dacă sistemul este anticauzal, DC este definit prin $|z| < |a|$ şi atunci:

$$h[n] = -k\,a^n \sigma[-n-1] \quad . \tag{9.61}$$

Vom considera în cele ce urmează sistemul stabil şi cauzal. Răspunsul său în frecvenţă se obţine - vezi figura 9.5 - prin:

$$H(\Omega) = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{PA}|}\, e^{j(\psi - \varphi)} = \frac{1}{|\overline{PA}|}\, e^{j(\Omega - \varphi)} \quad . \tag{9.62}$$

Dacă $0 < a < 1$ maximul modulului răspunsului în frecvenţă rezultă pentru $|\overline{PA}|$ minim adică pentru $\Omega = 0$. Dacă însă $-1 > a > 0$, maximul rezultă pentru $\Omega = \pi$. În concluzie, valori a pozitive definesc sisteme trece jos, iar valori a negative definesc sisteme trece sus.

Este uşor de sesizat că $|H(\Omega)|$ este o caracteristică pară, deoarece $|\overline{PA}|_{\Omega} = |\overline{PA'}|_{-\Omega}$. Caracteristica de fază este însă, aşa cum rezultă şi din figură, o caracteristică impară.

9.6.5 Sisteme de ordinul doi

Vom considera o formă particulară a ecuaţiei cu diferenţe finite de ordinul doi, obţinută prin normarea cu a_0 :

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = kx[n] \qquad \textbf{(9.63)}$$

În urma aplicării transformării bilaterale rezultă funcţia de sistem:

$$H(z) = \frac{k}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{k z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad . \qquad \textbf{(9.63')}$$

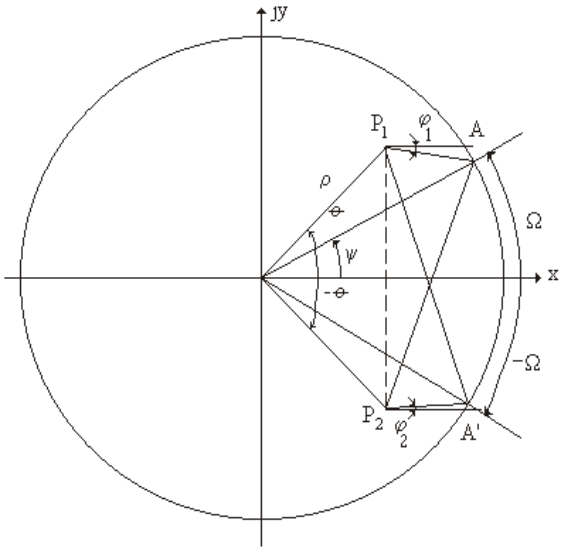


Fig. 9.8. CPZ pentru un sistem de ordinul doi.

Ea are un zero de ordinul doi în origine şi doi poli. Expresiile polilor sunt:

$$z_{p1,2} = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad . \qquad \textbf{(9.63'')}$$

Dacă $a_1^2 < 4a_2$ cei doi poli sunt complex conjugaţi:

$$z_{p1,2} = \rho e^{\pm j\theta} \quad , \qquad \textbf{(9.64)}$$

rezultând constelaţia din figura 9.8.

Daca $a_1^2 \geq 4a_2$ polii sunt reali.

În ambele cazuri vom considera că sistemul este cauzal şi vom căuta condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienţii a_1 şi a_2 pentru a obţine stabilitatea. Dar condiţia necesară şi suficientă pentru ca un sistem cauzal să fie stabil este aceea ca toţi polii săi să aibă modulul subunitar. Aceasta conduce la:

$$\rho = \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2 - a_1^2}}{2} = \sqrt{a_2} < 1 \quad ; \quad a_1^2 < 4a_2 \quad .$$

ceea ce implică:

$$|a_2| < 1 \quad , \quad a_2 > \frac{a_1^2}{4} \quad , \qquad \textbf{(9.65')}$$

sau, dacă polii sunt reali:

$$-2 < -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 \quad ; \quad a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \quad .$$

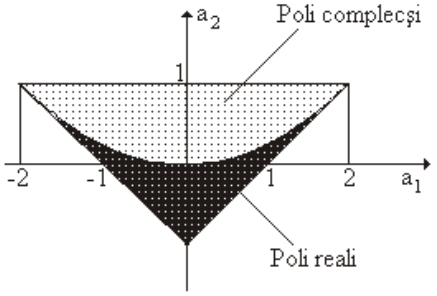


Fig. 9.9 Domeniul posibil al coeficienţilor a_1 şi a_2 care asigură stabilitatea unui sistem de ordinul doi.

Rezolvând cele 4 inegalităţi ce trebuie să fie simultan îndeplinite, rezultă că este necesar să avem:

$$a_2 > -a_1 - 1 \quad si \quad a_2 > a_1 - 1 \quad ;$$
$$a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \quad . \qquad \textbf{(9.65'')}$$

Condiţiile (9.65') şi (9.65") delimitează în axele a_1 , a_2 un domeniu triunghiular aşa cum se vede în figura 9.9. Domeniul este separat în două părţi de parabola $a_2 = a_1^2/4$, una corespunzând polilor complecşi, cealaltă polilor reali. Parabola corespunde cazului existenţei unui singur pol real, dublu.

Răspunsul în frecvenţă al sistemului se determină aplicând relaţia de calcul generală (9.20) :

$$H(\Omega) = k \frac{1}{|\overline{P_1 A}|\,|\overline{P_2 A}|} e^{j(2\Omega - \varphi_1 - \varphi_2)} \quad . \qquad \textbf{(9.66)}$$

unde s-a considerat $k \in \mathbb{R}^*$. Pentru valori k negative, faza se modifică cu π. Se observă paritatea în raport cu Ω a caracteristicii de modul şi imparitatea caracteristicii de fază.

9.6.6 Funcţia de sistem echivalentă unor sisteme discrete conectate în serie şi în paralel

Vom considera două sisteme discrete $h_1[n]$ şi $h_2[n]$ conectate în serie - figura 9.10a . Sistemul echivalent este caracterizat de $h_e[n] = h_1[n] * h_2[n]$ (dacă operaţia are sens). Transformata Z a răspunsului la impuls a sistemului echivalent celor 2 sisteme conectate în serie este conform teoremei de convoluţie a semnalelor:

$$H_e(z) = H_1(z) H_2(z) \quad . \qquad \textbf{(9.67)}$$

Dacă sistemele sunt cauzale, transformatele bilaterale se înlocuiesc cu transformatele unilaterale. În relaţia (9.67) se adaugă indicele "u".

Pentru cazul a două sisteme discrete conectate în paralel ca în figura 9.10 b , $h_e[n] = h_1[n]+h_2[n]$ şi deci:

$$H_e(z) = H_1(z) + H_2(z) \quad . \tag{9.68}$$

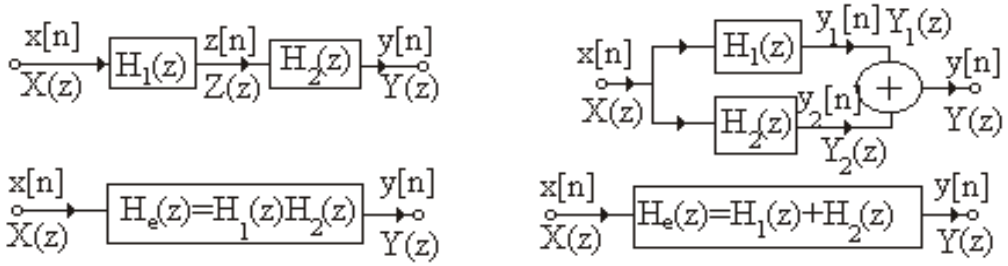


Fig. 9.10. Sistemele discrete echivalente conexiunii serie (a) respectiv conexiunii paralel (b) a două sisteme discrete.

9.7 Forme de implementare ale filtrelor numerice utilizând transformarea Z

Deoarece întârzierea cu un eşantion echivalează cu înmulţirea cu z^{-1} a transformatei semnalului, formele de implementare din figurile 2.11, 2.12 şi 2.13 se modifică în sensul înlocuirii blocului de întârziere D cu un bloc de înmulţire cu z^{-1}.

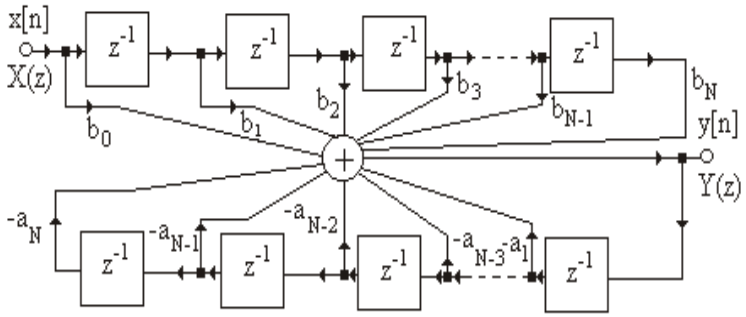


Fig. 9.11 Formă specifică de reprezentare a implementării în forma directă I. S-a considerat $a_0 = 1$.

Aplicarea transformatei Z la studiul filtrelor numerice utilizează modalităţi specifice de reprezentare, astfel încât figura 9.11 prezintă forma directă I de implementare a unui filtru numeric. S-a făcut normarea coeficienţilor prin împărţirea lor cu a_0 , astfel că $a_0 = 1$. La o privire mai atentă, nu există nici o diferenţă între reprezentările din figurile 9.11 şi 2.11.

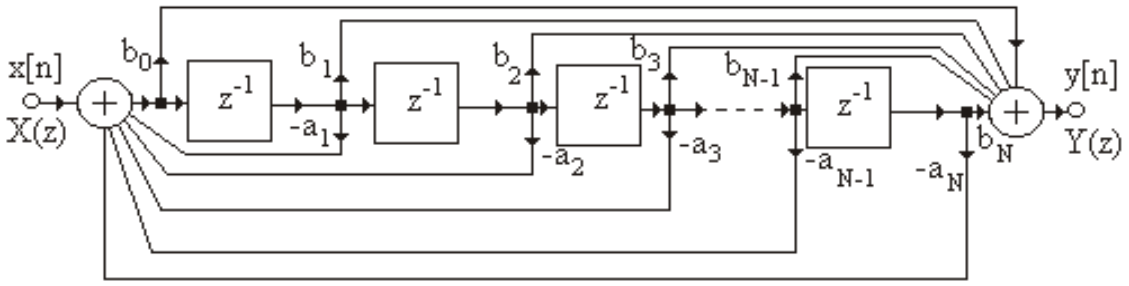


Fig. 9.12 Formă specifică de reprezentare a implementării în forma directă II. S-a considerat $a_0 = 1$.

O reprezentare specifică filtrelor numerice pentru forma directă II de implementare este cea din figura 9.12, unde s-au normat coeficienţii la a_0. Ea nu diferă de fapt de reprezentarea din fig 9.13.

9.7.1 Forma laticială a unui filtru având numai poli

Dacă $b_1 = b_2 = ... = b_M = 0$, normând la a_0 şi considerând $b_0/a_0 = 1$ (ceea ce nu reduce generalitatea tratării), ecuaţia (9.53) se reduce la:

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \quad . \tag{9.69}$$

Funcţia de transfer corespunzătoare este:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad . \tag{9.70}$$

Cu excepţia originii, funcţia (9.70) are numai poli.

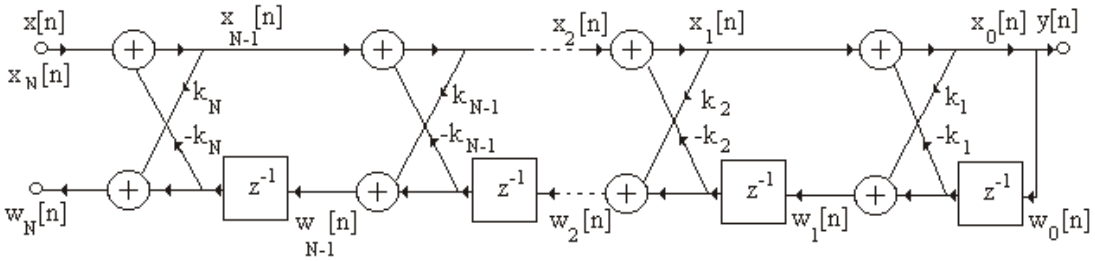


Fig. 9.13 Structură laticială de filtru numeric având numai poli.

O formă posibilă de implementare, distinctă de cele prezentate pentru sistemul descris prin (9.70) o constituie structura "laticială" din figura 9.13.

Pentru început vom considera numai ultimele 2 celule din dreapta figurii. Pentru

acestea se scriu relaţiile:

$$y[n] = x_1[n] - k_1 y[n-1] \quad ; \quad w_1[n] = k_1 y[n] + y[n-1]$$
$$x_1[n] = x_2[n] - k_2 w_1[n-1] \quad ,$$

sau în transformata Z:

$$Y(z) = X_1(z) - k_1 z^{-1} Y(z) \quad ; \quad W_1(z) = k_1 Y(z) + z^{-1} Y(z)$$
$$X_1(z) = X_2(z) - k_2 z^{-1} W_1(z) \quad .$$

Eliminând din cele 3 relaţii $X_1(z)$ şi $W_1(z)$ rezultă raportul $Y(z)/X_2(z)$, funcţia sistem a ultimelor 2 celule:

$$\frac{Y(z)}{X_2(z)} = \frac{1}{1 + k_1 (1 + k_2) z^{-1} + k_1 k_2 z^{-2}} \; ; \; a_1 = k_1 (1 + k_2) \; , \; a_2 = k_1 k_2 \; .$$

(9.71)

Considerând că filtrul este stabil şi cauzal, sunt aplicabile condiţiile (9.65') şi (9.65''). Ele conduc la:

$$1 > k_1 k_2 > -k_1 - k_1 k_2 - 1 \quad ; \quad 1 > k_1 k_2 > k_1 + k_1 k_2 - 1 \quad ,$$

sau

$$-1 < k_1 < 1 \quad si \quad -1 < k_2 < 1 \quad . \qquad \textbf{(9.72)}$$

Acest rezultat poate fi generalizat, condiţia de stabilitate fiind $|k_n| \leq 1$. Vom nota funcţiile de sistem parţiale:

$$\frac{X_m(z)}{Y(z)} = P_m(z) \quad si \quad \frac{W_m(z)}{Y(z)} = Q_m(z) \quad ; \quad m \in \{1, 2, \ldots, N\} \quad .$$

(9.73)

Se pot scrie relaţiile:

$$x_{m-1}[n] = x_m[n] - k_m w_{m-1}[n-1] \quad ; \quad w_m[n] = w_{m-1}[n-1] + k_m x_{m-1}[n] \quad ,$$

cărora dacă li se aplică transformarea Z se ajunge la:

$$X_{m-1}(z) = X_m(z) - k_m z^{-1} W_{m-1}(z) \quad ; \quad W_m(z) = z^{-1} W_{m-1}(z) + k_m X_{m-1}(z) \quad .$$

Împărţind cu Y(z) ambele relaţii se obţin:

$$P_{m-1}(z) = P_m(z) - k_m z^{-1} Q_{m-1}(z) \;;\; Q_m(z) = z^{-1} Q_{m-1}(z) + k_m P_{m-1}(z) \;.$$

(9.74-75)

Pentru că $X_0(z) = Y(z)$ şi $W_0(z) = Y(z)$, $P_0(z) = 1$ respectiv $Q_0(z) = 1$. Exprimăm $P_1(z)$ şi $Q_1(z)$ punând în (9.74) şi (9.75) m = 1 :

$$P_1(z) = 1 + k_1 z^{-1} \quad ; \quad Q_1(z) = z^{-1} + k_1 \quad .$$

Se vede imediat că avem: $Q_1(z) = z^{-1}(1 + k_1 z) = z^{-1} P_1(z^{-1})$. Relaţia este valabilă pentru orice m. Presupunem că rămâne adevărată şi pentru m-1 :

$$Q_{m-1}(z) = z^{-(m-1)} P_{m-1}(z^{-1}) \quad . \qquad \textbf{(9.76)}$$

Să arătăm că ea rămâne adevărată şi pentru m. Pentru aceasta se pune $z \rightarrow z^{-1}$ în (9.74), rezultând:

$$P_m(z^{-1}) = P_{m-1}(z^{-1}) + k_m z\, Q_{m-1}(z^{-1}) = z^{m-1} Q_{m-1}(z) + k_m z\, z^{m-1} P_{m-1}(z) =$$
$$= z^m [z^{-1} Q_{m-1}(z) + k_m P_{m-1}(z)] = z^m Q_m(z) \;;$$

$$Q_m(z) = z^{-m} P_m(z^{-1}) \quad .$$

(9.77)

S-au utilizat numai ipoteza (9.76) şi relaţiile (9.74) şi (9.75). Cum pentru m=1 relaţia a fost verificată, rezultă că forma (9.77) este demonstrată prin inducţie completă.

Din (9.74) şi (9.76) se obţine o relaţie de recurenţă pentru $P_m(z)$ sub forma:

$$P_m(z) = P_{m-1}(z) + k_m z^{-m} P_{m-1}(z^{-1}) \quad . \qquad \textbf{(9.78)}$$

Din (9.75) şi (9.76) se poate stabili o relaţie de recurenţă şi pentru $Q_m(z)$:

$$Q_m(z) = z^{-1} Q_{m-1}(z) + k_m z^{-(m-1)} Q_{m-1}(z^{-1}) \quad . \qquad \textbf{(9.79)}$$

Din (9.70) se obţine că:

$$P_N(z) = \frac{X_N(z)}{Y(z)} = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{1}{H(z)} = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N} \;,$$

(9.80)

şi deci pentru $P_m(z)$ se ia în considerare o formă de tipul:

$$P_m(z) = 1 + a_{1,m} z^{-1} + a_{2,m} z^{-2} + \ldots + a_{m,m} z^{-m} \quad . \qquad \textbf{(9.81)}$$

Dar coeficienţii $a_{i,m}$ satisfac şi ei o relaţie de recurenţă, având în vedere că $P_m(z)$ satisface (9.78):

$$1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i,m} z^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} a_{i,m-1} z^{-i} + k_m z^{-m} + \sum_{i=1}^{m-1} k_m a_{i,m-1} z^{i-m} \quad .$$

În membrul drept, în a doua sumă punem i-m = -l şi se obţine că:

$$1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i,m} z^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} a_{i,m-1} z^{-i} + \sum_{l=1}^{m-1} k_m a_{m-l,m-1} z^{-l} + k_m z^{-m} \quad .$$

Prin identificare rezultă:

$$a_{i,m} = a_{i,m-1} + k_m a_{m-i,m-1} \quad ; \quad 1 \le i \le m-1 \quad , \quad a_{m,m} = k_m \quad . \qquad \textbf{(9.82)}$$

De obicei în practică sunt daţi coeficienţii a_1 , a_2 ,..., a_N şi se cer coeficienţii k_i , i=1,.., N (sau invers). Pentru a rezolva problema, în relaţia de recurenţă (9.78) se face schimbarea z –> z^{-1} şi rezultă:

$$P_m(z^{-1}) = P_{m-1}(z^{-1}) + k_m z^{m} P_{m-1}(z) \quad ,$$

care multiplicată cu z^{-m} conduce la:

$$z^{-m} P_m(z^{-1}) = k_m P_{m-1}(z) + z^{-m} P_{m-1}(z^{-1}) \quad . \qquad \textbf{(9.83)}$$

Se rescrie (9.83) ţinând seama de forma (9.81) şi obţinem:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,m} z^{i-m} + z^{-m} = k_m \sum_{i=1}^{m-1} a_{i,m-1} z^{-i} + k_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_{i,m-1} z^{i-m} + z^{-m} \quad ,$$

sau:

$$\sum_{l=1}^{m-1} a_{m-l,m} z^{-l} + a_{m,m} = \sum_{i=1}^{m-1} k_m a_{i,m-1} z^{-i} + k_m + \sum_{l=1}^{m-1} a_{l-1,m-1} z^{-l} \quad .$$

Prin identificarea coeficienţilor rezultă:

$$a_{m-i,m} = k_m a_{i,m-1} + a_{i-1,m-1} \quad , \quad 1 \le i \le m-1 \quad ;$$
$$a_{m,m} = k_m \quad . \qquad \textbf{(9.84)}$$

Din (9.82) şi (9.84) se elimină $a_{i-1,m-1}$ şi se obţine că:

$$a_{i,m-1} = \frac{a_{i,m} - k_m a_{m-i,m}}{1-k_m^2} \quad , \quad 1 \le i \le m-1 \quad ; \qquad \textbf{(9.85)}$$
$$k_m = a_{m,m} \quad , \quad 1 \le m \le N \quad .$$

Dar $a_{1,N} = a_1$, $a_{2,N} = a_2$,...., $a_{N,N} = a_N$, după cum rezultă comparând (9.81) şi (9.80). În consecinţă, din (9.85), $k_N = a_{N,N} = a_N$ şi:

$$k_{N-1} = a_{N-1,N-1} = \frac{a_{N-1,N} - k_N a_{1,N}}{1-k_N^2} = \frac{a_{N-1} - a_N a_1}{1-a_N^2} \quad ;$$
$$k_{N-2} = a_{N-2,N-2} = \frac{a_{N-2,N-1} - k_{N-1} a_{1,N-1}}{1-k_{N-1}^2} \quad .$$

Se aplică încă odată recurenţa pentru $a_{N-2,N-1}$ şi $a_{1,N-1}$ şi rezultă:

$$a_{N-2,N-1} = \frac{a_{N-2,N} - k_N a_{2,N}}{1-k_N^2} = \frac{a_{N-2} - a_N a_2}{1-a_N^2}$$
$$a_{1,N-1} = \frac{a_{1,N} - k_N a_{N-1,N}}{1-k_N^2} = \frac{a_1 - a_N a_{N-1}}{1-a_N^2} \quad ,$$

şi deci şi k_{N-2} se exprimă numai în funcţie de coeficienţii a_1 , a_2 ,..., a_N etc.

Tabelul 9.1 Proprietăţile transformării Z

- Părţile marcate corespund numai transformării unilaterale. În rest, proprietăţile celor două transformate sunt identice.

Semnalul	Transformata	Domeniul de convergenţă
$x[n]$	$X(z)$	$R_-^x < \|z\| < R_+^x$
$y[n]$	$Y(z)$	$R_-^y < \|z\| < R_+^y$
$a\,x[n] + b\,y[n]$	$a\,X(z) + b\,Y(z)$	$\max\{R_-^x, R_-^y\} < \|z\| < \min\{R_+^x, R_+^y\}$
$x[n-n_o]\ ,\ n_o \in \mathbb{Z}$	$z^{-n_o} X(z)$	$R_-^x < \|z\| < R_+^x$
* $x[n-n_o]\ ,\ n_o \in \mathbb{N}$	$z^{-n_o}\left(X(z) + \sum_{n=-n_o}^{-1} x[n] z^{-n} \right)$	$R_-^x < \|z\|$
* $x[n+n_o]\ ,\ n_o \in \mathbb{N}$	$z^{n_o}\left(X(z) - \sum_{n=0}^{n_o-1} x[n] z^{-n} \right)$	$R_-^x < \|z\|$
$e^{j\Omega_o n} x[n]$	$X\left(e^{-j\Omega_o} z\right)$	$R_-^x < \|z\| < R_+^x$
$x[-n]$	$X(1/z)$ *numai pentru transformarea bilaterala*	$\frac{1}{R_+^x} < \|z\| < \frac{1}{R_-^x}$
$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - z^{-1}\right) X(z)$	$R_-^x < \|z\| < R_+^x$
* $x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - z^{-1}\right) X(z) - x[-1]$	$R_-^x < \|z\|$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$	$R_-^x < \|z\| < R_+^x$
* $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{X(z) + \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]}{1 - z^{-1}}$	$R_-^x < \|z\|$
$n\,x[n]$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$	$R_-^x < \|z\| < R_+^x$
$x[n]\ ;\ x[n] \equiv 0\ \ n < 0$	$\lim_{z \to \infty} X(z) = x[0]$	$R_-^x < \|z\|$

Semnalul	Transformata	Domeniul de convergenţă
$x[n]\ ;\ x[n] \equiv 0\ \ n < 0$	$\lim_{z \to 1}(z-1)X(z) = x[\infty]$	$R_-^x < \lvert z \rvert$
$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	$R_-^x < \lvert z \rvert < R_+^x$
$x[n] * y[n]$	$X(z)\,Y(z)$	$\max\{R_-^x, R_-^y\} < \lvert z \rvert < \min\{R_+^x, R_+^y\}$
$x[n]\,y[n]$	$\frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma X(u)\,Y\left(\frac{z}{u}\right)\frac{du}{u}$	$R_-^x R_-^y < \lvert z \rvert < R_+^x R_+^y$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n] \rvert^2 = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma X(u)\,X^*(1/u^*)\frac{du}{u}$		

Tabelul 9.2 Perechile semnal-transformată Z

- Cu excepţia semnalelor marcate * ce nu au transformată unilaterală, cele 2 transformate sunt identice.

Semnalul	Transformata Z	Domeniul de convergenţă
$\delta[n]$	$1\ (constanta)$	$\forall\ z \in \mathbb{C}$
$\sigma[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$\lvert z \rvert > 1$
$^*\ \sigma[n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$\lvert z \rvert < 1$
$\delta[n-n_o]$	z^{-n_o}	$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *daca* $n_o > 0$ *sau* $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{\infty\}$ *daca* $n_o < 0$.
$a^n \sigma[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$^*\ -a^n \sigma[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\lvert z \rvert < \lvert a \rvert$
$n\,a^n \sigma[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$^*\ -n\,a^n \sigma[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z \rvert < \lvert a \rvert$

Semnalul	Transformata Z	Domeniul de convergenţă
$\sigma[n]\cos\Omega_o n$	$\frac{1-z^{-1}\cos\Omega_o}{1-2z^{-1}\cos\Omega_o+z^{-2}}=\frac{z(z-\cos\Omega_o)}{z^2-2z\cos\Omega_o+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sigma[n]\sin\Omega_o n$	$\frac{z^{-1}\sin\Omega_o}{1-2z^{-1}\cos\Omega_o+z^{-2}}=\frac{z\sin\Omega_o}{z^2-2z\cos\Omega_o+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sigma[n]\,a^n\cos\Omega_o n$	$\frac{1-z^{-1}a\cos\Omega_o}{1-2z^{-1}a\cos\Omega_o+a^2z^{-2}}=$ $=\frac{z(z-a\cos\Omega_o)}{z^2-2za\cos\Omega_o+a^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\sigma[n]\,a^n\sin\Omega_o n$	$\frac{z^{-1}a\sin\Omega_o}{1-2z^{-1}a\cos\Omega_o+a^2z^{-2}}=$ $=\frac{za\sin\Omega_o}{z^2-2za\cos\Omega_o+a^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

BIBLIOGRAFIE

1. ROUBINE E. " Introduction à la theorie de la communication",Tome I Signaux non aleatoires, Masson, Paris, 1970.
2. ROUBINE E. "Introduction à la theorie de la communication" Tome II Signaux aleatoires, Masson, Paris, 1970.
3. BAHER H. "Analog & Digital Signal Processing ", John Wiley & Sons
4. SCHRUFER E. "Signalverarbeitung. Numerische Verarbeitung digitaler Signale", Carl Hansen Verlag, Munchen, 1990.
5. ZIEMER R.E., TRANTER W.H., FANNIN,D.R. "Signals and Systems. Continuous and Discrete", Macmillan Publishing Co.Inc, New York, 1983.
6. OPPENHEIM A.V., SCHAFER R.W. "Digital Signal Processing", Englewood Cliffs, Prentice-Hall,N.J.,1975.
7. RABINER L.R., GOLD B. "Theory and Applications of Digital Signal Processing" Englewood Cliffs,Prentice Hall,N.J.,1975.
8. PAPOULIS A. "The Fourier Integral and its Applications", Mc Graw-Hill, New York, 1962.
9. PAPOULIS A. "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", Mc Graw-Hill, New York, 1965.
10. RHODES J.D. "Theory of Electrical Filters", John Wiley & Sons, London, 1976.
11. BOGNER R.E., CONSTANTINIDES A.G. "Introduction to Digital Filtering", John Wiley & Sons, New York, 1975.
12. DI FRANCO J.V., RUBIN W.L. "Radar Detection", Englewood Cliffs Prentice Hall, N.J., 1968.
13. GAZIN J.F. "Filtres actifs à amplificateurs operationnels", Manuel d'applications C.I.L., Tome 3, 1976.
14. AHMED N., RAO K.R., "Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing", Springer -Verlag, Berlin, 1975.
15. COULON F. "Théorie et traitement des signaux", Editios Georgi, Presses Polytechniques Romandes, 1984.
16. RANDALL R.B. "Frequency Analysis", Bruel & Kjaer, 1987.
17. LEE Y.W. "Statistical Theory of Communication", John Wiley & Sons, New York, 1960.
18. GOLDENBERG L.M., MATIUSKIN B.D., POLIAK M.N. "Ţifrovaia obrabotca signalov. Spravocinik", Radiosviazi, Moskva, 1985.
19. GARDNER W.A. "Introduction to Random Processes with Applications to Signals and Systems", Mc Graw-Hill, New York, 1989.
20. FONTOLLIET P.G. "Systèmes de Télécommunications", Editions Georgi, Presses Polytechniques Romandes, 1983.
21. SPĂTARU A. "Fondements de la théorie de la transmission de l'information" Presses Polytechniques Romandes, 1987.
22. STANLEY W.D. "Electronics Communications Systems" Reston, Virginia, 1982.
23. SĂVESCU M., CONSTANTIN I., PETRESCU T. "Metode de aproximare în analiza circuitelor electronice", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1967.
24. ŞTEFĂNESCU S. "Filtre electrice", Ed. Tehnică, Bucureşti,1967.
25. DRAGU I., IOSIF I.M. "Prelucrarea numerică a semnalelor în timp discret", Ed.Militară, Bucureşti, 1985.
26. CARTIANU GH., SĂVESCU M., CONSTANTIN I, STANOMIR D. "Semnale

Circuite şi Sisteme" Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1980.
27. KECS W. "Produsul de convoluţie şi aplicaţii", Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1978.
28. MATEESCU A., ŞERBĂNESCU A. "Circuite cu capacităţi comutate", Ed. Militară, Bucureşti, 1986.
29. VOICU M. "Tehnici de analiză a stabilităţii sistemelor automate", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1986.
30. GIACOLETTO L.J. (editor) "Electronic Designer's Handbook" Mc Graw-Hill, New York, 1977.
31. STANOMIR D., STĂNĂŞILĂ O. "Metode matematice în teoria semnalelor", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980.
32. GONOROVSKY I.S. "Radio Circuit and Signals" Mir Publishers, Moscow, 1981.
33. MATEESCU A. "Semnale Circuite şi sisteme" Ed. Did. şi Ped., Bucreşti, 1984.
34. RULEA G. "Prelucrarea optimă a semnalelor radio", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1979.
35. SCHWARTZ M., SHAW L. "Signal Processing. Discrete Spectral Analysis, Detection and Estimation", Mc Graw-Hill, New York, 1975.
36. GÂRLAŞU S., POPP C., IONEL S. "Introducere în analiza spectrală şi de corelaţie", Ed. Facla, Timişoara, 1982.
37. RADU O., SĂNDULESCU G. "Filtre numerice. Aplicaţii" Ed. Tehnică, Bucureşti, 1979.
38. OANCEA E. "Sinteza circuitelor electrice liniare pasive" Acad. Militară , Bucureşti, 1980.
39. FRANKS L.E. "Teoria signalov" Sovestkoe Radio, Moskwa, 1974.
40. GHERMAN G., "Semnale, circuite şi sisteme" vol. I, Lito. I.P."Traian Vuia", Timişoara, 1979.
41. GHERMAN G. "Semnale, circuite şi sisteme" vol.II, Lito. I.P."Traian Vuia", Timişoara, 1980.
42. GHERMAN G. "Semnale, circuite şi sisteme" vol. III, Lito. I.P. "Traian Vuia", Timişoara 1980.
43. ROSS M.S. "Initiation aux probabilités", Presses Polytechniques Romandes, 1987.
44. ŞILOV G.E. "Analiza matematică. Curs special", Ed. Stiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.
45. POP E., NAFORNIŢĂ I., TIPONUŢ V., MIHĂESCU A., TOMA L."Metode în prelucrarea numerică a semnalelor" vol.I, Ed. Facla, Timişoara,1986.
46. POP E., NAFORNIŢĂ I., TIPONUŢ V., MIHĂESCU A., TOMA L.."Metode în prelucrarea numerică a semnalelor" vol.II, Ed. Facla,Timişoara,1989.
47. LIM J.S., OPPENHEIM A.V. "Advanced Topics in Signal Processing", Englewood Clifs, Prentice-Hall, N.J., 1988.
48. COUCH L.W. "Digital and Analog Communication Systems" Macmillan Pub. Comp., New York, 1983.
49. RUDIN W. "Real and Complex Analysis", Mc Graw - Hill, New York, 1986.
50. KAILATH T. "A View of Three Decades of Linear Filtering Theory" I.E.E.E. Trans. on Inf. Theory, vol. IT-20, No.2, March 1972, pp 146-181.
51. RABINER L.R., MC CLELLAN J.H., PARKS T.W. "FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation", Proceedings of the I.E.E.E. vol. 63, No. 4, April 1975, pp 595 - 610.
52. ŞERBĂNESCU A. "Complemente de sinteza circuitelor electrice" Academia Militară, Bucureşti, 1985.

53. KORN G.A. "Simularea şi măsurarea proceselor aleatoare" Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969.
54. COCÂRLAN P., ROŞCULEŢ M. "Serii trigonometrice şi aplicaţii", Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1991.
55. GELFAND I.M., ŞILOV G.E. "Funcţii generalizate" Ed. Stiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983.
56. HOVANESIAN S.A. "Radar Detection and Tracking Systems" Artech House, Dedham, M.A., 1973.
57. DANIELS R.W. "Approximation Methods for Electronic Filter Design with Applications to Passive , Active and Digital Networks", Mc Graw - Hill , New York, 1974.
58. CANDY J.V. "Signal Processing. The Model-Based Approach", Mc Graw-Hill, New York, 1974.
59. PAPOULIS A. "Teoria sistem i preobrazovanie v optike" Izdatelistvo Mir, Moskwa, 1971.
60. HASLER M., NEIRYNK J. "Filtres électriques", Presses Polytechniques Romandes, 1981.
61. CONNOR F.R. "Introductory Topics in Electronics and Telecommunication Networks" Edward Arnold Publishers, London, 1972.
62. KUNT M. "Traitement numérique des signaux" Presses Polytechniques Romandes, 1989.
63. CARLSON A.B. "Communication Systems. An Introduction to Signal and Noise in Electrical Communication" Mc Graw - Hill, 1981.
64. NATARAJAN S. "Theory and Design of Linear Active Networks", Macmillan Pub. Comp., New York, 1987.
65. LINDSEY W.C., SIMON M.K. "Telecommunication Systems Engineering", Englewood Cliffs, Prentice - Hall, N.J., 1973.
66. ANDRIANOV A.V., SPAK I.I. "Ţifrovaia Obrabotka informaţii v izmeritelinîh priborah i sistemah", Izdatelistvo "Vîşeişaia Şkola", Minsk, 1987.
67. OPPENHEIM A.V., WILLSKY A.S., YOUNG I.T. "Signals and Systems", Englewood Cliffs, Prentice - Hall, N.J., 1983.
68. CHARBIT M., LAVERGNAT J. "Elements de théorie du signal: signaux aléatoires" Ellipses, 1990.
69. OPPENHEIM A.V. (editor) "Applications of Digital Signal Processing" Englewood Cllifs, Prentice - Hall, N.J., 1987.
70. BOITE R.,LEICH H. "Les filtres numériques. Analyse et synthèse des filtres unidimensionnels", Masson, Paris, 1990.
71. BELLANGER M., "Traitement numérique du signal. Théorie et pratique", Masson, Paris, 1990.
72. TEMES G.C., BARCILON V.,MARSHALL F.C. "The Optimization of Bandlimited Systems" Proceedings of the I.E.E.E., vol. 61, no.2, February 1973, pp 196-234.
73. ZVEREV A.I. "Handbook of Filter Synthesis" John Wiley & Sons, New York, 1967.
74. SĂVESCU M. "Metode în analiza circuitelor electronice" Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

Problema 1.

Se consideră sistemul caracterizat de ecuaţia cu diferenţe finite :

$$y[n] - a \cdot y[n-1] = x[n-1] - a \cdot x[n]$$

a). Desenaţi o formă de implementare a sistemului folosind un singur circuit de înmulţire cu o constantă diferită de ± 1, doar două linii de întârziere şi sumatoare.

b). Scrieţi ecuaţia cu diferenţe finite care caracterizează sistemul obţinut prin conectarea în cascadă a două sisteme de tipul celui de la punctul a).

Rezolvare.

a). $y[n] = a \cdot (y[n-1] - x[n]) + x[n-1]$

Forma de implementare a sistemului este cea din figura 1.1.

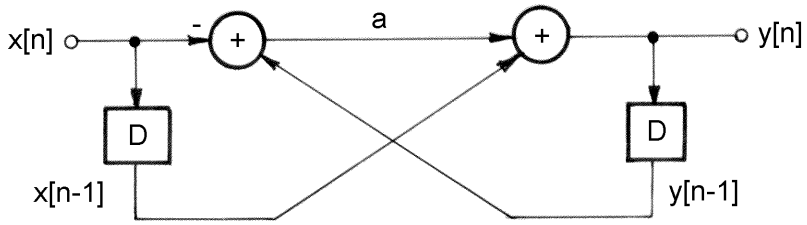


Fig.1.1. Forma de implementare cerută.

b). Luând în ambii membri ai ecuaţiei cu diferenţe finite din enunţ transformata z se obţine:

$$Y(z) \cdot (1 - a \cdot z^{-1}) = X(z) \cdot (z^{-1} - a)$$

Expresia funcţiei de transfer a acestui sistem este:

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - a}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

Expresia funcţiei de transfer a celui de al doilea sistem este:

$$H_b(z) = \frac{z^{-1} - b}{1 - b \cdot z^{-1}}$$

Expresia funcţiei de transfer a sistemului obţinut prin conectarea în cascadă a celor două sisteme este:

$$H(z) = H_a(z) \cdot H_b(z) = \frac{z^{-2} - (a+b) \cdot z^{-1} + ab}{1 - (a+b) \cdot z^{-1} + ab \cdot z^{-2}}$$

Ţinând seama de legătura dintre expresia funcţiei de transfer a unui sistem şi ecuaţia cu diferenţe finite care-l descrie, pe baza ultimei relaţii se obţin următorii coeficienţi ai ecuaţiei cu diferenţe finite care descrie sistemul global:

$$b_2 = 1; \quad b_1 = -(a+b); \quad b_0 = ab; \quad a_2 = ab; \quad a_1 = -(a+b); \quad a_0 = 1$$

Ecuaţia cu diferenţe finite care caracterizează sistemul global este următoarea:

$$y[n] - (a+b) \cdot y[n-1] + ab \cdot y[n-2] = ab \cdot x[n] - (a+b) \cdot x[n-1] + x[n-2]$$

Problema 2.

Pentru sistemul în timp discret din figura următoare:

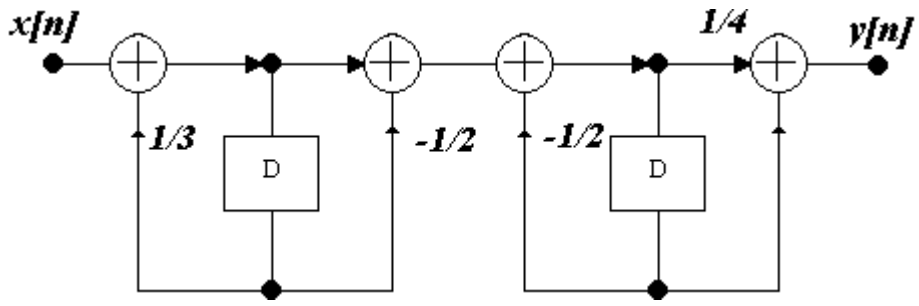


Fig. 1.2. Schema sistemului de analizat.

Scrieți ecuația cu diferențe finite corespunzătoare.
Stabiliți expresia răspunsului la impuls al sistemului.
Care este expresia răspunsului în fecvență al sistemului considerat ?
Desenați o formă de implementare a sistemului constând din două sisteme conectate în paralel.

Rezolvare.

Sistemul considerat este compus din două sisteme de ordinul întâi conectate în cascadă. Coeficienții acestora sunt:

Primul sistem.

$$\frac{1}{a_{01}} = 1 \Rightarrow a_{01} = 1; \quad b_{01} = 1; \quad -a_{11} = \frac{1}{3} \Rightarrow a_{11} = -\frac{1}{3}; \quad b_{11} = -\frac{1}{2}$$

Funcția sa de transfer este:

$$H_1(z) = \frac{1 - (\frac{1}{2}) \cdot z^{-1}}{1 - (\frac{1}{3}) \cdot z^{-1}}$$

Cel de al doilea sistem.

$$\frac{1}{a_{02}} = 1 \Rightarrow a_{02} = 1; \quad b_{02} = \frac{1}{4}; \quad -a_{12} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_{12} = \frac{1}{2}; \quad b_{12} = 1$$

Funcția sa de transfer este:

$$H_2(z) = \frac{\frac{1}{4} + z^{-1}}{1 + (\frac{1}{2}) \cdot z^{-1}}$$

Funcția de transfer a sistemului global este:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{7}{8} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2}}{1 + \frac{1}{6} z^{-1} - \frac{1}{6} z^{-2}}$$

Ecuația cu diferențe finite corespunzătoare este:

$$y[n]+\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]=\frac{1}{4}x[n]+\frac{7}{8}x[n-1]-\frac{1}{2}x[n-2]$$

b) Pentru stabilirea expresiei răspunsului la impuls al sistemului se calculează transformata z inversă a funcției sale de transfer. Pentru aceasta se descompune $H(z)$ *în fracții simple:*

$$H(z)=\frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+C$$

unde:

$$C=\lim_{z^{-1}\to\infty}H(z)=3;\qquad A=(1+\frac{1}{2}z^{-1})H(z)\Big|_{z^{-1}=-2}=-\frac{21}{10}$$

și:

$$B=(1-\frac{1}{3}z^{-1})H(z)\Big|_{z^{-1}=3}=-\frac{13}{20}$$

Deci:

$$H(z)=3-\frac{\frac{21}{10}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{13}{20}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Inversând fiecare fracție simplă se obține răspunsul la impuls al sistemului global:

$$h[n]=3\delta[n]-[\frac{21}{10}(-\frac{1}{2})^n+\frac{13}{20}(\frac{1}{3})^n]\sigma[n]$$

c) Răspunsul în frecvență al sistemului considerat se obține prin particularizarea funcției sale de transfer:

$$H(\Omega)=H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(\frac{1}{4}+e^{-j\Omega})}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega})}$$

Modulul răspunsului în frecvență are expresia:

$$|H(\Omega)|=\sqrt{\frac{(\frac{17}{16}+\frac{1}{2}\cos\Omega)(\frac{5}{4}-\cos\Omega)}{(\frac{5}{4}+\cos\Omega)(\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos\Omega)}}$$

În figura următoare este prezentat graficul său.

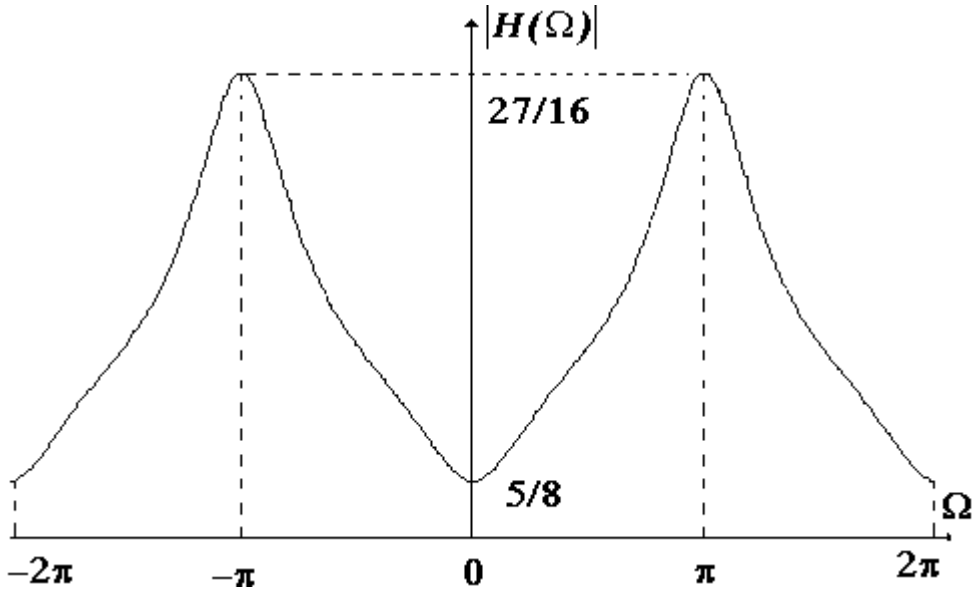


Fig. 2.2. Modulul răspunsului în frecvență.

Făcând apel la descompunerea în fracții simple obținută mai sus se poate scrie:

$$H(z)=\frac{\frac{9}{10}+\frac{3}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{\frac{13}{20}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Coeficienții primei funcții de transfer din membrul drept sunt:

$$b_{01}=\frac{9}{10};\quad b_{11}=\frac{3}{2};\quad a_{01}=1;\quad a_{11}=\frac{1}{2}$$

Coeficienții celei de a doua funcții de transfer din membrul drept sunt:

$$b_{02}=-\frac{13}{20};\quad a_{02}=1;\quad a_{12}=-\frac{1}{3}$$

Prin conectarea în paralele ale formelor canonice II de implementare a acestor două sisteme se obține implementarea cerută în enunț, prezentată în figura 2.3.

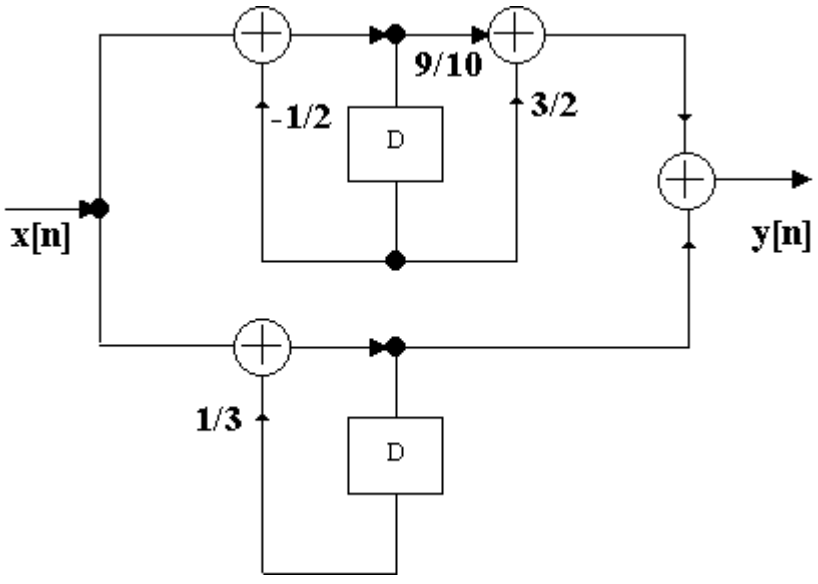


Fig. 3.2. Schema de implementare a sistemului considerat obținută prin conectarea în paralel a două sisteme de ordinul I.

Problema 3.

Se notează prin $X[k]$ *valoarea transformării z a unei secvențe* $x[n]$ *de durată N, nulă pentru* $n \neq \overline{0, N-1}$.

Exprimați $X[k]$ *în funcție de* $x[n]$.

Demonstrați că dacă $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ *, atunci:*

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X[k]}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \cdot z^{-1}}$$

Demonstrați că dacă $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ *atunci* $X[k] = aX_1[k] + bX_2[k]$.

Care este legătura dintre $X(\Omega)$ *şi* $X[k]$ *?*

Rezolvare.

$$X[k] = X(z)\Big|_{z = e^{jk\frac{2\pi}{N}}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Membrul drept reprezintă exprimarea lui $X[k]$ *în funcție de* $x[n]$.

b) Ținând seama de relația din enunț se poate scrie:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \frac{1 - e^{-j2k\pi} z^{-n}}{1 - e^{-j\frac{2k\pi}{N}} z^{-1}} \qquad e^{-j2k\pi} = 1 \qquad = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X[k]}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}} z^{-1}}$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

c)

$$x[n] \to X[k]; \quad x_1[n] \to X_1[k]; \quad x_2[n] \to X_2[k];$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} (ax_1[n] + bx_2[n]) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$= a\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} + b\sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = aX_1[k] + bX_2[k]$$

Transformarea considerată este liniară.

d)

$$X[k] = X(z)\Big|_{z=e^{jk\frac{2\pi}{N}}}, \quad X(\Omega) = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}, \Rightarrow X[k] = X(\Omega)\Big|_{\Omega = k\frac{2\pi}{N}}$$

Deci transformata ***X[k]*** *se obţine prin eşantionarea transformatei Fourier în timp discret a aceluiaşi semnal,* $X(\Omega)$*, cu pasul* $\frac{2\pi}{N}$*.*

BIBLIOGRAFIE

1. ROUBINE E. " Introduction à la theorie de la communication",Tome I Signaux non aleatoires, Masson, Paris, 1970.
2. ROUBINE E. "Introduction à la theorie de la communication" Tome II Signaux aleatoires, Masson, Paris, 1970.
3. BAHER H. "Analog & Digital Signal Processing ", John Wiley & Sons
4. SCHRUFER E. "Signalverarbeitung. Numerische Verarbeitung digitaler Signale", Carl Hansen Verlag, Munchen, 1990.
5. ZIEMER R.E., TRANTER W.H., FANNIN,D.R. "Signals and Systems. Continuous and Discrete", Macmillan Publishing Co.Inc, New York, 1983.
6. OPPENHEIM A.V., SCHAFER R.W. "Digital Signal Processing", Englewood Cliffs, Prentice-Hall,N.J.,1975.
7. RABINER L.R., GOLD B. "Theory and Applications of Digital Signal Processing" Englewood Cliffs,Prentice Hall,N.J.,1975.
8. PAPOULIS A. "The Fourier Integral and its Applications", Mc Graw-Hill, New York, 1962.
9. PAPOULIS A. "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", Mc Graw-Hill, New York, 1965.
10. RHODES J.D. "Theory of Electrical Filters", John Wiley & Sons, London, 1976.
11. BOGNER R.E., CONSTANTINIDES A.G. "Introduction to Digital Filtering", John Wiley & Sons, New York, 1975.
12. DI FRANCO J.V., RUBIN W.L. "Radar Detection", Englewood Cliffs Prentice Hall, N.J., 1968.
13. GAZIN J.F. "Filtres actifs à amplificateurs operationnels", Manuel d'applications C.I.L., Tome 3, 1976.
14. AHMED N., RAO K.R., "Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing", Springer -Verlag, Berlin, 1975.
15. COULON F. "Théorie et traitement des signaux", Editios Georgi, Presses Polytechniques romandes, 1984.
16. RANDALL R.B. "Frequency Analysis", Bruel & Kjaer, 1987.
17. LEE Y.W. "Statistical Theory of Communication", John Wiley & Sons, New York, 1960.
18. GOLDENBERG L.M., MATIUSKIN B.D., POLIAK M.N. "Úifrovaia obrabotca signalov. Spravocinik", Radiosviazi, Moskva, 1985.
19. GARDNER W.A. "Introduction to Random Processes with Applications to Signals and Systems", Mc Graw-Hill, New York, 1989.
20. FONTOLLIET P.G. "Systèmes de Télécommunications", Editions Georgi, Presses Polytechniques romandes, 1983.
21. SP{ TARU A. "Fondements de la théorie de la transmission de l'information" Presses Polytechniques romandes, 1987.

22. STANLEY W.D. "Electronics Communications Systems" Reston, Virginia, 1982.
23. S{VESCU M., CONSTANTIN I., PETRESCU T. "Metode de aproximare în analiza circuitelor electronice", Ed. Tehnic|, Bucureõti, 1967.
24. ÔTEF{NESCU S. "Filtre electrice", Ed. Tehnic|, Bucureõti,1967.
25. DRAGU I., IOSIF I.M. "Prelucrarea numeric| a semnalelor în timp discret", Ed.Militar|, Bucureõti, 1985.
26. CARTIANU GH., S{VESCU M., CONSTANTIN I, STANOMIR D. "Semnale Circuite õi Sisteme" Ed. Did. õi Ped., Bucureõti, 1980.
27. KECS W. "Produsul de convoluûie õi aplicaûii", Ed. Acad. R.S.R., Bucureõti, 1978.
28. MATEESCU A., ÔERB{NESCU A. "Circuite cu capacit|ûi comutate", Ed. Militar|, Bucureõti, 1986.
29. VOICU M. "Tehnici de analiz| a stabilit|ûii sistemelor automate", Ed. Tehnic|, Bucureõti, 1986.
30. GIACOLETTO L.J. (editor) "Electronic Designer's Handbook" Mc Graw-Hill, New York, 1977.
31. STANOMIR D., ST{N{ÔIL{ O. "Metode matematice în teoria semnalelor", Ed. Tehnic|, Bucureõti, 1980.
32. GONOROVSKY I.S. "Radio Circuit and Signals" Mir Publishers, Moscow, 1981.
33. MATEESCU A. "Semnale Circuite õi sisteme" Ed. Did. õi Ped., Bucreõti, 1984.
34. RULEA G. "Prelucrarea optim| a semnalelor radio", Ed. Tehnic|, Bucureõti, 1979.
35. SCHWARTZ M., SHAW L. "Signal Processing. Discrete Spectral Analysis, Detection and Estimation", Mc Graw-Hill, New York, 1975.
36. GÂRLAÔU S., POPP C., IONEL S. "Introducere în analiza spectral| õi de corelaûie", Ed. Facla, Timiõoara, 1982.
37. RADU O., S{NDULESCU G. "Filtre numerice. Aplicaûii" Ed. Tehnic|, Bucureõti, 1979.
38. OANCEA E. "Sinteza circuitelor electrice liniare pasive" Acad. Militar| , Bucureõti, 1980.
39. FRANKS L.E. "Teoria signalov" Sovestkoe Radio, Moskwa, 1974.
40. GHERMAN G., "Semnale, circuite õi sisteme" vol. I, Lito. I.P."Traian Vuia", Timiõoara, 1979.
41. GHERMAN G. "Semnale, circuite õi sisteme" vol.II, Lito. I.P."Traian Vuia", Timiõoara, 1980.
42. GHERMAN G. "Semnale, circuite õi sisteme" vol. III, Lito. I.P. "Traian Vuia", Timiõoara 1980.
43. ROSS M.S. "Initiation aux probabilités", Presses Polytechniques romandes, 1987.
44. ÔILOV G.E. "Analiza matematic|. Curs special", Ed. Stiinûific| õi Enciclopedic|, Bucureõti, 1989.
45. POP E., NAFORNIÚ{ I., TIPONUÚ V., MIH{ESCU A., TOMA L."Metode în

prelucrarea numeric| a semnalelor" vol.I, Ed. Facla, Timiõoara,1986.
46. POP E., NAFORNIÚ{ I., TIPONUÚ V., MIH{ESCU A., TOMA L.."Metode în prelucrarea numeric| a semnalelor" vol.II, Ed. Facla,Timiõoara,1989.
47. LIM J.S., OPPENHEIM A.V. "Advanced Topics in Signal Processing", Englewood Clifs, Prentice-Hall, N.J., 1988.
48. COUCH L.W. "Digital and Analog Communication Systems" Macmillan Pub. Comp., New York, 1983.
49. RUDIN W. "Real and Complex Analysis", Mc Graw - Hill, New York, 1986.
50. KAILATH T. "A View of Three Decades of Linear Filtering Theory" I.E.E.E. Trans. on Inf. Theory, vol. IT-20, No.2, March 1972, pp 146-181.
51. RABINER L.R., MC CLELLAN J.H., PARKS T.W. "FIR Digital Filter Design Techniques Using Weighted Chebyshev Approximation", Proceedings of the I.E.E.E. vol. 63, No. 4, April 1975, pp 595 - 610.
52. ÔERB{NESCU A. "Complemente de sinteza circuitelor electrice" Academia Militar|, Bucureõti, 1985.
53. KORN G.A. "Simularea õi m|surarea proceselor aleatoare" Ed. Tehnic|, Bucureõti, 1969.
54. COCÂRLAN P., ROÔCULEÚ M. "Serii trigonometrice õi aplicaûii", Ed. Academiei Române, Bucureõti, 1991.
55. GELFAND I.M., ÔILOV G.E. "Funcûii generalizate" Ed. Stiinûific| õi Enciclopedic|, Bucureõti, 1983.
56. HOVANESIAN S.A. "Radar Detection and Tracking Systems" Artech House, Dedham, M.A., 1973.
57. DANIELS R.W. "Approximation Methods for Electronic Filter Design with Applications to Passive , Active and Digital Networks", Mc Graw - Hill , New York, 1974.
58. CANDY J.V. "Signal Processing. The Model-Based Approach", Mc Graw-Hill, New York, 1974.
59. PAPOULIS A. "Teoria sistem i preobrazovanie v optike" Izdatelistvo Mir, Moskwa, 1971.
60. HASLER M., NEIRYNK J. "Filtres électriques", Presses Polytechniques romandes, 1981.
61. CONNOR F.R. "Introductory Topics in Electronics and Telecommunication Networks" Edward Arnold Publishers, London, 1972.
62. KUNT M. "Traitement numérique des signaux" Presses Polytechniques romandes, 1989.
63. CARLSON A.B. "Communication Systems. An Introduction to Signal and Noise in Electrical Communication" Mc Graw - Hill, 1981.
64. NATARAJAN S. "Theory and Design of Linear Active Networks", Macmillan Pub. Comp., New York, 1987.
65. LINDSEY W.C., SIMON M.K. "Telecommunication Systems Engineering", Englewood Cliffs, Prentice - Hall, N.J., 1973.

66. ANDRIANOV A.V., SPAK I.I. "Úifrovaia Obrabotka informaÛii v izmeritelinîh priborah i sistemah", Izdatelistvo "VîÕeiÕaia Ôkola", Minsk, 1987.
67. OPPENHEIM A.V., WILLSKY A.S., YOUNG I.T. "Signals and Systems", Englewood Cliffs, Prentice - Hall, N.J., 1983.
68. CHARBIT M., LAVERGNAT J. "Elements de théorie du signal: signaux aléatoires" Ellipses, 1990.
69. OPPENHEIM A.V. (editor) "Applications of Digital Signal Processing" Englewood Cllifs, Prentice - Hall, N.J., 1987.
70. BOITE R.,LEICH H. "Les filtres numériques. Analyse et synthèse des filtres unidimensionnels", Masson, Paris, 1990.
71. BELLANGER M., "Traitement numérique du signal. Théorie et pratique", Masson, Paris, 1990.
72. TEMES G.C., BARCILON V.,MARSHALL F.C. "The Optimization of Band-limited Systems" Proceedings of the I.E.E.E., vol. 61, no.2, February 1973, pp 196-234.
73. ZVEREV A.I. "Handbook of Filter Synthesis" John Wiley & Sons, New York, 1967.
74. S{VESCU M. "Metode în analiza circuitelor electronice" Ed. ÔtiinÛific| Õi Enciclopedic|, BucreÔti, 1985.
75. ŢOPA M. D. “Semnale, circuite şi sisteme”, Casa cărţii de ştiinţă, Cluj-Napoca, 2002.
76. TĂRNICERIU D. “Bazele prelucrării numerice a semnalelor”, Ed. Vasiliana, Iaşi, 2001.
77. OPPENHEIM A. V., Willsky A. S., Nawab S. “Signals & Systems ” second edition, Prentice Hall, New Jersey, 1997.
78. MATEESCU A., DUMITRIU N., STANCIU L. “Semnale şi sisteme”, Ed. Teora, Bucureşti, 2001.